

Колебания и перевороты жесткого маятника

Бутиков Е. И.

Аннотация. В данном учебном пособии дано описание моделируемой физической системы и приведены теоретические сведения, необходимые студентам для подготовки к лабораторной работе «Колебания и перевороты жесткого маятника». Вторую часть пособия составляют контрольные вопросы, теоретические и экспериментальные задачи для самостоятельной работы, а также материал для возможных индивидуальных заданий студентам (по указанию преподавателя).

Содержание

1	Теоретические сведения	2
1.1	Физическая система	2
1.2	Дифференциальное уравнение маятника	3
1.3	Физические параметры маятника	4
1.4	Фазовый портрет маятника	4
1.5	Период малых колебаний маятника	10
1.6	Лимитационное движение маятника	11
1.7	Колебания маятника с большими амплитудами	15
1.8	Колебания с предельно большими амплитудами и перевороты маятника	17
1.9	Средние по времени значения потенциальной и кинетической энергий маятника	20
1.10	Влияние трения на фазовый портрет маятника	21
2	Контрольные вопросы и задачи	24
2.1	Малые колебания маятника	24
2.2	Колебания с большими амплитудами	25
2.3	Перевороты и вращения маятника	29
2.4	Приложение: Сводка основных формул	30

1 Теоретические сведения

1.1 Физическая система

Если задаться вопросом, какой физический прибор оставил наиболее глубокий след в истории физики, скорее всего первая мысль будет о маятнике. Начиная с опытов Галилея в XVI веке и вплоть до наших дней простой маятник используется в разнообразных приборах для измерения времени и напряженности гравитационного поля, и, что не менее важно, служит пробным камнем для многих физических теорий. Эта знаменитая механическая система интересна и полезна не только сама по себе как наиболее знакомый пример нелинейного механического осциллятора, но главным образом потому, что многие задачи в разных областях современной физики приводятся к дифференциальному уравнению, описывающему движение маятника. Механические аналоги физических систем допускают непосредственное наблюдение движения и этим очень полезны для формирования интуитивных представлений о сложных явлениях. Детально разобравшись с поведением механической системы и используя аналогию между колебательными системами разной физической природы, можно значительно продвинуться в понимании разнообразных электромагнитных и оптических нелинейных явлений, где все далеко не так наглядно, хотя системы описываются такими же дифференциальными уравнениями.

Одна из программ пакета «Физика колебаний» моделирует движение математического маятника в виде точечной массы в однородном поле тяготения, закрепленной на конце невесомого стержня, который может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси. Мы рассматриваем именно стержень, а не гибкую нить, чтобы можно было изучать полные перевороты и колебания с амплитудой, приближающейся к 180° . Та же модель в равной мере применима и к поведению физического маятника, т. е. закрепленного на горизонтальной оси произвольного твердого тела (а не только точечной массы), так как обе системы описываются одним и тем же нелинейным дифференциальным уравнением.

В положении устойчивого равновесия центр масс маятника расположен ниже точки подвеса на одной вертикали с ней. При отклонении маятника из этого положения на угол φ сила тяжести создает возвращающий момент, пропорциональный $\sin \varphi$. При малых углах отклонения φ (т. е. при малых колебаниях маятника) значения синуса угла и самого угла практически совпадают ($\sin \varphi \approx \varphi$), и маятник ведет себя подобно линейному осциллятору. В частности, в отсутствие трения маятник совершает простое гармоническое колебание. При больших амплитудах консервативный маятник совершает периодические колебания, которые, однако, уже не будут гармоническими. Графики таких колебаний заметно отличаются от синусоиды, а период колебаний существенно зависит от амплитуды.

На рис. 1 слева вверху показано схематическое изображение маятника на экране компьютера. Ниже приведены графики угла отклонения и угловой скорости при колебаниях с амплитудой $179,99^\circ$.

Метки на шкале времени (т. е. вертикальные деления) проведены в соответствии с естественной для маятника единицей времени, равной периоду колебаний бесконечно малой амплитуды. Обратите внимание на то, что период T несинусоидальных колебаний маятника с амплитудой

