

# Собственные колебания линейного осциллятора

## Учебное пособие

Бутиков Е. И.

**Аннотация.** В учебном пособии дано описание моделируемой физической системы и приведены теоретические сведения, необходимые студентам для подготовки к лабораторной работе «Собственные колебания линейного осциллятора».

Вторую часть пособия составляют контрольные вопросы, теоретические и экспериментальные задачи для самостоятельной работы, а также материал для возможных индивидуальных заданий студентам (по указанию преподавателя).

## Содержание

<b>1</b>	<b>Теоретические сведения</b>	<b>2</b>
1.1	Общие положения . . . . .	2
1.2	Физическая система — модель линейного осциллятора . . . . .	2
1.3	Дифференциальное уравнение осциллятора . . . . .	3
1.4	Время затухания и добротность $Q$ . . . . .	5
1.5	Неколебательное движение системы . . . . .	6
1.6	Фазовая диаграмма линейного осциллятора . . . . .	8
1.7	Превращения энергии . . . . .	11
1.8	Электромагнитный аналог линейного механического осциллятора . . . . .	13
1.9	О компьютерном моделировании колебаний линейного осциллятора . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Контрольные вопросы и задачи</b>	<b>14</b>
2.1	Колебания в отсутствие трения . . . . .	14
2.2	Затухающие собственные колебания . . . . .	16
2.3	Неколебательное движение осциллятора . . . . .	17
2.4	Приложение: Сводка основных формул . . . . .	19

# 1 Теоретические сведения

## 1.1 Общие положения

Равновесие физической системы называется *устойчивым*, если при любом отклонении системы из положения равновесия возникает *возвращающая*, или *восстанавливающая* сила, которая стремится вернуть систему в равновесие. Если систему вывести из устойчивого равновесия каким-либо внешним воздействием и затем предоставить самой себе, в системе будут происходить колебания около устойчивого положения равновесия. Такие колебания, происходящие в отсутствие периодического внешнего воздействия на систему, в соответствии с общепринятой классификацией колебаний по способу возбуждения называют *собственными* или *свободными*. Любая система, способная совершать собственные колебания, называется *осциллятором*.

В отсутствие трения энергия, сообщенная системе при начальном возбуждении, остается неизменной в процессе последующих собственных колебаний. Поэтому в идеализированных *консервативных системах* собственные колебания продолжаются неограниченно долго. В консервативных системах с одной степенью свободы собственные колебания будут строго *периодическими*, так как начальное состояние системы воспроизводится через равные промежутки времени. При наличии трения, неизбежного в любой реальной системе, собственные колебания постепенно затухают из-за *диссипации* (рассеяния) механической энергии, и в конце концов система приходит в состояние покоя в положении равновесия.

Если восстанавливающая сила пропорциональна отклонению из положения равновесия, то такая система в отсутствие трения, а также при наличии вязкого трения (когда сила трения пропорциональна скорости) описывается *линейным дифференциальным уравнением*. В отсутствие трения собственные колебания в линейной системе будут *гармоническими* (синусоидальными), а при слабом вязком трении — почти гармоническими (с экспоненциально убывающей амплитудой). Модель линейного осциллятора пригодна также для описания малых колебаний вблизи устойчивого положения равновесия и в нелинейных системах при условии, что зависимость возвращающей силы от смещения из положения равновесия может быть аппроксимирована линейной функцией вплоть до отклонений, соответствующих амплитуде рассматриваемых колебаний.

## 1.2 Физическая система — модель линейного осциллятора

Хорошо известный пример линейной механической системы — это груз, подвешенный на упругой пружине, подчиняющейся закону Гука. Другой пример — торсионный пружинный осциллятор, представляющий собой уравновешенный ротор (маховик) со спиральной пружиной, закручивающейся при повороте маховика.

Подобное устройство используется в механических карманных или наручных часах (балансовый механизм). Собственные крутильные колебания такого торсионного осциллятора моделируются в данной компьютерной программе. Условное изображение системы в компьютерной программе показано на рис. 1.

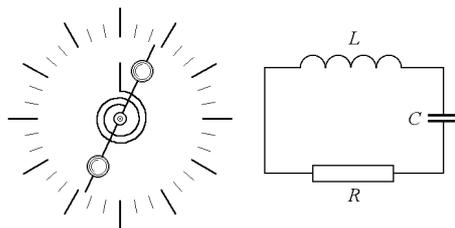


Рис. 1: Торсионный пружинный осциллятор и его электромагнитный аналог — последовательный  $RLC$ -контур.

Электромагнитный аналог механического пружинного линейного осциллятора — последовательный  $LCR$ -контур — показан в правой части рис. 1.

### 1.3 Дифференциальное уравнение осциллятора

При повороте маховика из положения равновесия на угол  $\varphi$  прикрепленная к нему спиральная пружина (другой конец которой закреплен неподвижно) создает возвращающий момент  $N$ , пропорциональный углу отклонения:

$$N = -D\varphi. \quad (1)$$

Коэффициент пропорциональности  $D$  называется жесткостью пружины. Угол отклонения маховика из положения равновесия измеряется по неподвижной шкале при помощи стрелки, прикрепленной к маховику. В положении равновесия стрелка указывает на нулевое деление шкалы. Угол  $\varphi$  измеряется в радианах, хотя в моделирующей программе для удобства наблюдения шкала проградуирована в более привычных для нас градусах.

Применяя к движению маховика с моментом инерции  $J$  основное уравнение динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, получаем следующее дифференциальное уравнение собственных колебаний торсионного пружинного осциллятора:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (2)$$

где введено обозначение  $\omega_0^2 = D/J$ . Общее решение уравнения (2) представляет собой простое гармоническое колебание:

$$\varphi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \delta_0). \quad (3)$$

Амплитуда  $A_0$  и начальная фаза  $\delta_0$  в (2) зависят от *начальных условий*, т. е. от угла отклонения  $\varphi(0)$  и угловой скорости  $\dot{\varphi}(0)$  при  $t = 0$ . Другими словами, эти характеристики колебательного движения зависят от способа возбуждения колебаний. Колебания происходят с угловой частотой  $\omega_0$ , квадрат которой пропорционален жесткости пружины  $D$  и обратно пропорционален

моменту инерции  $J$  маховика. Частота  $\omega_0$  и соответствующий ей период  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , в отличие от амплитуды и начальной фазы, не зависят от начальных условий — они целиком определяются свойствами самого осциллятора, т. е. значениями параметров осциллятора  $D$  и  $J$ . Собственные колебания линейного осциллятора всегда происходят с одной и той же собственной частотой  $\omega_0$  независимо от способа возбуждения. Независимость частоты собственных колебаний от начальных условий, а следовательно от амплитуды (и энергии) колебаний называют *изохронностью* линейного осциллятора.

