

# **Физика колебаний – лабораторная работа 6**

## **Параметрические колебания линейного осциллятора**

Методические рекомендации

### **Цели работы:**

- Познакомиться с физическими принципами параметрического возбуждения колебаний на наглядном примере механического торсионного линейного осциллятора, момент инерции которого принудительно изменяется по заданному периодическому закону.
- Получить представление об общих закономерностях параметрических колебаний и параметрическом резонансе в линейных системах.
- Исследовать экспериментально и теоретически условия возбуждения и особенности параметрического резонанса, рассматривая параметрические колебания при кусочно-постоянной модуляции параметра как чередующиеся собственные колебания с различными значениями собственного периода.
- Рассчитать и проверить экспериментально порог возбуждения и интервалы параметрической неустойчивости для основного параметрического резонанса и резонансов высших порядков.

### **При подготовке к лабораторной работе следует:**

1. Повторить соответствующий теоретический материал (тема 6, см. ниже), пользуясь конспектом лекций и рекомендованным Вам учебником физики.
2. Изучить учебное пособие «Параметрические колебания линейного осциллятора» Рекомендуется самостоятельно проделать вывод всех формул, особенно тех, что в пособии приведены без вывода.
3. Подготовить письменно краткие ответы на предлагаемые Вам «Вопросы для самоконтроля» (см. ниже).
4. Решить некоторые теоретические задачи из учебного пособия «Параметрические колебания линейного осциллятора» (по индивидуальному заданию преподавателя).
5. Познакомиться с «Требованиями к оформлению отчета» о выполненной работе.

### **Теоретический материал (тема 6)**

Параметрическое возбуждение колебаний линейного осциллятора. Механическая модель линейной системы с параметрическим возбуждением — торсионный пружинный осциллятор с модулируемым моментом инерции ротора, и его электромагнитный аналог — колебательный контур с модулируемой индуктивностью катушки. Параметрическое возбуждение при прямоугольном законе модуляции.

Физические причины параметрического резонанса. Условия и особенности параметрического возбуждения колебаний. Порог параметрического возбуждения. Дифференциальное уравнение осциллятора с модуляцией параметра по кусочно-постоянному закону. Оценка порога возбуждения на основе энергетических соображений. Неограниченный рост амплитуды при резонансе и режим параметрической регенерации. Параметрические резонансы высших порядков. Частотные интервалы неустойчивости состояния равновесия относительно параметрического возбуждения. Влияние трения на интервалы неустойчивости. Особенности резонансов нечетных и четных порядков. Спектральный состав ста-

ционарных колебаний на границах интервалов параметрического возбуждения и в режиме параметрической регенерации.

