

Осциллятор с сухим и вязким трением

Учебное пособие

Бутиков Е. И.

Аннотация. В данном учебном пособии приведено описание моделируемой физической системы и приведены теоретические сведения, необходимые студентам для подготовки к лабораторной работе «Осциллятор с сухим и вязким трением».

Вторую часть пособия составляют контрольные вопросы, теоретические и экспериментальные задачи для самостоятельной работы, а также материал для возможных индивидуальных заданий студентам (по указанию преподавателя).

Содержание

1	Теоретические сведения	2
1.1	Модель физической системы	2
1.2	Дифференциальное уравнение осциллятора	4
2	Затухание колебаний под действием сухого трения	5
2.1	Фазовая траектория	7
2.2	Превращения энергии при колебаниях	8
2.3	Роль вязкого трения	9
3	Контрольные вопросы и задачи	11
3.1	Затухание колебаний под действием сухого трения	11
3.2	Влияние вязкого трения	13
3.3	Приложение. Сводка основных формул	14

1 Теоретические сведения

Данная моделирующая программа предназначена для изучения собственных колебаний торсионного пружинного осциллятора, затухающих под действием сухого (кулоновского) трения. Идеализированная математическая модель сухого трения основана на так называемой z -характеристике, согласно которой сила трения скольжения предполагается не зависящей от скорости и равной предельному значению силы трения покоя. Моделируемая здесь физическая система позволяет понять происхождение случайных ошибок некоторых стрелочных измерительных приборов типа гальванометра с подвижной катушкой.

1.1 Модель физической системы

Подвижная часть торсионного пружинного осциллятора представляет собой уравновешенный маховик (ротор), центр масс которого расположен на оси вращения. При повороте маховика происходит закручивание прикрепленной к нему спиральной пружины, другой конец которой закреплен неподвижно. В результате на маховик со стороны пружины действует возвращающий момент сил, пропорциональный углу закручивания, т. е. углу отклонения маховика от положения равновесия.

Динамика поведения такой системы при действии сил вязкого трения, момент которых пропорционален угловой скорости, рассматривается в учебном пособии «Собственные колебания линейного осциллятора» (лабораторная работа 1 цикла «Физика колебаний»). С приведенным там материалом следует ознакомиться перед выполнением данной работы.

В случае вязкого трения собственные колебания пружинного маятника описываются *линейным* дифференциальным уравнением. Амплитуда таких колебаний убывает со временем экспоненциально, так что отношение соседних максимальных отклонений ротора постоянно, и вся их последовательность представляет собой убывающую геометрическую прогрессию.

В рамках такой модели затухание собственных колебаний формально продолжается бесконечно долго, а их амплитуда асимптотически приближается к нулю. Длительность процесса экспоненциального затухания принято характеризовать постоянной затухания (показателем затухания) γ или обратной величиной $\tau = 1/\gamma$, называемой временем затухания. Эта условная длительность затухающих колебаний представляет собой промежуток времени, на протяжении которого амплитуда колебаний уменьшается на множитель $e \approx 2.72$.

Экспоненциальный характер затухания колебаний под действием вязкого трения обусловлен тем, что сила трения пропорциональна скорости. Любая другая зависимость силы трения от скорости порождает затухание колебаний с иной зависимостью амплитуды от времени.

Случай сухого (или кулоновского) трения интересен с точки зрения практических приложений. При сухом трении, пока система находится в движении, величина силы трения почти постоянна, а ее направление противоположно скорости. Упрощенная идеализированная характеристика сухого трения (называемая z -характеристикой) показана на рис. 1. В соответствии с этой характеристикой при движении сила трения постоянна по модулю (не зависит от скорости), но

ее направление изменяется всякий раз при изменении направления скорости. Когда система покоится, момент силы статического трения может принимать любое значение от $-N_{\max}$ до N_{\max} . Действительная величина момента силы трения покоя зависит от других приложенных сил, которые должны быть уравновешены трением для того, чтобы сохранялось состояние покоя. Величина момента силы трения скольжения принимается в этой модели равной максимально возможной величине момента силы трения покоя N_{\max} .

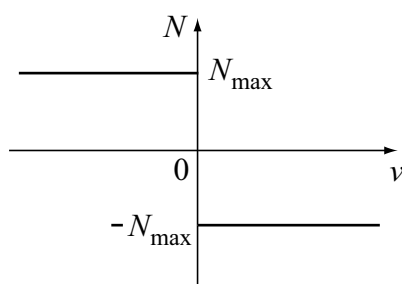


Рис. 1: Идеализированная зависимость момента силы сухого трения от скорости вращения ротора (z -характеристика).

В реальных системах сухое трение характеризуется более сложной зависимостью силы трения от скорости. Предельная (максимальная) величина силы трения покоя обычно несколько больше силы трения скольжения. Когда скорость начинает возрастать от нулевого значения, сила трения скольжения сначала несколько уменьшается, достигает минимума при некоторой скорости, а затем постепенно увеличивается по мере дальнейшего роста скорости. В идеализированной z -характеристике сухого трения эти особенности игнорируются. Тем не менее, принятая идеализация позволяет объяснить многие существенные особенности вызванного сухим трением процесса затухания колебаний в реальных физических системах.