При наличии силы вязкого трения в дифференциальном уравнении будет присутствовать тормозящий момент этой силы, пропорциональный угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ :

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (4)$$

где *постоянная затухания*  $\gamma$  характеризует интенсивность вязкого трения в системе. Постоянная затухания  $\gamma$ , как и  $\omega_0$ , имеет размерность частоты.

Уравнения (2) и (4) — это *линейные* дифференциальные уравнения, потому что искомая функция  $\varphi(t)$ , как и ее производные по времени, входят в эти уравнения в первой степени. Эти уравнения *однородны*, так как искомая функция или ее производные присутствуют в одинаковой степени во всех членах уравнения. Однородность уравнений отражает отсутствие возбуждающей внешней силы. Таким образом, собственные колебания моделируемой системы описываются однородным линейным уравнением.

Как и любое однородное уравнение, уравнения (2) и (4) имеют тривиальное нулевое решение  $\varphi(t) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(t) = 0$ . Такое решение соответствует отсутствию начального возбуждения (нулевым начальным условиям) и описывает осциллятор, который постоянно находится в покое в положении равновесия. Собственные колебания осциллятора могут возникнуть только в результате некоторого начального возбуждения.

Если трение настолько слабо, что  $\gamma < \omega_0$ , общее решение уравнения (4) имеет колебательный характер и может быть представлено в следующем виде:

$$\varphi(t) = A_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \delta_0). \quad (5)$$

Это решение описывает *затухающие колебания*, медленно меняющаяся амплитуда которых  $A_0 \exp(-\gamma t)$  экспоненциально убывает со временем. Начальное значение амплитуды  $A_0$  и начальная фаза  $\delta_0$  определяются из начальных условий. Частота  $\omega_1$  периодического (косинусоидального) сомножителя в (5) дается следующим выражением:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}. \quad (6)$$

В случае слабого трения, когда постоянная затухания  $\gamma$  мала по сравнению с величиной  $\omega_0$ , характеризующей собственную частоту в отсутствие трения, частота  $\omega_1$  косинусоидального сомножителя в (5) очень близка к  $\omega_0$ :

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \gamma^2/(2\omega_0). \quad (7)$$

Относительное отклонение частоты затухающих колебаний  $\omega_1$  от собственной частоты осциллятора  $(\omega_0 - \omega_1)/\omega_0$  пропорционально квадрату малого параметра  $\gamma/\omega_0$ .

Графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости для затухающих колебаний показаны на рисунке 2 для случая возбуждения собственных колебаний начальным отклонением ротора из положения равновесия при нулевой начальной скорости.



Рис. 2: Графики затухающих колебаний при  $Q = 9.06$  (амплитуда уменьшается вдвое через каждые два цикла колебаний).

#### 1.4 Время затухания и добротность $Q$

В условиях слабого и умеренного трения зависящий от времени множитель  $A_0 \exp(-\gamma t)$  в выражении (5) можно рассматривать как постепенно уменьшающуюся амплитуду затухающих колебаний. Спустя промежуток времени  $\tau = 1/\gamma$ , эта амплитуда приблизительно в  $e \approx 2.72$  раз меньше своего начального значения. Это время  $\tau$  называется *временем затухания* или *временем жизни* колебаний. Хотя формально колебания продолжают бесконечно долго, характерное время  $\tau$  условно можно рассматривать как длительность процесса затухания колебаний: за конечное число таких интервалов амплитуда становится меньше любого сколь угодно малого значения.

При малом трении, когда  $\gamma \ll \omega_0$ , или  $\tau \gg T_0 = 2\pi/\omega_0$  (условие слабого затухания), осциллятор совершает большое число  $N$  циклов собственных колебаний в течение времени жизни  $\tau$ :  $N = \tau/T_0 \gg 1$ . Последовательные максимальные отклонения из положения равновесия убывают в геометрической прогрессии. В самом деле, пусть  $\varphi_n$  есть максимальное отклонение ротора при  $n$ -м колебании. Тогда

$$\varphi_{n+1}/\varphi_n \approx \exp(-\gamma T_0) \approx 1 - \gamma T_0. \quad (8)$$

Таким образом, отношение последовательных членов (знаменатель) этой бесконечно убывающей геометрической прогрессии меньше единицы на величину  $\gamma T_0 = T_0/\tau \ll 1$ .

Для характеристики быстроты затухания колебаний используют, наряду с размерной постоянной затухания  $\gamma$ , также безразмерный *логарифмический декремент затухания*, определяемый как натуральный логарифм отношения последовательных максимальных отклонений в одну сторону:

$$d = \ln(\varphi_n/\varphi_{n+1}) = \gamma T = T/\tau. \quad (9)$$

Обратная логарифмическому декременту величина  $1/d = \tau/T$  — это число циклов колебаний, совершаемых осциллятором за время затухания  $\tau$ .

Другая эквивалентная логарифмическому декременту безразмерная величина, используемая для характеристики быстроты затухания колебаний, это *добротность*  $Q$ , определяемая соотношением:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \pi \frac{\tau}{T_0}. \quad (10)$$

Число циклов, на протяжении которых размах колебаний осциллятора уменьшается в  $e \approx 2.72$  раза, равно деленному на  $\pi \approx 3.14$  значению его добротности. Число колебаний  $N_{1/2}$ , на протяжении которых амплитуда уменьшается вдвое, выражается через добротность следующим соотношением:

$$N_{1/2} = (\ln 2/\pi)Q = 0.22 Q = Q/4.53. \quad (11)$$

## 1.5 Неколебательное движение системы

Когда параметры системы удовлетворяют условию  $\gamma \geq \omega_0$  (условие сильного затухания), осциллятор после начального возбуждения возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. В этом движении ротор либо асимптотически приближается к положению равновесия с одной стороны, либо только один раз пересекает среднее положение и затем приближается к нему с другой стороны. Последний случай возможен, если при возбуждении ротор получает достаточно большую начальную скорость в направлении положения равновесия.