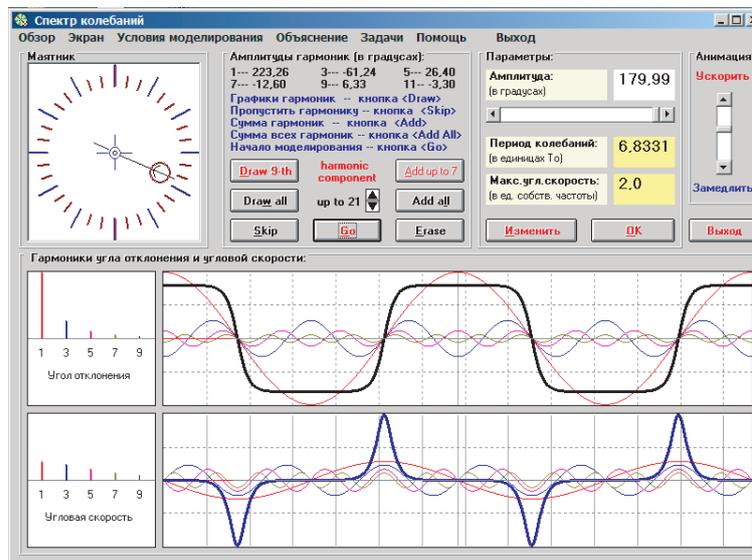


Рис. 1: Изображение маятника на экране компьютера и графики угла отклонения и угловой скорости при колебаниях с амплитудой $179,99^\circ$ вместе с гармониками этих колебаний.

$179,99^\circ$ почти в семь раз больше периода малых колебаний.

Вместе с графиками на рис. 1 показан также *спектр*, т. е. синусоидальные составляющие (гармоники) этих колебаний. Период основной (фундаментальной) гармоники равен периоду колебаний T . Ее круговая частота обратно пропорциональна периоду: $\omega = 2\pi/T$. Частоты высших гармоник $3\omega, 5\omega \dots$ кратны основной частоте. Спектр колебаний маятника образован только нечетными гармониками.

Если при начальном возбуждении маятник получит достаточно большую энергию, сначала он будет совершать полные перевороты. Из-за трения маятник постепенно теряет энергию, и с некоторого момента вращательное движение сменяется колебательным.

1.2 Дифференциальное уравнение маятника

Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси применительно к физическому маятнику в однородном поле тяжести в отсутствие трения принимает вид:

$$J\ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi. \quad (1)$$

Здесь J — момент инерции маятника относительно оси вращения, a — расстояние от оси до центра масс, g — ускорение свободного падения. Левая часть уравнения (1) представляет собой скорость изменения момента импульса маятника, правая — момент силы тяжести. Этот момент равен произведению силы mg (приложенной в центре масс) на плечо этой силы $a \sin \varphi$. После

деления обеих частей уравнения (1) на J получаем:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

где введено обозначение $\omega_0^2 = mga/J$. Для простого маятника $a = l$, $J = ml^2$, и поэтому $\omega_0^2 = g/l$. Для физического маятника ω_0^2 можно представить в таком же виде, если ввести по определению величину $l = J/(ma)$. Эта величина имеет размерность длины и называется *приведенной длиной* физического маятника. Поскольку физический маятник с приведенной длиной l описывается тем же дифференциальным уравнением, что и математический маятник такой же длины l , эти две системы динамически эквивалентны.

1.3 Физические параметры маятника

При малых углах отклонения от положения устойчивого равновесия можно заменить в уравнении (2) $\sin \varphi$ на φ , и тогда уравнение (2) совпадет с дифференциальным уравнением колебаний гармонического осциллятора. Поэтому величина ω_0 в уравнении (2) для маятника имеет физический смысл угловой частоты предельно малых колебаний маятника в отсутствие трения.

При наличии вязкого трения в правую часть уравнения (2) следует добавить член, пропорциональный угловой скорости $\dot{\varphi}$. Поэтому уравнение маятника с трением принимает следующий вид:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (3)$$

Таким образом, маятник как динамическая система характеризуется всего двумя независимыми параметрами: *угловой частотой малых колебаний* ω_0 и *постоянной затухания* γ , которая также имеет размерность частоты (или угловой скорости). Как и в случае линейного осциллятора, вместо постоянной затухания удобно использовать эквивалентный безразмерный параметр — *добротность* $Q = \omega_0/(2\gamma)$. В случае малых колебаний величина Q/π равна числу полных циклов, на протяжении которых амплитуда уменьшается в $e \approx 2.72$ раза.

Принципиальное различие между уравнением (3) для маятника и соответствующим дифференциальным уравнением для пружинного осциллятора (который рассматривается в лабораторной работе «Колебания линейного осциллятора») заключается в том, что уравнение (3) *нелинейно*. Трудности нахождения аналитического решения этого уравнения как раз и обусловлены его нелинейностью. В общем случае решение уравнения (3) в элементарных функциях не выражается. В частном случае отсутствия трения решение уравнения (2) можно выразить через специальные функции (эллиптические интегралы).