Из-за того, что момент силы трения покоя может принимать любые значения вплоть до N_{\max} , по обе стороны от положения равновесия (в этом положении спиральная пружина не деформирована) имеется интервал углов отклонения, в пределах которого трение покоя в состоянии уравновесить силу натяжения деформированной пружины. Этот интервал называют *зоной застоя* или *мертвой зоной*. В любой точке мертвой зоны ротор осциллятора может находиться в покое в состоянии безразличного равновесия, в противоположность случаю вязкого трения, когда имеется только одно положение равновесия, в котором пружина не деформирована. Если угловая скорость ротора обращается в нуль где-либо в пределах зоны застоя, ротор останавливается и в дальнейшем покоится в этом положении.

Зона застоя простирается на одинаковые расстояния в обе стороны от точки, в которой пружина не деформирована. Чем сильнее трение покоя в рассматриваемой системе, тем шире мертвая зона. Ее границы определяются максимальным значением момента силы трения покоя N_{\max} .

Важная отличительная черта затухания колебаний под действием силы сухого трения заключается в том, что движение полностью прекращается после *конечного числа циклов*. Пока ос-

циллятор совершает колебания, знак скорости периодически изменяется, и каждое очередное изменение направления скорости происходит при все меньшем отклонении от средней точки зоны застоя. В конце концов точка поворота оказывается внутри зоны застоя, где трение покоя в состоянии уравновесить возвращающую силу пружины. В этот момент движение полностью прекращается. В какой именно точке произойдет остановка, зависит от начальных условий, которые могут меняться от случая к случаю.

Эти особенности присущи различным механическим системам с сухим трением. В частности, сухое трение может присутствовать в стрелочных измерительных приборах, таких как гальванометры с подвижной катушкой. В типичном гальванометре легкая проволочная катушка помещена в магнитное поле между полюсами постоянного магнита и может поворачиваться вокруг оси, закрепленной в подшипниках. При прохождении измеряемого тока катушка поворачивается и закручивает спиральную пружину. Если со стороны подшипников на катушку действует момент сил сухого трения, стрелка прибора может остановиться в любой точке зоны застоя, окружающей с двух сторон деление шкалы, соответствующее измеряемой величине. Этим объясняется возникновение случайных ошибок, неизбежно сопутствующих измерениям, выполняемым при помощи стрелочных приборов. Чем сильнее сухое трение, тем больше погрешности измерений.

1.2 Дифференциальное уравнение осциллятора

На вращающийся ротор торсионного пружинного осциллятора действуют одновременно возвращающий момент $-D\varphi$ упругой силы закрученной пружины и момент $N_{\text{тр}}$ силы трения скольжения. Дифференциальное уравнение вращения ротора с моментом инерции J имеет следующий вид:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi + N_{\text{тр}}. \quad (1)$$

В соответствии с принятой идеализированной z -характеристикой сухого трения, момент силы трения скольжения $N_{\text{тр}}$ направлен противоположно угловой скорости ротора $\dot{\varphi}$, и остается постоянным до тех пор пока продолжается вращение ротора в одном направлении. Однако момент сил трения может принимать любое значение из интервала от $-N_{\text{max}}$ до N_{max} , если скорость ротора равна нулю:

$$N_{\text{тр}}(\dot{\varphi}) = \begin{cases} -N_{\text{max}} & \text{для } \dot{\varphi} > 0, \\ N_{\text{max}} & \text{для } \dot{\varphi} < 0, \end{cases} \quad (2)$$

или $N_{\text{тр}} = -N_{\text{max}} \text{sign}(\dot{\varphi})$. Здесь N_{max} — предельное (максимальное) значение момента сил сухого трения. Удобно выразить N_{max} через максимальный угол отклонения маховика φ_m , при котором он еще может находиться в состоянии покоя:

$$N_{\text{max}} = D\varphi_m. \quad (3)$$

Очевидно, что угол φ_m соответствует границе зоны застоя.

Дифференциальное уравнение (1), описывающее осциллятор с сухим трением, вообще говоря *нелинейно*, потому что момент силы сухого трения $N_{\text{тр}}(\dot{\varphi})$ изменяется (скачкообразно) в те моменты, когда изменяется знак угловой скорости ротора $\dot{\varphi}$, т. е. когда изменяется направление его вращения. Поэтому мы должны рассматривать по сути дела два линейных уравнения вместо одного:

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi + \varphi_m) \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} > 0, \quad (4)$$

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi - \varphi_m) \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} < 0. \quad (5)$$

Нелинейный характер задачи проявляется здесь в том, что мы должны переходить от одного из линейных уравнений (4)–(5) к другому всякий раз, когда изменяется направление вращения ротора.