Если  $\gamma = \omega_0$ , затухание осциллятора называют *критическим*. В этом случае общее решение дифференциального уравнения (4) принимает следующий вид:

$$\varphi(t) = (C_1 t + C_2) \exp(-\gamma t), \quad (12)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы, значения которых определяются из начальных условий. Например, если ротор, первоначально находившийся в положении равновесия ( $\varphi(0) = 0$ ), в результате толчка получает начальную скорость  $\dot{\varphi}(0) = \Omega_0$ , то  $C_1 = \Omega_0$ ,  $C_2 = 0$ , и дальнейшее движение ротора описывается функцией

$$\varphi(t) = \Omega_0 t \exp(-\gamma t). \quad (13)$$

Графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости для осциллятора с критическим затуханием, движение которого возбуждается начальным толчком из положения равновесия, показаны на рис. 3.

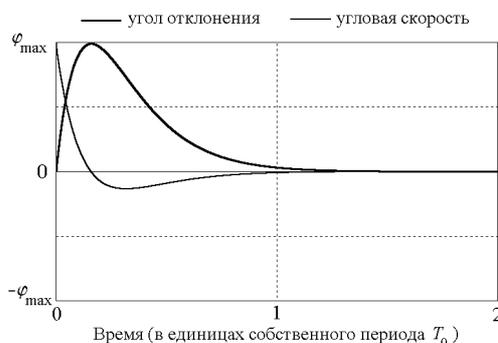


Рис. 3: Графики угла отклонения и угловой скорости при критическом затухании.

Замечательная особенность системы с критическим затуханием заключается в том, что после начального возбуждения она возвращается в состояние покоя в положении равновесия быстрее, чем при любом другом значении постоянной затухания  $\gamma$  (при данном значении  $\omega_0$ ). Как видно из уравнения (10), критическому затуханию, т. е. случаю ( $\gamma = \omega_0$ ), соответствует добротность  $Q = 0.5$ .

Неколебательное движение при очень сильном трении (при сверхкритическом затухании), когда  $\gamma > \omega_0$ , можно представить в виде суперпозиции двух убывающих экспоненциальных функций, характеризуемых различными постоянными времени  $\tau_1 = -1/\alpha_1$  и  $\tau_2 = -1/\alpha_2$  в показателях экспонент:

$$\varphi(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \quad \text{где } \alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (14)$$

Значения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  из находятся из начальных условий, т. е. определяются способом возбуждения системы. В измерительных приборах таких как гальванометры затухание вводится преднамеренно для того чтобы преодолеть трудности считывания показаний при осциллирующей стрелке. Демпфирование называют *критическим*, если подвижная система прибора приходит в равновесие и успокаивается за кратчайшее время, не совершая колебаний. При недостаточном демпфировании прибора ( $Q > 0.5$ ) перед остановкой стрелка совершает колебания. В случае передемпфированного прибора ( $Q < 0.5$  — сверхкритическое затухание) стрелка не совершает колебаний, но тем не менее для ее прихода в положение равновесия требуется большее время по сравнению со случаем критического демпфирования.

Другой пример преднамеренного введения затухания, близкого к критическому — применение гидравлических амортизаторов в упругой подвеске кузова автомобиля. При неисправных амортизаторах после каждого бугорка или ямки на дороге кузов автомобиля совершает колебания, неприятные для пассажиров и опасные с точки зрения надежности сцепления колес с дорогой.

## 1.6 Фазовая диаграмма линейного осциллятора

Механическое состояние торсионного осциллятора определяется двумя динамическими переменными: *обобщенной координатой* (в данном случае углом отклонения)  $\varphi$  и *обобщенной скоростью* (угловой скоростью)  $\dot{\varphi}$ , или, что эквивалентно, углом отклонения  $\varphi$  и угловым моментом (моментом импульса)  $J\dot{\varphi}$ .

Механическое состояние динамической системы в любой момент времени можно наглядно изобразить с помощью точки (*изображающей точки*) в фазовом пространстве. Для системы с одной степенью свободы, положение которой определяется единственной координатой (в случае торсионного осциллятора это угол отклонения), фазовое пространство динамических переменных двумерно, т. е. представляет собой плоскость. На такой *фазовой плоскости* по оси абсцисс отложена обобщенная координата (угол отклонения)  $\varphi$ , а по оси ординат — угловая скорость  $\dot{\varphi}$ . Очень наглядное графическое представление всему процессу эволюции механического состояния системы дает *фазовая диаграмма*, т. е. линия, которую изображающая точка вычерчивает на фазовой плоскости. Фазовая диаграмма для торсионного осциллятора — это график зависимости угловой скорости  $\dot{\varphi}$  (или момента импульса  $J\dot{\varphi}$ ) от угла отклонения  $\varphi$ .

Если система совершает *периодическое движение*, изображающая точка на фазовой плоскости описывает *замкнутую кривую*, двигаясь по ней в направлении по часовой стрелке. Фазовая траектория периодического движения замкнута, потому что система возвращается в исходное механическое состояние после каждого цикла колебаний.

В моделирующей программе (в окне «Фазовая кривая», рис. 4) выбрано такое взаимное расположение фазовой плоскости и графика зависимости потенциальной энергии от угла отклонения, чтобы было удобно в каждый момент времени сопоставлять движущуюся по фазовой плоскости изображающую точку с выводимыми одновременно на график значениями полной энергии осциллятора. Для этого масштабы на фазовой диаграмме и на графике потенциальной энергии выбраны одинаковыми.