### Вопросы для самоконтроля

1. Опишите физическую систему, которая моделируется в лабораторной работе (торсионный пружинный осциллятор с изменяемым моментом инерции). Какие параметры характеризуют математическую модель осциллятора, используемую в лабораторной работе? Какими переменными характеризуется механическое состояние осциллятора, совершающего колебания?
2. Какой физический параметр моделируемой системы подвергают принудительной модуляции? Каким образом реализуется в рассматриваемой модели периодическая кусочно-постоянная модуляция параметра? Сформулируйте условия применимости этой модели. Что такое глубина модуляции?
3. В чем заключается принципиальное отличие параметрических колебаний от обычных вынужденных колебаний, изучаемых в 4 и 5 лабораторных работах данного цикла?
4. Приведите качественное объяснение возможности параметрической раскачки пружинного осциллятора путем принудительных периодических изменений момента инерции его ротора. Какими должны быть период и фаза изменений момента инерции для возбуждения колебаний? Каким образом и за счет какого источника растет энергия осциллятора при параметрическом резонансе?
5. Рассматривая электромагнитный контур, аналогичный механическому пружинному осциллятору, объясните, каким образом можно возбудить в нем параметрические колебания. Какой параметр контура аналогичен моменту инерции торсионного осциллятора? Какой вид энергии в контуре аналогичен кинетической энергии ротора?
6. Перечислите основные отличия параметрического резонанса от обычного резонанса, вызываемого прямым действием на осциллятор периодической внешней силы.
7. Почему при наличии трения параметрический резонанс возможен только тогда, когда глубина модуляции параметра превосходит некоторое пороговое значение? Почему трение не в состоянии ограничить рост амплитуды при параметрическом резонансе?
8. Приведите вывод дифференциального уравнения параметрических колебаний торсионного осциллятора, моделируемого в данной лабораторной работе. Чем это уравнение отличается от уравнения, описывающего собственные и вынужденные колебания такого осциллятора?
9. Объясните идею поэтапного интегрирования («сшивания» решений) дифференциального уравнения при кусочно-постоянной модуляции параметра. Какие условия должны выполняться в моменты принудительных скачкообразных изменений момента инерции ротора?
10. Какие гармоники входят в состав периодического кусочно-постоянного закона модуляции параметра? Почему для параметрических колебаний нельзя воспользоваться принципом суперпозиции?
11. Как можно оценить приращение энергии торсионного осциллятора за один цикл прямоугольной модуляции момента инерции ротора в условиях основного параметрического резонанса? Сделайте оценку порогового (минимального) значения глубины модуляции момента инерции для возбуждения основного резонанса. Как этот порог зависит от добротности осциллятора?
12. Объясните вид графиков и фазовой траектории стационарных колебаний в условиях порога основного параметрического резонанса. Устойчив ли этот режим колебаний осциллятора по отношению к малым изменениям параметров системы?
13. Основной параметрический резонанс возможен не только тогда, когда период модуляции параметра равен половине собственного периода ( $T = T_0/2$ ), но и в некотором интервале значений  $T$  в окрестности  $T_0/2$ . Из каких физических условий можно исходить при теоретическом расчете границ этого интервала параметрической неустойчивости?
14. Объясните характерный вид графиков и фазовых траекторий стационарных колебаний, происходящих на границах основного интервала параметрической неустойчивости.
15. Почему при увеличении глубины модуляции момента инерции изменяется резонансное значение периода модуляции? Уменьшается или увеличивается резонансный период?
16. Можно ли, используя ручное управление модуляцией момента инерции, добиться более быстрого роста параметрических колебаний, чем при автоматической модуляции, период которой точно настроен на основной резонанс?
17. Как ширина основного интервала параметрической неустойчивости зависит от глубины модуляции  $m$  момента инерции ротора (при  $m \ll 1$ )?
18. При кусочно-постоянной модуляции момента инерции третий интервал параметрической неустойчивости (вблизи  $T = 3T_0/2$ ) имеет такую же ширину, как и основной интервал ( $T = T_0/2$ ), но ширина второго интервала (вблизи  $T = T_0$ ) много меньше, чем третьего (при  $m \ll 1$ ). Почему второй параметрический резонанс выражен значительно слабее, чем третий?