Решение уравнений (4)–(5), соответствующее данным начальным условиям, можно найти методом поэтапного интегрирования каждого из линейных уравнений на интервале времени, соответствующем полупериоду колебаний, пока направление вращения ротора остается неизменным. Затем эти решения соединяются вместе («сшиваются») в моменты перехода от одного уравнения к другому таким образом, что угол отклонения и угловая скорость в конце очередного полупериода выполняют роль начальных условий для следующего полупериода колебаний ротора. Такая последовательность решений продолжается до тех пор, пока угол отклонения в конце очередного полупериода не оказывается в пределах мертвой зоны.

Если наряду с сухим трением осциллятор подвержен также действию вязкого трения, в уравнения (4)–(5) нужно добавить член, пропорциональный угловой скорости ротора $\dot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2(\varphi + \varphi_m) - 2\gamma\dot{\varphi} \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} > 0, \quad (6)$$

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2(\varphi - \varphi_m) - 2\gamma\dot{\varphi} \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} < 0. \quad (7)$$

Здесь $\omega_0^2 = D/J$ — квадрат частоты собственных колебаний осциллятора в отсутствие трения, γ — постоянная затухания. Как отмечалось в главе 1, для характеристики вязкого трения удобно вместо γ использовать безразмерную величину — добротность $Q = \omega_0/2\gamma$.

2 Затухание колебаний под действием сухого трения

Чтобы выявить основные особенности затухания колебаний, вызванного сухим трением, будем сначала предполагать, что вязкое трение полностью отсутствует ($\gamma = 0$).

Пусть в начальный момент $t = 0$ ротор повернут вправо (по часовой стрелке) от положения равновесия, так что $\varphi(0) > 0$. Если это начальное отклонение выходит за границу зоны застоя, т. е. $\varphi(0) > \varphi_m$, ротор, будучи освобожденным без толчка, т. е. с нулевой начальной скоростью, начнет двигаться влево ($\dot{\varphi} < 0$), и его движение будет описываться уравнением (5). Решение уравнения (5) представляет собой простое гармоническое колебание с частотой ω_0 . Среднее положение, около которого происходят эти колебания, совпадает с правой границей зоны застоя

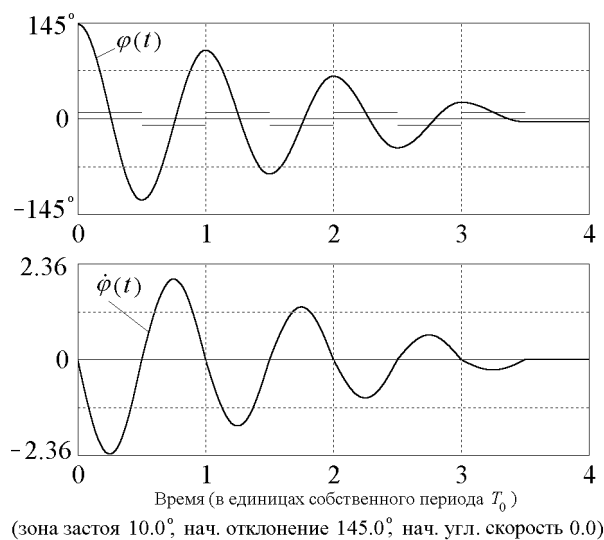


Рис. 2: Графики колебаний, затухающих под действием сухого трения.

φ_m . Это смещение среднего положения колебаний ротора вызвано постоянным моментом силы сухого трения, который действует на ротор вправо (по часовой стрелке), пока он движется влево. При данных начальных условиях ($\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$) амплитуда колебания около средней точки φ_m равна $\varphi_0 - \varphi_m$. Первый отрезок графика таких колебаний на рис. 2 представляет собой часть синусоиды со средней точкой, смещенной вверх от оси абсцисс на расстояние φ_m . Крайнее отклонение ротора влево в конце первого полупериода колебаний равно $\varphi(0) - 2\varphi_m$.

Когда ротор достигает этого положения, его угловая скорость обращается в нуль. Затем он начинает двигаться вправо. Поскольку при этом его угловая скорость $\dot{\varphi}$ положительна, мы должны перейти к уравнению (4). Значения φ и $\dot{\varphi}$ в конце предыдущего полупериода служат начальными условиями для дальнейшего движения. Это движение опять представляет собой половину цикла гармонического колебания той же самой частоты ω_0 , но средняя точка колебаний теперь смещена к левой границе зоны застоя $-\varphi_m$. Амплитуда соответствующего сегмента синусоиды равна $\varphi_0 - 3\varphi_m$.

Продолжая дальше такой анализ движения, мы заключаем, что в последующие полупериоды ротор совершает гармонические колебания около средних точек, поочередно смещенных к границам мертвой зоны φ_m и $-\varphi_m$. Каждому полупериоду соответствует одна и та же частота ω_0 (частота собственных колебаний в отсутствие трения). Поэтому длительность каждого цикла затухающих колебаний равна периоду $T_0 = 2\pi/\omega_0$ собственных колебаний осциллятора в отсутствие трения. Сшивание синусоидальных сегментов, средние точки которых поочередно смещены к правой и левой границам мертвой зоны, дает всю кривую процесса затухания колебаний под действием сухого трения, показанную на рис. 2. После каждого полного цикла таких колебаний максимальное отклонение ротора уменьшается на одну и ту же величину, равную удвоенной

ширине зон застоя (т. е. на величину $4\varphi_m$). Колебания продолжаются до тех пор, пока конечная точка очередного сегмента синусоиды не окажется внутри зоны застоя $(-\varphi_m, \varphi_m)$.