Совокупность фазовых траекторий, соответствующих разным способам возбуждения (разным начальным условиям) при неизменных параметрах системы образует ее *фазовый портрет*. Через каждую точку фазовой плоскости проходит, вообще говоря, только одна фазовая траектория: если эту точку выбрать в качестве начального состояния системы, дальнейшее движение системы будет определено однозначно в соответствии с единственностью решения задачи Коши для дифференциального уравнения системы. Это движение и будет происходить вдоль фазовой траектории, проходящей через данную точку фазовой плоскости. Другими словами, фазовые траектории системы не пересекаются. Исключения составляют лишь отдельные, изолированные точки фазовой плоскости. Такие точки, через которые проходит более одной фазовой траектории или не проходит ни одной траектории, называются *особыми*. Примеры особых точек будут рассмотрены ниже. Фазовый портрет (вместе с совокупностью особых точек) дает очень наглядное графическое представление о возможных движениях изучаемой динамической системы.

Фазовая траектория гармонических колебаний (например, собственных колебаний линейного осциллятора в отсутствие трения) представляет собой эллипс (или окружность при соответ-

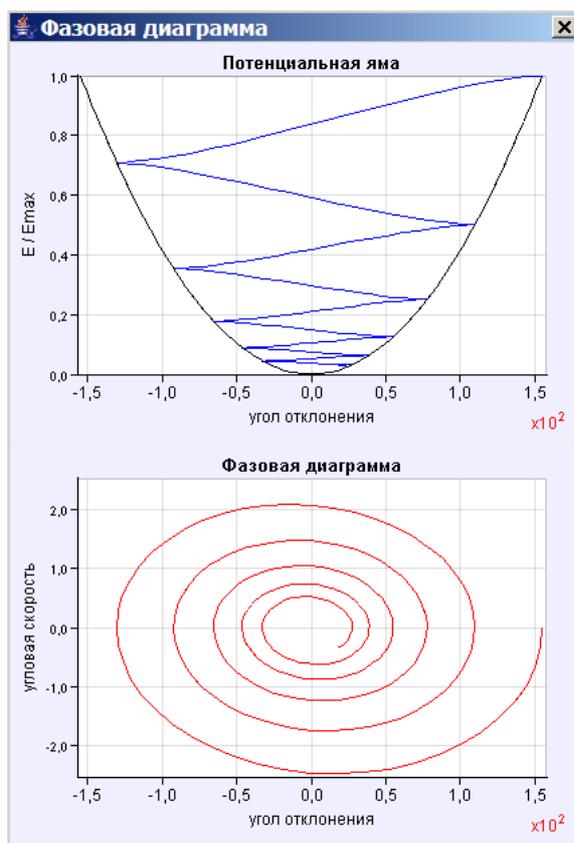


Рис. 4: Взаимное расположение фазовой плоскости и графиков потенциальной и полной энергии осциллятора на экране.

ствующем выборе масштаба). Точки, где фазовая траектория пересекает ось абсцисс (в этих точках поворота скорость изменяет знак), соответствуют максимальным отклонениям ротора из положения равновесия.

Фазовый портрет консервативного линейного осциллятора образован набором геометрически подобных эллипсов с общим центром в начале координат фазовой плоскости. Этот центр изображает состояние покоя осциллятора в положении равновесия. Так как через начало координат не проходит ни одна из фазовых траекторий (все траектории окружают эту точку), такая точка фазовой плоскости называется особой точкой типа *центр*.

Как уже отмечалось, период гармонических колебаний целиком определяется параметрами физической системы, а именно значениями жесткости пружины  $D$  и моментом инерции ротора  $J$ . В отличие от амплитуды и начальной фазы, период не зависит от начальных условий, т. е. от способа возбуждения колебаний. Это свойство линейного осциллятора называется *изохронностью*. Благодаря свойству изохронности изображающие точки обходят эллипсы разных размеров на фазовом портрете осциллятора (соответствующие разным амплитудам колебаний осцил-

лятора с данными параметрами) в течение одного и того же времени  $T_0$ .

В присутствии сравнительно слабого вязкого трения ( $\gamma < \omega_0$ ) максимальные отклонения, как и максимальные значения угловой скорости, постепенно уменьшаются с каждым последующим циклом колебаний. Поэтому фазовая траектория собственных колебаний благодаря трению трансформируется из замкнутой кривой (эллипса или окружности) для консервативного осциллятора в постепенно скручивающуюся спираль, сжимающиеся витки которой наматываются вокруг фокальной точки, расположенной в начале координат фазовой плоскости. В этом случае начало координат из особой точки типа центр превращается в особую точку типа *фокус*. Для семейства фазовых траекторий фокус представляет собой *аттрактор* (от англ. *attract* – притягивать): все фазовые траектории, независимо от того, где они начинаются, асимптотически приближаются к фокусу, совершая вокруг него бесконечное число оборотов по все более сжимающимся виткам (левая часть рис. 5).

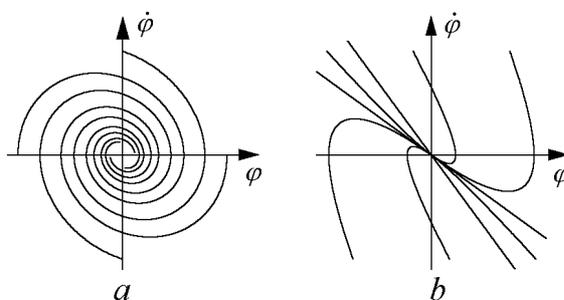


Рис. 5: Фазовый портрет затухающего линейного осциллятора (а) и системы со сверхкритическим затуханием  $\gamma > \omega_0$  (b).

В случае сравнительно сильного вязкого трения ( $\gamma > \omega_0$ ) аттрактор фазовых траекторий из фокуса превращается в особую точку типа *узел*: все фазовые траектории неколебательных движений приближаются к этому узлу напрямую без наматывания, не совершив и одного оборота. Фазовый портрет передемпфированной системы показан в правой части рис. 5. Все фазовые траектории асимптотически приближаются к началу координат, где у них общая касательная  $\dot{\varphi} = \alpha_1 \varphi$  с наклоном  $\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  (за исключением одной прямолинейной фазовой траектории  $\dot{\varphi} = \alpha_2 \varphi$ ). При специфических начальных условиях вида  $\dot{\varphi}(0) = \alpha_1 \varphi(0)$  изображающая точка движется к узлу непосредственно вдоль этой прямолинейной фазовой траектории (общей касательной всех траекторий). Другая прямолинейная фазовая траектория  $\dot{\varphi} = \alpha_2 \varphi$  соответствует движению при начальных условиях типа  $\dot{\varphi}(0) = \alpha_2 \varphi(0)$ .