1.4 Фазовый портрет маятника

Общее представление о возможных движениях маятника при разных значениях сообщенной ему энергии дают фазовые траектории, т. е. кривые зависимости угловой скорости от угла отклоне-

ния. Особенно важно, что фазовые траектории могут рассказать многое о возможном поведении нелинейной физической системы в тех случаях, когда аналитического решения не существует.

Для консервативной системы можно построить семейство фазовых траекторий, не решая дифференциального уравнения, описывающего ее поведение. Уравнения фазовых траекторий непосредственно следуют из закона сохранения энергии. Потенциальная энергия маятника в поле тяготения $E_{\text{pot}}(\varphi)$ зависит от угла отклонения маятника φ из положения равновесия:

$$E_{\text{pot}}(\varphi) = mga(1 - \cos \varphi). \quad (4)$$

График $E_{\text{pot}}(\varphi)$ показан в верхней части рис. 2. Потенциальная энергия имеет минимальное (нулевое) значение в положении устойчивого равновесия, расположенном при $\varphi = 0$ (дно потенциальной ямы). Потенциальная энергия маятника имеет максимальное значение $2mga$ в перевернутом положении (при $\varphi = \pm\pi$), которое соответствует неустойчивому равновесию. Это вершина потенциального барьера. Потенциальная энергия маятника периодически зависит от угла φ (с периодом 2π).

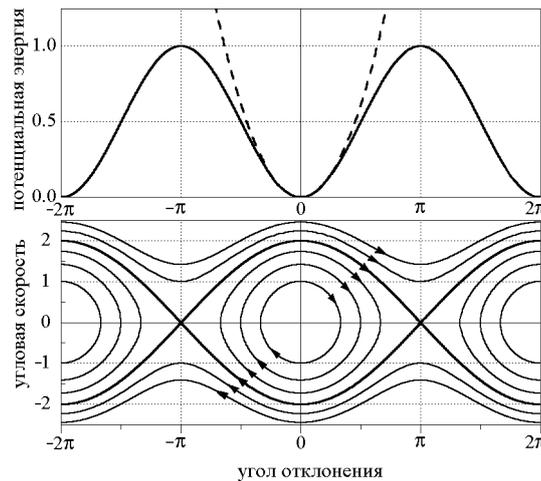


Рис. 2: Потенциальная яма и фазовый портрет консервативного маятника.

Штриховой линией на рис. 2 для сравнения показана параболическая потенциальная яма линейного (гармонического) осциллятора, период колебаний которого не зависит от амплитуды. Так как вблизи минимума обе потенциальные ямы имеют одинаковую кривизну, малые колебания маятника имеют такой же период, как и колебания соответствующего линейного осциллятора.

В отсутствие трения полная энергия маятника E , т. е. сумма его кинетической энергии $\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$ и потенциальной энергии (4), остается постоянной во время движения:

$$\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + mga(1 - \cos \varphi) = E. \quad (5)$$

Это уравнение связывает между собой угол отклонения φ и угловую скорость $\dot{\varphi}$. Поэтому (5) представляет собой уравнение фазовой траектории, соответствующей определенному значению полной энергии маятника E . Для дальнейшего удобно представить уравнение (5) в несколько иной форме. Вспомогая, что $mga/J = \omega_0^2$, и вводя по определению величину $E_0 = J\omega_0^2/2$ (которая имеет физический смысл кинетической энергии тела с моментом инерции J , вращающегося с угловой скоростью ω_0), уравнение (5) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{\omega_0^2} + 2(1 - \cos \varphi) = \frac{E}{E_0}. \quad (6)$$

Когда полная энергия маятника E меньше, чем максимально возможное значение его потенциальной энергии (когда $E < 2mga = 4E_0$), т. е. когда полная энергия меньше высоты потенциального барьера, показанного на рис. 2, маятник совершает колебания, качаясь туда и обратно между симметричными положениями максимального отклонения φ_m и $-\varphi_m$. В этих крайних положениях (точках поворота) потенциальная энергия маятника $E_{\text{pot}}(\varphi)$ сравнивается с его полной энергией E , а значит кинетическая энергия и угловая скорость обращаются в нуль. Если амплитуда мала ($\varphi_m \ll \pi/2$), колебания почти синусоидальны, а соответствующая им фазовая траектория имеет почти эллиптическую форму. Эллиптическая форма фазовой траектории малых колебаний получается из уравнения (6), если подставить в него приближенное значение косинуса: $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$, справедливое для малых углов φ :

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{E\omega_0^2/E_0} + \frac{\varphi^2}{E/E_0} = 1. \quad (7)$$

Это уравнение определяет эллипс в фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$. Его горизонтальная полуось равна максимальному угловому отклонению маятника $\varphi_m = \sqrt{E/E_0}$. Если угловую скорость $\dot{\varphi}$ откладывать на оси ординат в единицах угловой частоты малых колебаний ω_0 , задаваемый уравнением (7) эллипс вырождается в окружность.