Таким образом, в случае затухания под действием сухого трения максимальные отклонения ротора убывают по линейному закону. Последовательность максимальных отклонений образует убывающую арифметическую прогрессию и колебания полностью прекращаются через конечное число циклов, в противоположность случаю вязкого трения, когда максимальные отклонения убывают в геометрической прогрессии (экспоненциально) и формально движение продолжается бесконечно долго.

2.1 Фазовая траектория

Общие закономерности затухания колебаний под действием сухого трения отчетливо отражает фазовая траектория на рис. 3. В начальный момент ротор имеет нулевую скорость ($\dot{\varphi}(0) = 0$) и отклонен вправо за пределы зоны застоя ($\varphi(0) = \varphi_0 > \varphi_m$). Это начальное состояние представлено крайней правой точкой на оси абсцисс (оси φ). Начальный участок фазовой траектории, лежащий ниже горизонтальной оси, соответствует движению ротора в течение первого полуцикла колебаний, пока ротор поворачивается влево. Эта кривая представляет собой нижнюю половину эллипса (или окружности, если масштабы выбраны соответствующим образом). Центр эллипса находится на оси абсцисс в точке φ_m , которая соответствует правой границе зоны застоя.

Вторая половина цикла колебаний, на протяжении которой ротор поворачивается вправо и его угловая скорость положительна, представлена половиной эллипса, расположенной над осью абсцисс. Центр этого полуэллипса находится в точке $-\varphi_m$ оси φ . Вся фазовая траектория образована такими полуэллипсами постепенно уменьшающихся размеров, центры которых поочередно расположены в точках φ_m и $-\varphi_m$ оси абсцисс. Горизонтальный диаметр очередного полуэллипса на $2\varphi_m$ меньше, чем у предыдущего. Фазовая траектория обрывается на оси φ в первой же точке, где скорость обращается в нуль в пределах мертвой зоны (между точками φ_m и $-\varphi_m$).

Интересно сравнить эту фазовую траекторию со случаем затухания колебаний под действием вязкого трения. При вязком трении кривая скручивается в спираль вокруг начала координат фазовой плоскости. Фазовая траектория асимптотически приближается к этому фокусу и состоит из бесконечного числа постепенно сближающихся, все более тесных витков уменьшающегося размера. В случае сухого трения фазовая кривая образована конечным числом эквидистантных витков: она заканчивается (обрывается), как только достигает оси абсцисс в пределах отрезка $(-\varphi_m, \varphi_m)$, соответствующего мертвой зоне.

Если наряду с сухим трением осциллятор подвержен действию сравнительно небольшого вязкого трения ($\gamma < \omega_0$), полуэллипсы фазовой траектории превращаются в отрезки слабо скручивающихся спиралей, соответствующих собственным затухающим колебаниям осциллятора с положением равновесия, поочередно смещенным к правой и левой границам зоны застоя. Витки фазовой траектории перестают быть эквидистантными. Но тем не менее скручивание фазовой траектории не продолжается до бесконечности: в этом случае она также обрывается после конечного числа оборотов вокруг начала координат, как только встречается с отрезком $(-\varphi_m, \varphi_m)$ оси абсцисс, соответствующим мертвой зоне.