Таким образом, на фазовом портрете линейного осциллятора имеется только одна особая точка: начало координат фазовой плоскости, где обе динамические переменные  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  равны нулю. Как уже отмечалось, этой точке соответствует состояние покоя в положении равновесия. При  $\gamma = 0$  это точка типа центр, через которую не проходит ни одна траектория. При  $\gamma < \omega_0$  это фокус, а при  $\gamma > \omega_0$  это узел фазовых траекторий.

Особые точки типа фокус и узел дают примеры аттракторов, к которым притягиваются все фазовые траектории. В дальнейшем, при изучении движения жесткого маятника в поле тяжести, мы встретимся с еще одним типом особых точек, возможных в нелинейных консервативных системах, а именно, с особой точкой типа *седло*, через которую проходят две фазовые траектории.

## 1.7 Превращения энергии

Полная энергия  $E$  торсионного пружинного маятника представляет собой сумму потенциальной энергии  $E_{\text{pot}}$  упруго деформированной пружины и кинетической энергии  $E_{\text{kin}}$  вращающегося маховика:

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}D\varphi^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2. \quad (15)$$

Собственные колебания в отсутствие трения характеризуются обратимыми полными превращениями энергии одного из этих видов в другой и обратно. В точках максимального отклонения от положения равновесия кинетическая энергия равна нулю, и полная энергия осциллятора представляет собой потенциальную энергию деформированной пружины. Спустя четверть периода колебаний ротор проходит через положение равновесия, где потенциальная энергия пружины равна нулю, и полная энергия осциллятора представляет собой кинетическую энергию вращающегося маховика. В течение следующей четверти периода происходит обратное превращение энергии: кинетическая энергия превращается в потенциальную энергию упругой деформации. Таким образом, два вида энергии совершают колебания в противофазе друг с другом на частоте  $2\omega_0$ , т. е. на удвоенной собственной частоте  $\omega_0$  колебаний самого осциллятора.

Описанный выше полный обмен между двумя видами энергии характерен для консервативной системы, в которой энергетические превращения обратимы. Сумма кинетической и потенциальной энергий, т. е. полная энергия  $E$  осциллятора, имеет одно и то же значение в любой момент времени, совпадающее с максимальными значениями каждого из этих видов энергии:

$$E = \frac{1}{2}DA_0^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2A_0^2. \quad (16)$$

Полная энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды его колебаний. Средние за период колебаний значения кинетической и потенциальной энергии осциллятора, совершающего собственные колебания, равны друг другу и составляют половину неизменного значения полной энергии:

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = \langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2}E = \frac{1}{4}DA_0^2 = \frac{1}{4}J\omega_0^2A_0^2. \quad (17)$$

При наличии трения взаимные превращения потенциальной и кинетической энергий становятся частично необратимыми из-за рассеяния (диссипации) механической энергии. Графики энергетических превращений при затухающих колебаниях (вместе с графиками угла отклонения и угловой скорости) показаны на рис. 6. Отметим, что диссипация энергии происходит



Рис. 6: Превращения энергии при затухающих колебаниях.

неравномерно на протяжении цикла колебаний. Скорость диссипации  $-dE/dt$  максимальна при движении ротора в окрестности положения равновесия, а именно в те моменты времени, когда максимальна величина угловой скорости маховика. В самом деле, скорость рассеяния энергии из-за вязкого трения  $-dE/dt = -N_{\text{тр}}\dot{\varphi}$ , где  $N_{\text{тр}} \sim \dot{\varphi}$ , пропорциональна квадрату угловой скорости и тем самым мгновенному значению кинетической энергии  $J\dot{\varphi}^2/2$  маховика. Вблизи точек поворота, когда маховик изменяет направление вращения и его угловая скорость обращается в нуль, диссипации энергии не происходит. Утверждение об экспоненциальном характере убывания энергии затухающего осциллятора, которое часто встречается в учебниках, на самом деле справедливо не для мгновенного, а только для усредненного по периоду колебаний значения полной энергии осциллятора:

$$\langle E(t) \rangle = E_0 \exp(-2\gamma t) = E_0 \exp(-2t/\tau). \quad (18)$$

Из (18) видно, что время затухания средней энергии осциллятора (время, в течение которого среднее за период значение полной энергии убывает в  $e \approx 2.72$  раза) равно  $\tau/2$ , т. е. вдвое меньше времени затухания амплитуды колебаний.

Отмеченную неравномерность рассеяния полной энергии на протяжении цикла колебаний легко проследить по графикам на рис. 6, где вместе с графиками потенциальной, кинетической и полной энергий показаны также (в том же временном масштабе) графики угла отклонения и угловой скорости.

## 1.8 Электромагнитный аналог линейного механического осциллятора

Колебания заряда  $q$  на пластинах конденсатора в электрическом контуре, состоящем из последовательно соединенных конденсатора  $C$ , катушки индуктивности  $L$  и резистора  $R$  (см. рис. 1, стр. 3), описываются таким же дифференциальным уравнением (4), что и колебания угла отклонения  $\varphi$  механического торсионного осциллятора. В самом деле, алгебраическая сумма напряжений  $U_C$ ,  $U_L$ , и  $U_R$  на отдельных элементах такой замкнутой последовательной электрической цепи квазистационарного тока (т. е. цепи, во всех элементах которой ток в данный момент одинаков) должна быть равна нулю для любого момента времени:

$$U_L + U_R + U_C = 0. \quad (19)$$

Подставляя в (19)  $U_C = q/C$ ,  $U_L = LdI/dt = L\dot{q}$  и  $U_R = IR = R\dot{q}$ , получаем дифференциальное уравнение второго порядка для заряда на пластинах конденсатора  $q(t)$ :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0. \quad (20)$$

Вводя обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\gamma = \frac{R}{L}, \quad (21)$$

перепишем это уравнение в виде

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (22)$$

что совпадает с уравнением (4 для угла отклонения  $\varphi(t)$  ротора механического осциллятора. Таким образом, собственные электромагнитные колебания в последовательном  $LCR$ -контуре и колебания механического пружинного осциллятора, несмотря на совершенно разную физическую природу происходящих процессов, подчиняются одинаковым закономерностям. В колебательном контуре катушка индуктивности  $L$  служит аналогом инертного элемента (маховика) механической системы, а конденсатор  $C$  — аналогом упругого элемента (спиральной пружины). Роль вязкого трения играет сопротивление резистора  $R$  электрическому току.