Чем больше полная энергия E (т. е. чем больше амплитуда колебаний φ_m), тем значительнее движение маятника отличается от простого гармонического колебания, и тем сильнее фазовая траектория отличается от эллипса. При увеличении полной энергии E и приближении ее к значению $2mga$ фазовая траектория вытягивается в горизонтальном направлении (вдоль оси φ) сильнее, чем в вертикальном (вдоль оси $\dot{\varphi}$). Так происходит потому, что склоны потенциальной ямы маятника с увеличением амплитуды колебаний поднимаются не столь круто, как склоны параболической ямы линейного осциллятора (см. рис. 2). Так как возвращающий момент силы тяжести у маятника растет с углом отклонения медленнее, чем у осциллятора, маятник называют системой с «мягкой» возвращающей силой. Поэтому в отличие от осциллятора, период колебаний которого не зависит от амплитуды, период колебаний маятника растет по мере увеличения амплитуды.

Когда маятник отклонен из равновесия на угол, близкий к 90° , возвращающий момент силы тяжести почти постоянен (слабо зависит от угла φ в окрестности 90°). Это можно увидеть и из графика зависимости потенциальной энергии от φ (см. рис. 2), наклон которого почти неизменен

вблизи точек перегиба $\varphi = \pm 90^\circ$. Поэтому маятник движется здесь с почти постоянным угловым ускорением, а угловая скорость линейно зависит от времени, что отчетливо проявляется на графиках угловой скорости. Для колебаний с большими амплитудами ($110 - 140^\circ$) эти графики принимают пилообразную форму с почти прямолинейными зубцами. Прямолинейным участкам графиков скорости на графиках угла отклонения соответствуют зубцы параболической формы. Весь график угла отклонения $\varphi(t)$ состоит из таких почти параболических сегментов, выпуклости которых поочередно обращены в противоположные стороны.

При больших амплитудах маятник большую часть периода колебаний проводит в окрестности точек максимального отклонения (точек поворота), где направление его движения изменяется на противоположное. С увеличением размаха колебаний на графике угла отклонения $\varphi(t)$ вершины становятся более плоскими, а на графике угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ — более острыми. Такие изменения формы графиков ясно видны на рис. 3.

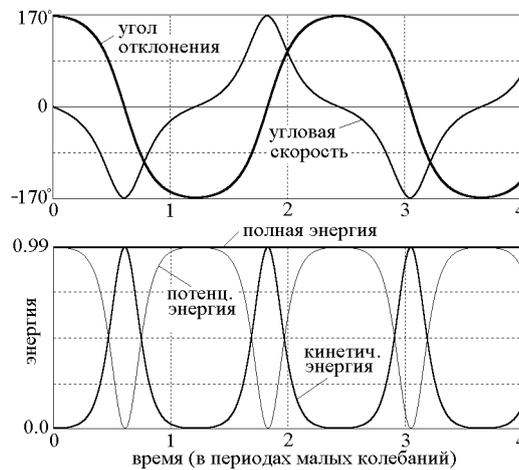


Рис. 3: Графики больших колебаний маятника в отсутствие трения ($\varphi_{\max} = 170^\circ$).

В нижней части рис. 3 показаны графики потенциальной, кинетической и полной энергий маятника. При больших колебаниях маятник проводит на пологих склонах потенциальной ямы в среднем больше времени нежели вблизи ее дна. Поэтому с увеличением амплитуды колебаний вершины графика потенциальной энергии $E_{\text{pot}}(t)$ растягиваются и становятся шире, чем долины между ними, в противоположность гармоническому осциллятору, для которого максимумы и минимумы графика имеют одинаковую ширину. Противоположные изменения происходят на графике кинетической энергии $E_{\text{kin}}(t)$. Это значит, что при колебаниях большого размаха среднее по времени значение потенциальной энергии маятника больше среднего значения кинетической энергии. Напомним, что при малых колебаниях маятника средние значения двух видов энергии одинаковы (как и у гармонического осциллятора).