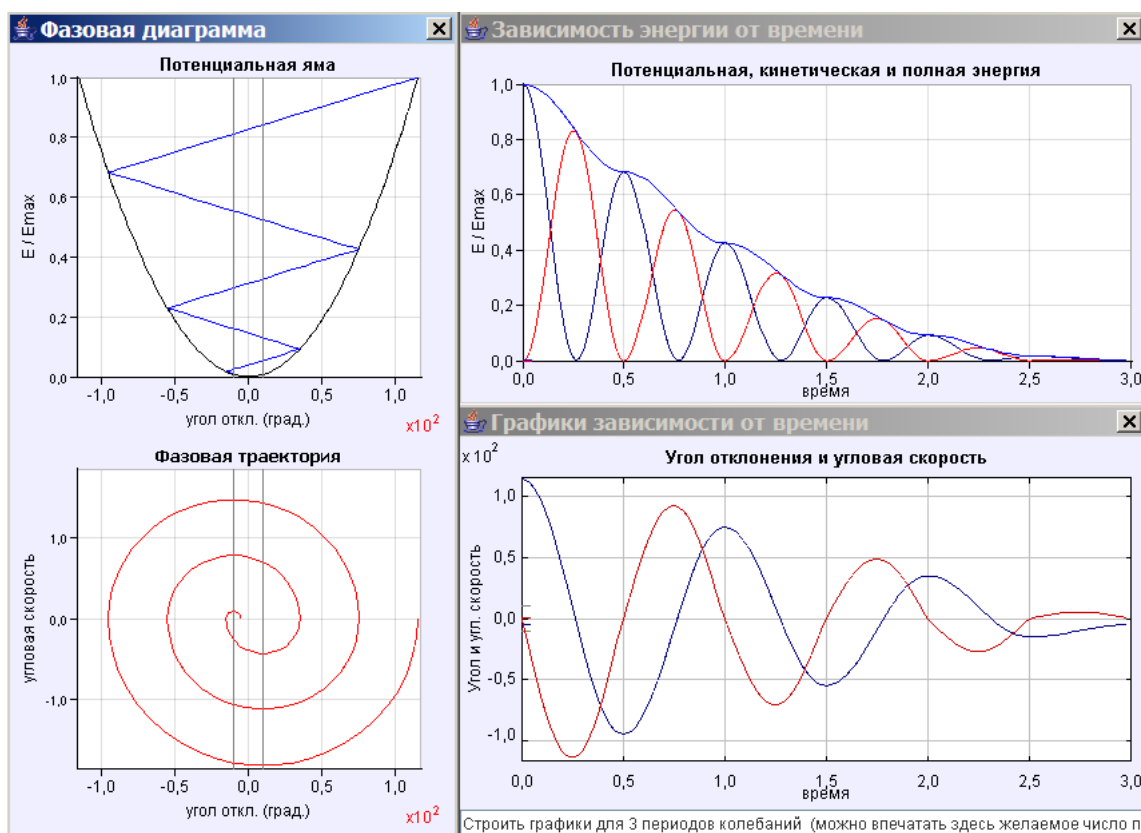


Рис. 3: Потенциальная яма, фазовая диаграмма и графики колебаний, затухающих под действием сухого трения.

2.2 Превращения энергии при колебаниях

Пока маховик торсионного осциллятора вращается в одном направлении, действующий на него момент силы сухого трения постоянен (и равен N_{\max}), поскольку сила сухого трения скольжения не зависит от скорости. При этом движение полная механическая энергия осциллятора уменьшается пропорционально пройденному маховиком угловому расстоянию $\Delta\varphi$, так как (отрицательная) работа $-N_{\max}\Delta\varphi$ постоянного момента силы трения пропорциональна углу поворота $\Delta\varphi$. Поэтому полная энергия зависит от углового положения ротора φ по линейному закону, что хорошо видно из рис. 3, на котором показана параболическая потенциальная яма, соответствующая спиральной пружине, подчиняющейся закону Гука. Изображающая точка, ордината которой равна мгновенному значению полной энергии $E(\varphi)$ осциллятора, а абсцисса равна углу φ , при колебаниях осциллятора перемещается от одного берега этой потенциальной ямы к другому, постепенно опускаясь на ее дно. Траектория изображающей точки состоит из прямолинейных отрезков отрицательного наклона, соединяющих берега параболической потенциальной ямы.

Однако зависимость полной энергии осциллятора от времени $E(t)$ при этом не будет линейной, поскольку ротор вращается неравномерно. Скорость рассеяния механической энергии $-dE/dt$ пропорциональна величине угловой скорости $|\dot{\varphi}(t)|$. Поэтому скорость диссипации механической энергии из-за трения достигает максимума в те моменты, когда максимальна угловая скорость ротора $\dot{\varphi}$, т. е. когда ротор пересекает границы мертвой зоны. Вблизи положений наибольшего отклонения, где угловая скорость ротора мала, скорость рассеяния механической энергии уменьшается.

В противоположность случаю вязкого трения, после полного прекращения колебаний при сухом трении некоторая (небольшая) часть первоначальной энергии осциллятора может остаться в виде механической энергии. Так будет если окончательная остановка ротора произойдет не в средней точке зоны застоя. В таком случае пружина останется слегка деформированной, и потенциальная энергия упругой деформации не обратится в нуль. Остаточная механическая энергия осциллятора не может превышать значения $D\varphi_m^2/2 = N_{\max}\varphi_m/2$.

Если начальное возбуждение осциллятора достаточно сильное, т. е. если начальная энергия много больше значения $D\varphi_m^2/2$, осциллятор совершит большое число колебаний до полной остановки. В этом случае имеет смысл рассматривать полную энергию $\langle E(t) \rangle$, усредненную за период колебаний. Зависимость средней энергии от времени $\langle E(t) \rangle$ на протяжении большого числа колебаний будет квадратичной, поскольку амплитуда колебаний при сухом трении убывает со временем по линейному закону, а энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Пусть t_f — момент времени, соответствующий полному прекращению колебаний, тогда в момент времени t полная энергия $\langle E(t) \rangle$, усредненная по периоду колебаний, пропорциональна $(t_f - t)^2$. Это выражение (применимое, разумеется, только для $t < t_f$) строго справедливо только тогда, когда остановка осциллятора происходит в середине мертвой зоны. Если это не так, то небольшая часть энергии после прекращения колебаний остается в виде потенциальной энергии пружины. Тогда приведенное выражение будет верным лишь приближенно.