Аналогия между механической и электромагнитной системами распространяется и на происходящие в них энергетические превращения. Энергия электрического поля  $E_C = q^2/2C$  в конденсаторе колебательного контура полностью аналогична потенциальной энергии  $E_{\text{pot}} = D\varphi^2/2$  деформированной пружины. Энергия магнитного поля катушки  $E_L = LI^2/2$  при протекании в ней электрического тока полностью аналогична кинетической энергии  $E_{\text{kin}}$  вращающегося маховика. При электромагнитных колебаниях в контуре происходят взаимные превращения энергии электрического поля в конденсаторе и энергии магнитного поля в катушке. В отсутствие сопротивления (при  $R = 0$ ) полная энергия  $E_C + E_L$  остается неизменной. При наличии электрического сопротивления превращения энергии из одного вида в другой частично необратимы: рассеяние энергии в резисторе (выделение джоулевой теплоты  $I^2R = R\dot{q}^2$ ) приводит к экспоненциальному затуханию электромагнитных колебаний в контуре подобно тому, как вязкое трение в механическом осцилляторе приводит к затуханию собственных механических колебаний.

## 1.9 О компьютерном моделировании колебаний линейного осциллятора

Компьютерная программа, моделирующая поведение линейного осциллятора, выполняет *численное интегрирование* дифференциального уравнения (4). Несмотря на то, что это уравнение линейное и имеет аналитическое решение (5), при компьютерном моделировании это решение не используется (за исключением лишь определения максимальных значений угла отклонения и угловой скорости, необходимых для выбора оптимальных масштабов перед построением графиков). Совпадение наблюдаемых результатов численного интегрирования с аналитическими предсказаниями может служить для проверки качества используемого алгоритма (метод Рунге-Кутты четвертого порядка). Такая проверка делает убедительными результаты численного моделирования нелинейных систем (для которых не существует аналитического решения), если и там использован тот же самый численный метод.

При численном моделировании колебаний линейного осциллятора выбирается естественная для него единица времени, а именно период собственных колебаний в отсутствие трения  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Поэтому в данной модели нет необходимости задавать ни момент инерции маховика  $J$ , ни жесткость пружины  $D$ , ни даже их отношение  $D/J = \omega_0^2$ . Таким образом, в принятой модели осциллятор полностью характеризуется единственным физическим параметром  $\gamma/\omega_0$  — безразмерным отношением коэффициента затухания к собственной частоте, или, как это сделано в программе, более распространенной эквивалентной характеристикой — добротностью  $Q = \omega_0/2\gamma$ , значение которой обратно пропорционально коэффициенту затухания.

Угол  $\varphi$  отклонения ротора от положения равновесия при численном моделировании измеряется в радианах (но шкала и графики  $\varphi(t)$  для удобства проградуированы в угловых градусах), а угловая скорость  $\dot{\varphi}$  ротора измеряется в единицах собственной круговой частоты  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ . При задании начальных условий угловую скорость ротора нужно также выражать в единицах  $\omega_0$  (а начальный угол отклонения — в градусах).

## 2 Контрольные вопросы и задачи

### 2.1 Колебания в отсутствие трения

**1.1 Начальные условия и форма графиков.** В отсутствие трения линейный осциллятор совершает незатухающее гармоническое колебание, характеризуемое чисто синусоидальной зависимостью обобщенной координаты (угла отклонения) и обобщенной скорости (угловой скорости) от времени.

(а) Какой тип начальных условий приводит к чисто косинусоидальной зависимости угла отклонения от времени (т. е. к зависимости, выражаемой функцией  $\varphi_0 \cos \omega_0 t$ )?

(б) Допустим, что нужно получить колебания с угловой амплитудой  $90^\circ$ . Каким должно быть начальное отклонение  $\varphi(0) = \varphi_0$  при нулевой начальной скорости ротора  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ? Какую начальную угловую скорость  $\dot{\varphi}(0) = \Omega$  нужно сообщить ротору в положении равновесия, чтобы получить колебания той же амплитуды  $90^\circ$ ? Напоминаем, что начальную угловую скорость  $\Omega$  при

вводе нужно выражать в единицах собственной частоты  $\omega_0$ . Проверьте Ваш расчет с помощью моделирующего эксперимента на компьютере.

(в) Какую начальную угловую скорость  $\dot{\varphi}(0) = \Omega$  нужно сообщить ротору, отклоненному на угол  $45^\circ$  из положения равновесия, чтобы получить колебания той же амплитуды  $90^\circ$ ?

**1.2 Максимальное отклонение и сохранение энергии.** Предположим, что осциллятор возбуждается из положения равновесия начальным толчком, который сообщает ротору угловую скорость  $\Omega = 2\omega_0$ . С помощью закона сохранения энергии рассчитайте максимальный угол, на который отклонится ротор из положения равновесия. Результат расчета проверьте в моделирующем эксперименте на компьютере. Обратите внимание на то, что компьютерная программа выполняет численное интегрирование дифференциального уравнения движения, «ничего не зная» о законе сохранения энергии.

**1.3 Фазовая траектория и начальные условия.** Сопоставьте движение изображающей точки вдоль фазовой траектории консервативного осциллятора с графиками зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости. Для этого одновременно откройте окна «Фазовая траектория» и «Графики от времени».

(а) Как изменится фазовая траектория, если изменить начальные условия? Зависит ли направление движения изображающей точки по фазовой траектории от начальных условий?

(б) Возможно ли, чтобы фазовые траектории для разных начальных условий оказались совпадающими? Если да, то каким требованиям должны удовлетворять начальные условия для такого совпадения фазовых траекторий?