Если полная энергия маятника превышает потенциальную энергию в перевернутом положении, т. е. если $E > 2mga$, то угловая скорость маятника не обращается в нуль даже при $\varphi = \pm\pi$.

В противоположность режиму колебаний знак угловой скорости теперь остается неизменным. Маятник совершает полные обороты, т. е. *вращается* в определенном направлении. Это вращение происходит неравномерно: когда он проходит через низшую точку своего кругового пути, т. е. через положение устойчивого равновесия, угловая скорость максимальна. В моменты прохождения через верхнюю точку (через положение неустойчивого равновесия) угловая скорость маятника минимальна.

В фазовой плоскости вращение маятника представлено траекторией, которая выходит за пределы вертикальных линий $\varphi = \pm\pi$, продолжаясь периодически с каждым новым оборотом, как показано на рис. 2. Для верхних кривых, лежащих выше оси φ , значения угловой скорости $\dot{\varphi}$ положительны и угол φ возрастает со временем. Это значит, что они соответствуют вращению маятника в положительном направлении (против часовой стрелки). Изображающая точка движется вдоль этих кривых слева направо.

Для любой консервативной системы уравнение фазовой траектории (в частности, уравнение (6) в случае маятника) всегда выражается четной функцией аргумента $\dot{\varphi}$, так как кинетическая энергия зависит только от $\dot{\varphi}^2$. Отсюда следует, что фазовая траектория симметрична относительно горизонтальной оси φ . Эта симметрия означает, что движение системы в одном направлении (скажем, по часовой стрелке) механически эквивалентно движению в обратном направлении (против часовой стрелки). Другими словами, движение консервативной системы *обратно во времени*: если в произвольный момент времени знак скорости мгновенно изменить на противоположный, изображающая точка в фазовой плоскости перескакивает на ту же самую фазовую траекторию в новое положение, расположенное симметрично по другую сторону горизонтальной оси φ . Двигаясь в обратном направлении, система проходит через те же пространственные точки с той же самой скоростью (по модулю), что и в прямом движении. Поскольку обращение знака скорости ($\dot{\varphi} \rightarrow -\dot{\varphi}$) эквивалентно изменению направления времени ($t \rightarrow -t$), отмеченное свойство консервативных систем называют также симметрией по отношению к *обращению времени*.

Дополнительная симметрия фазовых траекторий консервативного маятника относительно вертикальной оси $\dot{\varphi}$ (симметрия по отношению к замене $\varphi \rightarrow -\varphi$) следует из симметрии потенциальной ямы: $E_{\text{пот}}(-\varphi) = E_{\text{пот}}(\varphi)$.

При включении трения в модель маятника движение системы становится необратимым во времени. Поэтому отмеченная выше симметрия фазовых траекторий системы относительно координатных осей фазовой плоскости исчезает. Влияние трения на фазовый портрет маятника рассматривается в разделе 3.1.10.

Углы φ и $\varphi \pm 2\pi$, $\varphi \pm 4\pi$, ... эквивалентны, так как соответствуют одному и тому же положению маятника. Поэтому достаточно рассматривать только часть фазовой плоскости, например, полосу, заключенную между вертикальными прямыми $\varphi = -\pi$ и $\varphi = \pi$ (см рис. 2). Эти прямые можно отождествить и считать, что когда изображающая точка покидает выделенную область, пересекая правую ее границу $\varphi = \pi$, эта точка одновременно входит с противоположной стороны через левую границу $\varphi = -\pi$ (если маятник совершает переворот против часовой стрелки).

Двумерное фазовое пространство жесткого маятника можно представлять себе не только как часть плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$, заключенную между вертикальными прямыми $\varphi = +\pi$ и $\varphi = -\pi$, но и

как некоторую поверхность, не имеющую границ. Это возможно потому, что противоположные точки вертикальных прямых, соответствующие одинаковым значениям $\dot{\varphi}$, описывают физически эквивалентные состояния маятника. Принимая во внимание также периодичность зависимости потенциальной энергии маятника и возвращающего момента силы тяжести от угла φ , можно вырезать эту часть плоскости и свернуть ее в цилиндр, соединив граничные прямые $\varphi = +\pi$ и $\varphi = -\pi$. Образованную таким образом цилиндрическую поверхность можно рассматривать как фазовое пространство маятника. Фазовые траектории, охватывающие этот цилиндр, соответствуют полным переворотам (неравномерному вращению) маятника. Такое вращение, как уже отмечалось, происходит при значениях полной энергии, превосходящих высоту потенциального барьера $2mga$, разделяющего соседние минимумы потенциальной энергии.