Типичные графики превращений потенциальной, кинетической и полной энергий осциллятора приведены на рис. 3.

2.3 Роль вязкого трения

В реальных физических системах сухое трение всегда в большей или меньшей степени сопровождается вязким трением. В этом случае затухание колебаний осциллятора можно исследовать описанным выше способом, а именно, поэтапным решением уравнений (6) и (7) с использованием в качестве начальных условий для очередного полуцикла колебаний угла отклонения и угловой скорости ротора в конце предыдущего полуцикла. Иными словами, решения уравнений для соседних временных интервалов «сшиваются» приравниванием угловых отклонений на общей границе этих интервалов при нулевых значениях угловых скоростей (на всех границах).

Фазовая диаграмма дает наглядное представление об эволюции механического состояния осциллятора, колебания которого затухают под одновременным действием сухого и вязкого трения. В отличие от случая только сухого трения, траектория в фазовом пространстве образована уже

не последовательностью соединяющихся полуэллипсов (или полуокружностей) уменьшающегося размера, а последовательностью полупетель скручивающихся спиральных кривых, характерных для линейного осциллятора с вязким трением. Фокусы спиралей для соседних полупетель поочередно располагаются в точках, соответствующих левой и правой границам мертвой зоны.

Чтобы сравнить относительную роль вязкого и сухого трения в процессе затухания колебаний, ниже мы рассматриваем уменьшение амплитуды колебаний под действием каждого из этих факторов на протяжении одного цикла.

Как было установлено ранее, из-за сухого трения на любой стадии процесса это уменьшение составляет удвоенную ширину мертвой зоны, т. е. $4\varphi_m$. В свою очередь, вязкое трение уменьшает амплитуду за один цикл на величину, пропорциональную текущему значению амплитуды колебаний. При $\gamma T_0 \ll 1$, т. е. при сравнительно больших значениях добротности Q осциллятора, выражение для уменьшения амплитуды за один период Δa из-за вязкого трения можно разложить в ряд:

$$\Delta a = a(1 - e^{-\gamma T_0}) \approx a\gamma T_0 = a\gamma \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi a}{Q}. \quad (8)$$

Приравнявая Δa удвоенной ширине $4\varphi_m$ мертвой зоны, находим значение амплитуды \tilde{a} , которое разделяет случаи преобладания одного вида трения над другим:

$$\tilde{a} = \frac{4\varphi_m}{\gamma T_0} = \frac{4}{\pi} \varphi_m Q \approx \varphi_m Q. \quad (9)$$

Если текущее значение амплитуды превышает \tilde{a} , доминирует роль вязкого трения. И наоборот, когда амплитуда меньше, чем \tilde{a} , преобладает влияние сухого трения.

Когда начальное возбуждение осциллятора достаточно сильное, амплитуда колебаний может превышать значение $\tilde{a} \approx Q\varphi_m$. В таком случае затухание колебаний на начальном этапе определяется преимущественно вязким трением. На фазовой диаграмме уменьшение горизонтального размера (сжатие) нескольких первых витков из-за вязкого трения превышает ширину мертвой зоны. Для затухания колебаний это сжатие первых витков значительно превышает эффекта чередования положений фокусов соседних полувитков от одной границы мертвой зоны к другой из-за сухого трения.

После того, как амплитуда станет меньше значения \tilde{a} (т. е. при $a < \tilde{a} = Q\varphi_m$), эффект сухого трения становится преобладающим. На фазовой траектории это преобладание проявляется в том, что чередование фокусов соседних полувитков между точками $-\varphi_m$ и φ_m играет большую роль в скручивании кривой, нежели сжатие ее витков из-за вязкого трения. В конце концов фазовая траектория упирается в отрезок оси абсцисс, соответствующий зоне застоя, чему соответствует полное прекращение колебаний.

При очень сильном вязком трении, когда добротность осциллятора Q меньше критического значения 0.5 (когда $\gamma > \omega_0$), после начального отклонения за пределы зоны застоя (на угол, превышающий φ_m) отпущенный без начального толчка ротор будет асимптотически приближаться к ближайшей границе зоны застоя, не совершая колебаний. Полная остановка ротора произойдет на границе зоны застоя.

3 Контрольные вопросы и задачи

Приведенный выше теоретический анализ поведения осциллятора, подверженного действию сухого трения, основан на поэтапном интегрировании линейных дифференциальных уравнений, описывающих движение осциллятора. Нелинейный характер физической системы проявляется здесь в переходе от одного уравнения к другому (с другим положением средней точки, относительно которой происходят колебания). Решения этих уравнений для соседних интервалов времени между последовательными точками поворота «сшиваются» («припасовываются» по терминологии Л.И. Мандельштама) в моменты времени, соответствующие изменению направления движения.