**1.4 Эллиптическая и круговая формы фазовой траектории линейного осциллятора.**

(а) Докажите аналитически, что фазовая траектория консервативного линейного осциллятора представляет собой эллипс с центром в начале координат фазовой плоскости. Воспользуйтесь общим решением дифференциального уравнения (2), выражаемым соотношением (3). Чему равны полуоси этого эллипса?

(б) Покажите, что эллиптическая форма фазовой траектории линейного консервативного осциллятора непосредственно следует из закона сохранения энергии.

(в) При каком масштабе по оси ординат фазовой плоскости (по оси угловой скорости) фазовая траектория будет окружностью? С какой угловой скоростью движется изображающая точка по этой окружности при колебаниях осциллятора? Зависит ли угловая скорость точки от энергии осциллятора?

**1.5 Фазовая траектория и энергетические превращения.** Сопоставьте движение изображающей точки по фазовой траектории с графиком зависимости потенциальной энергии от угла отклонения ротора. Для этого откройте окно компьютерной программы «Фазовая траектория» (см. рис. 4). Особое внимание обратите на положение точек максимального отклонения в параболической потенциальной яме и на фазовой плоскости. Почему в этих точках полная энергия осциллятора совпадает с потенциальной энергией пружины? Чему равны значения потенциальной и кинетической энергий в точках поворота и в положении равновесия при колебаниях, возбуждаемых начальными условиями  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = \Omega$ ? Чему равны значения угла отклонения

$\varphi_{\max}$  в точках поворота?

**1.6 Форма и частота колебаний кинетической и потенциальной энергий.** Изучите графики зависимости от времени кинетической и потенциальной энергий осциллятора, совершающего колебания в отсутствие трения.

(а) Что можно сказать о максимальных и средних значениях каждого из видов энергии? Сопоставьте эти графики с графиками угла отклонения и угловой скорости. Для этого одновременно откройте окна «Энергия от времени» и «Графики от времени».

(б) С какой частотой и в каких пределах происходят колебания каждого из видов энергии?

## 2.2 Затухающие собственные колебания

**2.1 Последовательность максимальных отклонений.** При действии слабой силы вязкого трения последовательность максимальных отклонений осциллятора, совершающего затухающие собственные колебания, образует убывающую геометрическую прогрессию: каждое максимальное отклонение равно предыдущему, умноженному на одно и то же число, меньшее единицы:  $\exp(-\gamma T_0) \approx 1 - \gamma T_0$  [см. (10)].

(а) Рассчитайте значение добротности осциллятора, при котором амплитуда колебаний уменьшается вдвое через каждые два цикла колебаний. Введите это значение и проверьте закономерность убывания максимальных отклонений в моделирующем эксперименте. Зависит ли эта закономерность от способа возбуждения собственных колебаний (т. е. от начальных условий)?

(б) Оцените, на сколько процентов увеличивается период колебаний при этом значении добротности (по сравнению с периодом  $T_0$  в отсутствие трения). Можно ли заметить такое увеличение периода колебаний в моделирующем эксперименте? Метки времени на графиках соответствуют целому числу периодов  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  в отсутствие трения.

**2.2\* Максимальное отклонение после возбуждения начальным толчком.** Представьте, что колебания осциллятора возбуждаются начальным толчком, в результате которого маховик в положении равновесия получает угловую скорость  $2\omega_0$ .

(а) Рассчитайте первое максимальное отклонение маховика, если добротность осциллятора  $Q = 5$ .

(б) Каким будет следующее максимальное отклонение в противоположную сторону? Проверьте свои ответы в моделирующем эксперименте на компьютере.

**2.3\*\* Сложные начальные условия.** Пусть колебания осциллятора возбуждаются сообщением ротору некоторой начальной скорости в отклоненном из равновесия положении.

(а) Допустим, что начальное отклонение ротора составляет 155 градусов, а начальная угловая скорость равна  $2\omega_0$ . Добротность осциллятора  $Q = 5$ . Рассчитайте максимальное отклонение маховика из положения равновесия при колебаниях.

(б) Рассчитайте максимальное отклонение маховика из положения равновесия для осциллятора с  $Q = 5$  при том же начальном отклонении в 155 градусов, но при начальной скорости  $-2\omega_0$ .

(в) Пусть начальное отклонение ротора из положения равновесия составляет  $-155$  градусов. Какой должна быть начальная скорость, чтобы ротор отклонился от положения равновесия на такой же угол  $155$  градусов в противоположную сторону? Добротность осциллятора  $Q = 20$ .

**2.4\* Фазовая траектория затухающих колебаний.** Фазовая траектория затухающих собственных колебаний при  $Q > 0.5$  представляет собой спираль, которая образована бесконечным числом постепенно сжимающихся витков вокруг фокуса, расположенного в начале координат фазовой плоскости. Этот фокус соответствует состоянию покоя в положении равновесия, к которому осциллятор асимптотически приближается.

(а) По какому закону уменьшается радиус этих витков по мере того, как фазовая траектория приближается к фокусу?

(б) Изменяется ли промежуток времени, в течение которого изображающая точка совершает один оборот вдоль очередного витка спирали, по мере уменьшения размера витков?

**2.5\* Рассеяние механической энергии.** Сравните преобразования кинетической энергии в потенциальную и обратно для случаев незатухающих колебаний в отсутствие трения и колебаний, затухающих под действием вязкого трения.

(а) При каком значении добротности осциллятора полная энергия уменьшается вдвое за два полных колебания? Сколько циклов колебаний должен совершить такой осциллятор, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась вдвое? Проверьте ваши теоретические предсказания в моделирующем эксперименте.

(б) Почему рассеяние механической энергии на протяжении одного цикла колебаний происходит неравномерно? В какие моменты скорость диссипации энергии максимальна? В какие моменты эта скорость минимальна?

## 2.3 Неколебательное движение осциллятора

При достаточно сильном вязком трении ( $Q \leq 0.5$ ) ротор осциллятора после начального возбуждения возвращается в положение равновесия без колебаний. В моделирующем эксперименте мы можем наблюдать, как в таких условиях стрелка асимптотически приближается с одной стороны к нулевому делению шкалы.

**3.1\* Неколебательное движение при критическом затухании.** Исследуйте теоретически и экспериментально случай критического затухания, когда  $\gamma = \omega_0$ .