Период вращения быстро уменьшается при увеличении энергии. Асимптотическое поведение периода при $E \gg 2mga$ можно найти следующим образом.

Когда полная энергия маятника E значительно превосходит высоту потенциального барьера $2mga$, можно приближенно считать, что вся энергия маятника — это кинетическая энергия его вращения. Иными словами, в этом случае можно пренебречь влиянием поля тяжести на поведение маятника и в первом приближении считать, что он совершает равномерное вращение. Если возбуждение маятника совершалось сообщением ему в положении устойчивого равновесия некоторой угловой скорости Ω , то дальнейшее вращение и происходит приблизительно с этой угловой скоростью. Поэтому при $E = J\Omega^2/2 \gg 2mga$ период вращения обратно пропорционален угловой скорости Ω , сообщенной маятнику при возбуждении: $T = 2\pi/\Omega$.

Чтобы улучшить полученную оценку зависимости периода от начальной угловой скорости $T(\Omega)$, нужно принять во внимание вариации угловой скорости вращения маятника из-за действия силы тяжести. Угловая скорость осциллирует между максимальным значением Ω в нижней точке и некоторым минимальным значением Ω_{\min} в верхней точке траектории. Минимальную угловую скорость можно найти с помощью закона сохранения энергии:

$$\Omega_{\min} = \sqrt{\Omega^2 - 4\omega_0^2} \approx \Omega \left(1 - 2\frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \right).$$

При сравнительно быстром вращении маятника осцилляции угловой скорости почти синусоидальны. Это можно увидеть из графиков угловой скорости, которые строит моделирующая программа. Поэтому в следующем приближении среднее значение угловой скорости можно получить как полусумму максимального и минимального значений:

$$\Omega_{\text{av}} \approx (\Omega + \Omega_{\min})/2 = \Omega(1 - \omega_0^2/\Omega^2),$$

что для периода вращения маятника дает следующую оценку:

$$T(\Omega) = \frac{2\pi}{\Omega_{\text{av}}} \approx T_0 \frac{\omega_0}{\Omega} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \right).$$

* * *

С помощью окна программы «Фазовая траектория маятника» можно получить общее представление о возможных движения маятника в отсутствие трения. Для этого при вводе начальных условий следует последовательно придавать полной энергии маятника различные значения. При выполнении эксперимента можно, одновременно с построением каждой из фазовых траекторий, измерить период соответствующих колебаний или переверотов. Выполняя такие измерения для разных значений полной энергии, сообщаемой маятнику при начальном возбуждении, можно получить зависимость $T(E)$ периода от полной энергии E .

В том же окне над фазовой плоскостью показан график потенциальной энергии маятника (потенциальная яма). Одновременно с отображением движения изображающей точки в фазовой плоскости, в потенциальной яме строится график полной энергии в зависимости от угла отклонения. При достижении точек поворота кинетическая энергия обращается в нуль и полная энергия совпадает с потенциальной (берега потенциальной ямы), а фазовая траектория пересекает ось φ .

1.5 Период малых колебаний маятника

Отличие маятника от линейного осциллятора проявляется прежде всего в зависимости периода колебаний от амплитуды. Чтобы получить приближенную теоретическую формулу для этой зависимости, нужно удержать следующий член в разложении $\sin \varphi$ в дифференциальном уравнении (2):

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3, \quad (8)$$

и в результате получаем следующее приближенное нелинейное дифференциальное уравнение для консервативного маятника с $\gamma = 0$:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi - \frac{1}{6}\omega_0^2 \varphi^3 = 0, \quad (9)$$

Приближенное решение уравнения (9) можно искать в виде суперпозиции синусоидального колебания $\varphi(t) = \varphi_m \cos \omega t$ и его третьей гармоники $\epsilon \varphi_m \cos 3\omega t$, частота которой равна 3ω (мы принимаем, что момент $t = 0$ соответствует максимальному отклонению маятника). Такое решение приведено во многих учебниках, см., например, Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман, Механика (Берклиевский курс физики, т. I), стр. 224 – 227, Москва, «Наука», 1971. Относительный вклад третьей гармоники ϵ оказывается равным $\varphi_m^2/192$, где φ_m - амплитуда основной гармоники, частота которой получается меньшей, чем частота ω_0 предельно малых колебаний на величину, пропорциональную квадрату амплитуды φ_m^2 :

$$\omega \approx \omega_0(1 - \varphi_m^2/16), \quad T = 2\pi/\omega \approx T_0(1 + \varphi_m^2/16). \quad (10)$$

Рекомендуется получить это решение самостоятельно, либо по крайней мере проследить за всеми деталями вывода, приведенного в учебниках, чтобы составить представление о приближенных методах, используемых в теории колебаний. Ту же самую приближенную формулу (10)

для зависимости периода колебаний маятника от амплитуды можно получить из точного решения, выраженного через эллиптические интегралы, разлагая точное решение в ряд по степеням амплитуды φ_m .