Компьютерное моделирование поведения осциллятора с сухим трением в данном пакете основано на численном интегрировании дифференциальных уравнений методом Рунге – Кутты 4-го порядка. Аналитическое решение при этом не используется. При выполнении заданий полученные Вами теоретические результаты следует сравнить с результатами компьютерного моделирования.

3.1 Затухание колебаний под действием сухого трения

Величина момента силы сухого трения в системе характеризуется шириной зоны застоя (или «мертвой» зоны). В программе этот интервал задается указанием максимального угла отклонения φ_m (в градусах) в какую-либо одну сторону от положения равновесия, так что полная ширина зоны застоя равна $2\varphi_m$ (т. е. φ_m – полуширина зоны застоя).

1.1 Колебания в отсутствии сухого трения. Задайте сначала значение $\varphi_m = 0$, соответствующее отсутствию сухого трения. Убедитесь, что в этом случае система демонстрирует знакомое Вам по предыдущей программе поведение линейного осциллятора, т. е. гармонические колебания неизменной амплитуды в отсутствие вязкого трения, и экспоненциально затухающие колебания при наличии вязкого трения. Интенсивность вязкого трения, как и в предыдущей программе, характеризуется добротностью осциллятора Q .

1.2 Затухание под действием сухого трения при возбуждении колебаний начальным отклонением ротора из среднего положения. Чтобы отчетливее выявить роль сухого трения в затухании колебаний, выберите сравнительно большое значение угла φ_m , определяющего границы зоны застоя (скажем, от 15 до 20 градусов), и полное отсутствие вязкого трения. Такие условия сильно отличаются от ситуации, характерной для стрелочных измерительных приборов, которые конструируются так, чтобы зона застоя была бы по возможности более узкой, и в которых преднамеренно вносится вязкое трение, обеспечивающее сильное (близкое к критическому) затухание. В таком случае подвижная система прибора успокаивается за минимальное время, и почти не совершая колебаний, останавливается очень близко к положению, в котором стрелка указывала бы на деление шкалы, соответствующее точному значению измеряемой величины. Здесь же мы намеренно выбираем условия так, чтобы в наибольшей мере выявить роль сухого трения.

(а) Что можно сказать о последовательности максимальных отклонений, если затухание вызвано исключительно сухим трением с идеализированной z -характеристикой? По какому закону происходит убывание максимальных отклонений? Как связаны между собой полуширина зоны застоя и разность последовательных максимальных отклонений в одну сторону?

(б) Пусть угол φ_m , определяющий полуширину зоны застоя, равен, скажем, 15° , а начальное отклонение φ_0 составляет 160° при равной нулю начальной угловой скорости. Рассчитайте теоретически, в какой точке шкалы остановится стрелка после прекращения колебаний. Сколько полуэллипсов образуют фазовую траекторию этого движения, считая от начальной точки до точки полной остановки? Проверьте свои предсказания в моделирующем эксперименте на компьютере.

(в) Где на графике зависимости угловой скорости от времени расположены средние значения отрезков синусоид, описывающих колебания осциллятора на протяжении отдельных полуциклов между точками поворота? Обратите внимание на то, как эти отрезки синусоид переходят друг в друга и образуют непрерывный график затухающих колебаний.

(г) Обратите внимание на изломы графика зависимости угловой скорости от времени (эти изломы соответствуют моментам времени, в которые происходит изменение направления движения осциллятора). Какова причина этих изломов? Чем определяется разность углов наклона касательных к графику скорости справа и слева от этих точек?

1.3* Затухание колебаний под действием сухого трения после возбуждения осциллятора начальным толчком. Выберите начальные условия следующим образом: пусть начальное отклонение равно нулю, а начальная угловая скорость равна, скажем, $2\omega_0$ (где ω_0 — собственная частота осциллятора). Для полуширины зоны застоя примите, как и прежде, значение $\varphi_m = 15^\circ$.

(а) Рассчитайте теоретически максимальный отброс стрелки осциллятора.

(б) На какую точку шкалы укажет стрелка после полного прекращения колебаний? Сколько витков будет на полной фазовой траектории этих колебаний? Проверьте свой ответ в моделирующем эксперименте на компьютере.

1.4* Затухание колебаний под действием сухого трения при разных начальных условиях. Приняв прежнее значение $\varphi_m = 15^\circ$ для полуширины зоны застоя, рассчитайте угол, соответствующий максимальному отбросу стрелки, и окончательное ее положение на шкале после прекращения колебаний при более сложных начальных условиях:

(а) Начальный угол отклонения $\varphi(0) = 135^\circ$, начальная угловая скорость $\dot{\varphi}(0) = 1.5\omega_0$ (где ω_0 — собственная частота колебаний осциллятора).

(б) Начальный угол отклонения $\varphi(0) = -135^\circ$, начальная угловая скорость $\dot{\varphi}(0) = 1.5\omega_0$.

Проверьте полученные Вами теоретические значения в моделирующем эксперименте на компьютере.

1.5* Рассеяние механической энергии осциллятора в случае сухого трения.