## Задания и порядок выполнения лабораторной работы

1. Начните работу с просмотра примеров, последовательно выбирая их из списка, который открывается при щелчке мышью по кнопке «Примеры», расположенной непосредственно под моделью осциллятора. Эти примеры иллюстрируют как типичные, так и некоторые необычные виды движений маятника, детальное изучение которых предусмотрено в данной лабораторной работе.
  - Просмотрите последовательно все примеры, запуская каждый раз (кнопкой «Пуск/Пауза») моделирование соответствующих движений осциллятора.
  - В описании физической системы (см. учебное пособие «Параметрические колебания линейного осциллятора») особое внимание обратите на то, как изменяется период собственных колебаний при изменении момента инерции ротора, и как скачком изменяется угловая скорость ротора при резких принудительных сдвигах грузов вдоль его стержня.
  - Обратите внимание на фазовые соотношения между принудительными движениями грузов вдоль стержня и крутильными колебаниями ротора в условиях основного резонанса и резонанса третьего порядка. В какие моменты грузы должны смещаться в сторону оси ротора?
2. Изучите закономерности основного параметрического резонанса ( $n = 1$ ), который возбуждается, когда два цикла модуляции параметра совершаются за один период собственных колебаний.
  - Начните с моделирования процесса параметрической раскачки в условиях основного резонанса при слабом трении. В панели ввода параметров задайте глубину модуляции порядка 15 – 20%, введите период внешнего воздействия  $T = 0,5T_0$  и добротность порядка 18 – 20. Если осциллятор покоится в положении равновесия, то никакие изменения момента инерции ротора не смогут возбудить его колебаний. Поэтому для наблюдения параметрической раскачки нужно задать ненулевые начальные условия. Чтобы амплитуда колебаний стала расти сразу после начала моделирования, нужно задать (небольшое) начальное отклонение в любую сторону при нулевой начальной скорости.
  - Откройте окно «Угловая скорость» и запустите моделирование. Обратите внимание, в какие моменты времени на графике угловой скорости появляются «зубчики», свидетельствующие о скачкообразных изменениях скорости. В промежутках между принудительными радиальными смещениями грузов ротор совершает затухающие собственные колебания. Объясните, почему при этом весь процесс выглядит как прогрессивный рост колебаний.
  - Откройте окно «Фазовая траектория». Повторите моделирование сначала. Обратите внимание на формирование прогрессивно раскручивающейся фазовой спирали. Почему, несмотря на трение, амплитуда колебаний растет неограниченно? Изучите поведение кинетической, потенциальной и полной энергий в этом процессе, воспользовавшись окном «Энергия от времени».
  - Выполните моделирование параметрических колебаний в условиях порога возбуждения основного резонанса (режим параметрической регенерации). Для заданной глубины модуляции  $m$  рассчитайте (и введите) пороговое значение добротности. Какие начальные условия обеспечат получение стационарных колебаний? Наблюдая графики и фазовую траекторию, методом проб и ошибок уточните пороговое значение добротности, обеспечивающее неизменность амплитуды. Исследуйте экспериментально устойчивость режима параметрической регенерации по отношению к малым изменениям параметров (добротности, периода и глубины модуляции) и начальных условий.
3. Изучите стационарные колебания на границах основного интервала параметрической неустойчивости в отсутствие трения.
  - Для некоторого значения глубины модуляции попытайтесь рассчитать значения периода модуляции, соответствующие левой и правой границам интервала, используя необходимые формулы из учебного пособия «Параметрические колебания линейного осциллятора».
  - Рассчитайте также начальные условия, обеспечивающие получение стационарных колебаний для каждой из границ интервала. Введите соответствующие значения и наблюдайте моделирование, открыв окно «Фазовая траектория».
4. Повторите задания 2 и 3 для второго и третьего параметрического резонанса. Если возникнут затруднения, воспользуйтесь списком «Примеры». С помощью заранее заготовленных примеров Вы сможете запустить моделирование, не выполняя самостоятельно предварительного (порой трудоемкого) расчета и ввода необходимых значений параметров.
5. Проверьте в моделирующем эксперименте Ваши теоретические решения тех задач из учебного пособия, которые были предложены Вам преподавателем в качестве индивидуального задания. Некоторые из предлагаемых в пособии задач требуют серьезного и весьма глубокого самостоятельного исследования и могут послужить темой для курсового проекта.
  - Введите необходимые значения параметров и выполните соответствующие эксперименты. Запишите (или распечатайте на принтере) графики и фазовые диаграммы для включения в отчет.

- Сопоставьте результаты экспериментов с Вашими теоретическими предсказаниями. Если обнаруживаются расхождения результатов расчета с экспериментом, обязательно попытайтесь установить причину расхождений. Результаты экспериментальной проверки Ваших решений включите в отчет о лабораторной работе.

После выполнения всех заданий подготовьте отчет о проделанной лабораторной работе, руководствуясь приведенными ниже «Требованиями к оформлению отчета».

## Требования к оформлению отчета

Отчет о проделанной лабораторной работе должен содержать следующие разделы:

1. Титульный лист с указанием названия и номера лабораторной работы, фамилии и имени студента, номера учебной группы, даты выполнения работы и даты представления отчета.
2. Цель лабораторной работы с определением изучаемого физического явления и краткое описание моделируемой физической системы и ее математической модели.
3. Теоретический раздел с кратким изложением основных характеристик изучаемого явления, его места в классификации колебаний по разным признакам, и описанием математической модели физической системы, используемой для его изучения. В этом разделе должны быть приведены все основные формулы (связь параметров физической системы и ее математической модели, дифференциальное уравнение, описывающее систему, его общее решение, частные решения для наиболее важных и интересных случаев, уравнение фазовой траектории, выражения для разных видов энергии и их средних значений и т.п.). В этом разделе следует обязательно привести вывод тех формул, которые в учебном пособии приведены без вывода.
4. Ответы на вопросы для самоконтроля, которые сформулированы в «Методических рекомендациях» к данной лабораторной работе. Рекомендуется проиллюстрировать Ваши ответы соответствующими графиками или иными результатами моделирования (для тех вопросов, где это целесообразно).
5. Теоретическое решение задач из учебного пособия, предложенных Вам преподавателем в качестве индивидуального задания, и результаты самостоятельной проверки Ваших решений с помощью моделирующего эксперимента. В этом разделе нужно привести таблицы соответствующих измерений с обработкой результатов (для заданий, где такие измерения необходимы), графики и/или фазовые траектории (зарисовав их с экрана или распечатав на принтере, если есть такая возможность).