Уравнение (10) показывает, что, например, при амплитуде $\varphi_m = 30^\circ$ (0.52 рад) относительное увеличение периода колебаний (по сравнению с периодом колебаний бесконечно малой амплитуды) составляет 0.017 (1.7%). Относительный вклад третьей гармоники в это несинусоидальное колебание составляет 0.14%, т. е. ее амплитуда равна лишь 0.043°.

Моделирующая программа позволяет проверить приближенную теоретическую формулу (10) для периода колебаний. В следующей таблице приведены значения периода T (для нескольких значений амплитуды), рассчитанные по формуле (10) и измеренные в вычислительном эксперименте. Сравнивая эти значения, приходим к заключению, что приближенная формула (10) для амплитуды 45° дает значение периода с относительной ошибкой лишь $(1.0400 - 1.0386)/1.04 = 0.0013 = 0.13\%$. Однако при 90° ошибка составляет уже 2.24%. Ошибка не превышает 1% для амплитуд вплоть до 70° .

Амплитуда φ_m	T/T_0 (теория)	T/T_0 (эксперимент)
30° ($\pi/6$)	1.0171	1.0175
45° ($\pi/4$)	1.0386	1.0400
60° ($\pi/3$)	1.0685	1.0732
90° ($\pi/2$)	1.1539	1.1803
120° ($2\pi/3$)	1.2742	1.3730
135° ($3\pi/4$)	1.3470	1.5279
150° ($5\pi/6$)	1.4284	1.7622

1.6 Лимитационное движение маятника

Фазовая траектория, соответствующая движению консервативного маятника с полной энергией E , равной максимально возможному значению потенциальной энергии маятника, а именно, $E_{\text{pot}}(\pi) = 2mga = E_{\text{max}}$, представляет особый интерес. Она отделяет центральную область фазовой плоскости, занятую замкнутыми траекториями колебательных движений, от внешних областей, занятых фазовыми траекториями вращательных движений. Эта граница называется *сепаратрисой*. На рис. 2 она выделена жирной линией. Сепаратриса разделяет фазовую плоскость маятника на области, соответствующие разным типам движения. Уравнение сепаратрисы следует из уравнения (5) или (6), если подставить туда $E = 4E_0 = 2J\omega_0^2$:

$$\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi/2). \quad (11)$$

Лимитационное движение консервативного маятника (движение с полной энергией $E = 2mga$) заслуживает детального обсуждения. В этом случае изображающая точка в фазовой плоскости

движется вдоль сепаратрисы. Когда маятник с энергией $E = 2mga$ приближается к перевернутому положению $\varphi = \pi$ или $\varphi = -\pi$, его угловая скорость стремится к нулю, обращаясь в нуль при $\varphi = \pm\pi$. В фазовой плоскости это состояние представлено седловыми точками $\varphi = \pm\pi$, $\dot{\varphi} = 0$, в которых встречаются верхняя и нижняя ветви сепаратрисы (11). Обе эти точки соответствуют одному и тому же механическому состоянию, в котором перевернутый маятник находится в покое в неустойчивом положении равновесия. Малейшее смещение маятника из этого положения в ту или другую сторону приведет к колебаниям с амплитудой, приближающейся к π , а малейший толчок приведет к вращательному движению (к полным переворотам). При таких колебаниях (как и при переворотах) маятник надолго задерживается в окрестности перевернутого положения.

Замечательно, что для лимитационного движения маятника, т. е. движения с полной энергией $E = 4E_0 = 2mga$, существует аналитическое решение, в котором зависимость от времени для угла отклонения $\varphi(t)$ и для угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ выражается через элементарные функции. Интегрирование дифференциального уравнения (11) с начальным условием $\varphi(0) = 0$ (при положительном знаке квадратного корня) дает:

$$-\omega_0 t = \ln \tan[(\pi - \varphi)/4], \quad (12)$$

и мы приходим к следующему выражению для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \pi - 4 \arctan(e^{-\omega_0 t}). \quad (13)$$

Это решение описывает движение маятника в направлении против часовой стрелки, начинающееся при $t = -\infty$ из положения $\varphi = -\pi$. При $t = 0$ груз маятника проходит через нижнюю точку своей круговой траектории, и затем продолжает движение, асимптотически приближаясь к перевернутому положению $\varphi = +\pi$. График $\varphi(t)$ для этого движения показан на рис. 1.6.