(а) График зависимости полной механической энергии осциллятора от угла отклонения состоит из прямолинейных отрезков, соединяющих склоны параболической потенциальной ямы (этот график можно получить в окне компьютерной программы «Энергия от времени»). Объясните, почему.

(б) Рассчитайте полный угловой путь (в градусах), который пройдет маховик осциллятора до полной остановки (до прекращения колебаний) после возбуждения колебаний осциллятора начальным толчком $\dot{\varphi}(0) = 2\omega_0$ из средней точки мертвой зоны, где ω_0 — собственная частота осциллятора. Полуширина мертвой зоны $\varphi_m = 10^\circ$.

1.6 Колебания в случае узкой зоны застоя. Выберите малое значение угла φ_m , характеризующего полуширину зоны застоя (менее 5°), и задайте начальное угловое отклонение $\varphi(0)$, во много раз превосходящее ширину $2\varphi_m$ зоны застоя.

(а) Сколько циклов колебаний совершит маховик до полной остановки?

(б) Когда совершается большое число колебаний, графики отчетливо показывают линейную закономерность убывания амплитуды колебаний и эквидистантный характер витков фазовой диаграммы. Что можно сказать в этом случае о закономерности убывания со временем полной механической энергии осциллятора, усредненной по периоду колебаний?

3.2 Влияние вязкого трения

2.1* Переход главной роли в затухании от вязкого к сухому трению. Когда затухание колебаний обусловлено одновременно как сухим, так и вязким трением, представляет интерес выяснить изменение характера затухания, когда основной вклад в затухание переходит от вязкого трения к сухому. Пусть угол φ_m , определяющий полуширину зоны застоя, составляет около 1 градуса, и пусть добротность Q , определяющая интенсивность вязкого трения, составляет около 30 . Пусть начальный угол отклонения равен 120° , а начальная угловая скорость равна нулю.

(а) Сухое или вязкое трение играет определяющую роль в затухании на начальной стадии колебаний?

(б) При каком значении амплитуды происходит изменение характера колебаний? Каким образом это изменение проявляется на графиках зависимости угла отклонения и угловой скорости от времени? На фазовой траектории?

2.2* Совместное действие сухого и вязкого трения. Пусть границы зоны застоя находятся при $\varphi_m = 10^\circ$, и пусть добротность $Q = 5$. Пусть начальная угловая скорость $\dot{\varphi}(0) = 2\omega_0$, и пусть начальное отклонение равно нулю.

(а) Рассчитайте максимальный угол отклонения стрелки осциллятора для приведенных параметров и начальных условий. Проверьте свой ответ в эксперименте.

(б) Какой вид трения (сухое или вязкое) преобладает на начальном этапе затухания колебаний?

(в)** Пусть границы зоны застоя определяются углами $\varphi_m = 10^\circ$. Пусть добротность Q равна 3 , начальное отклонение составляет 65° , начальная угловая скорость $-2\omega_0$. Рассчитайте максимальный угол отклонения стрелки с сторону, противоположную начальному отклонению. Проверьте свой ответ в эксперименте.

2.3 Сухое трение и критическое вязкое трение.

(а) Выберите значение добротности Q близкое к критическому значению 0.5 , и исследуйте экспериментально характер затухания. Где в пределах зоны застоя наиболее вероятно остано-

ка стрелки после прекращения колебаний, если добротность Q слегка превосходит критическое значение? Приведите физическое объяснение результатам своих наблюдений.

(б) Пусть вязкое трение характеризуется добротностью немного превышающей критическое значение, скажем, $Q = 0.51$. Осциллятор возбуждается начальным отклонением из положения равновесия. Оцените время (в единицах периода колебаний в отсутствие трения), которое пройдет до полного прекращения движения. Где произойдет полная остановка ротора? Проверьте результат своего расчета в моделирующем эксперименте.

(в) Где произойдет остановка стрелки, если добротность Q меньше, чем 0.5 (т. е. если система передемпфирована)? Зависит ли ответ от начальных условий?

3.3 Приложение. Сводка основных формул

Дифференциальное уравнение движения осциллятора с сухим трением:

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi + \varphi_m) \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} > 0,$$

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi - \varphi_m) \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} < 0,$$

где φ_m — угол, соответствующий границам мертвой зоны. Если наряду с сухим трением в системе имеется вязкое трение, в уравнении добавляется член, пропорциональный угловой скорости:

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2(\varphi + \varphi_m) - 2\gamma\dot{\varphi} \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} > 0,$$

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2(\varphi - \varphi_m) - 2\gamma\dot{\varphi} \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} < 0,$$

где ω_0 — частота собственных колебаний в отсутствие трения:

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}.$$

Постоянная затухания γ , характеризующая величину вязкого трения, связана с добротностью осциллятора соотношением:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$

Граничное значение амплитуды, разделяющее случаи преобладания сухого либо вязкого трения:

$$a = \frac{4\varphi_m}{\gamma T} = \frac{4}{\pi}\varphi_m Q \approx \varphi_m Q.$$