(а) Почему именно критическое затухание предпочтительно для измерительных приборов типа гальванометра с подвижной катушкой? Почему такие же требования предъявляются к системе упругой подвески кузова автомобиля?

(б) Рассчитайте максимальный угол отклонения из равновесия, если система с  $Q = 0.5$  получает в положении равновесия начальную скорость  $\Omega = 5\omega_0$ .

(в) Сколько времени продолжается движение стрелки до этой точки максимального отклонения? Проверьте свои результаты в моделирующем эксперименте на компьютере. Обратите внимание, что стрелка приближается к положению равновесия с одной стороны, не пересекая средней точки шкалы.

### 3.2 Критическое затухание.

(а) Проверьте экспериментально, что значение  $Q = 0.5$  ( $\gamma = \omega_0$ ) действительно соответствует критическому затуханию. Чтобы убедиться в этом, покажите, что при немного большем значении  $Q$  (скажем, при  $Q = 0.51$ ) стрелка возмущенного осциллятора действительно совершает сильно затухающие колебания с пересечением нулевого деления шкалы. Если ротор осциллятора с  $Q = 0.51$  был отклонен из равновесия и отпущен без начальной скорости, то сколько времени пройдет пока он пересечет нулевое деление и начнет движение в обратную сторону (к положению равновесия)?

(б) Для осциллятора с критическим затуханием  $Q = 0.5$  выразите константы  $C_1$  и  $C_2$  в общем решении  $\varphi(t) = (C_1 t + C_2) \exp(-\gamma t)$  дифференциального уравнения (4) через значения начального отклонения  $\varphi(0) = \varphi_0$  и начальной скорости  $\dot{\varphi}(0) = \Omega_0$ .

(в) Возможно ли, чтобы движение системы с критическим затуханием происходило после первоначального возбуждения по чисто экспоненциальному закону? Если да, то какие начальные условия порождают такое движение? Какой вид имеет фазовая траектория такого движения? Проверьте свои ответы в эксперименте на компьютере.

(г) При каких начальных условиях ротор системы с критическим затуханием пересечет положение равновесия после первоначального возбуждения? Какой должна быть начальная угловая скорость ротора  $\Omega$  при заданном начальном отклонении  $\varphi_0$  для того, чтобы ротор пересек положение равновесия через промежуток времени  $t = 3T_0$  после возбуждения (где  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  — период собственных колебаний в отсутствие трения)? Возможно ли повторное пересечение стрелкой нулевого деления шкалы?

### 3.3\* Движение при сверхкритическом затухании.

(а) Выразите значения констант  $C_1$  и  $C_2$  в общем решении (14) дифференциального уравнения для передемпфированной системы через произвольные значения начального отклонения  $\varphi(0) = \varphi_0$  и начальной угловой скорости  $\dot{\varphi}(0) = \Omega_0$ .

(б) При каких начальных условиях последующее движение системы со сверхкритическим затуханием будет происходить по моноэкспоненциальному закону, т. е. будет характеризоваться единственной постоянной времени? Какие фазовые траектории соответствуют таким движениям?

(в) Объясните, почему при произвольных начальных условиях неколебательное движение маховика к положению равновесия происходит вообще говоря медленнее и требует большего времени, чем в случае критического затухания (для системы с тем же значением  $\omega_0$ ). Возможно ли, чтобы передемпфированная система пришла в состояние покоя в положении равновесия за меньшее время, чем система с критическим затуханием (при том же значении  $\omega_0$ )? Если да, то при каких условиях возбуждения это произойдет?

(г) В чем заключается принципиальное отличие фазовых траекторий, соответствующих неколебательному движению, от фазовых траекторий затухающих колебаний?

(д) Возможно ли, чтобы ротор передемпфированной системы ( $\gamma > \omega_0$ ) пересек положение равновесия после первоначального возбуждения? Если да, то при каких начальных условиях это произойдет? Возможно ли повторное пересечение положения равновесия?

## 2.4 Приложение. Сводка основных формул

Дифференциальное уравнение движения линейного осциллятора:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0.$$

Частота и период собственных колебаний в отсутствие трения (при  $\gamma \ll \omega_0$ ):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Выражения для коэффициентов дифференциального уравнения через параметры электромагнитного колебательного контура:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}, \quad 2\gamma = \frac{R}{L}.$$

Решение, описывающее колебательное движение (справедливо при  $\gamma < \omega_0$ ):

$$\varphi(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \delta_0),$$

где постоянные  $A_0$  и  $\delta_0$  находятся из начальных условий  $\varphi(0)$ ,  $\dot{\varphi}(0)$ . Частота  $\omega_1$  затухающих колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0 - \gamma^2/(2\omega_0).$$

Эквивалентная форма общего решения:

$$\varphi(t) = e^{-\gamma t} (C \cos \omega_1 t + S \sin \omega_1 t),$$

где постоянные  $C$  и  $S$  находятся из начальных условий. Они связаны с  $A_0$  и  $\delta_0$  соотношениями:

$$A = \sqrt{C^2 + S^2}, \quad \tan \delta_0 = -S/C.$$

В случае слабого затухания ( $\gamma \ll \omega_0$ )

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \gamma^2/(2\omega_0).$$

Время жизни колебаний (в течение которого амплитуда уменьшается в  $e \approx 2.72$  раза):

$$\tau = 1/\gamma.$$

Неколебательное движение, происходящее при критическом затухании  $\gamma = \omega_0$ :

$$\varphi(t) = (C_1 t + C_2) e^{-\gamma t}.$$

Добротность  $Q$  осциллятора:

$$Q = \pi \frac{\tau}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$

Число колебаний, на протяжении которых амплитуда уменьшается вдвое:

$$N_{1/2} = \frac{\ln 2}{\pi} Q = 0.22 Q = \frac{Q}{4.53}.$$

Полная механическая энергия осциллятора складывается из потенциальной энергии упруго деформированной пружины и кинетической энергии вращающегося маховика:

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} D \varphi^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2.$$

Средние за период колебаний значения потенциальной и кинетической энергий равны друг другу. Каждое из этих средних значений составляет половину полной энергии:

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = \langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2} E = \frac{1}{4} D A_0^2 = \frac{1}{4} J \omega_0^2 A_0^2.$$