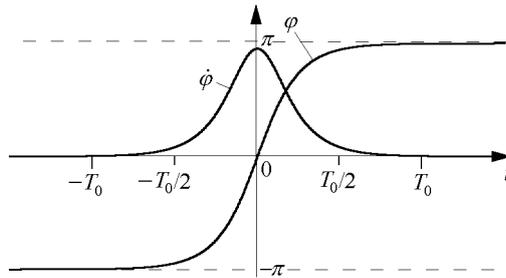


Рис. 4: Графики движения маятника с энергией $E = 2mga = E_{\max} = 4E_0$.

Второе решение, соответствующее вращению маятника по часовой стрелке (т. е. движению вдоль второй ветви сепаратрисы в фазовой плоскости), можно получить из уравнения (13) преобразованием обращения времени, т. е. заменой $t \rightarrow -t$. Решения, соответствующие другим начальным условиям, можно получить из уравнения (13) простым сдвигом начала отсчета времени (т. е. заменой t на $t - t_0$).

Чтобы получить зависимость угловой скорости от времени $\dot{\varphi}(t)$ для лимитационного движения маятника в отсутствие трения, можно выразить $\cos(\varphi/2)$ в уравнении (13) следующим образом:

$$\cos(\varphi/2) = \frac{1}{\cosh(\omega_0 t)}.$$

После подстановки этого значения в (11) получаем:

$$\dot{\varphi}(t) = \pm \frac{2\omega_0}{\cosh(\omega_0 t)} = \pm \frac{4\omega_0}{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}. \quad (14)$$

Эта зависимость угловой скорости от времени $\dot{\varphi}(t)$ для лимитационного движения также показана на рис. 1.6. График $\dot{\varphi}(t)$ имеет вид уединенного импульса. Характеристическая ширина его профиля, т. е. продолжительность импульса скорости, по порядку величины равна $1/\omega_0$. Это значит, что время, необходимое маятнику для прохождения почти полного кругового пути в лимитационном движении, из окрестности перевернутого положения через нижнее положение равновесия вновь почти до перевернутого положения, по порядку величины равно периоду малых колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$. В самом деле, для моментов времени $t = T_0/2$ по обе стороны от пика значение угловой скорости, как следует из (14), составляет лишь $0.17\omega_0$. Используя аналитическое выражение (13) для $\varphi(t)$, можно точно рассчитать промежуток времени τ , в течение которого маятник проходит через нижнее положение равновесия от одного горизонтального положения ($\varphi = -\pi/2$) до другого ($\varphi = \pi/2$): $\tau = 0.28T_0$. На протяжении этого промежутка времени кинетическая энергия маятника больше потенциальной. Поэтому время τ равно полуширине (ширине на половине высоты) одиночного импульса на графике кинетической энергии для лимитационного движения.

На крыльях графика $\dot{\varphi}(t)$, т. е. при $t \rightarrow \pm\infty$, угловая скорость спадает экспоненциально. В самом деле, при больших положительных значениях t в знаменателе выражения (14) можно пренебречь вторым слагаемым $\exp(-\omega_0 t)$, что дает

$$\dot{\varphi}(t) \approx \pm 4\omega_0 e^{-\omega_0 t}. \quad (15)$$

Таким образом, в случае лимитационного движения, когда полная энергия маятника в точности равна высоте потенциального барьера $2mga$, скорость маятника неограниченно уменьшается по мере его приближения к перевернутому положению. Маятник асимптотически движется к неустойчивому равновесию, затрачивая на это движение бесконечно большое время. Значит, при $E = 2mga$ движение консервативного маятника не будет периодическим.

Если энергия маятника близка к значению $2mga$, его движение почти всюду будет очень мало отличаться от лимитационного. Графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ для движений маятника с энергией, немного меньшей и немного большей $2mga$, показаны на рис. 5.

Заметные отличия в характере движения проявляются лишь в непосредственной близости к перевернутому положению, для достижения которого при $E = 2mga$ потребовалось бы бесконечно большое время. Если энергия превышает $2mga$ на сколь угодно малую величину, маятник

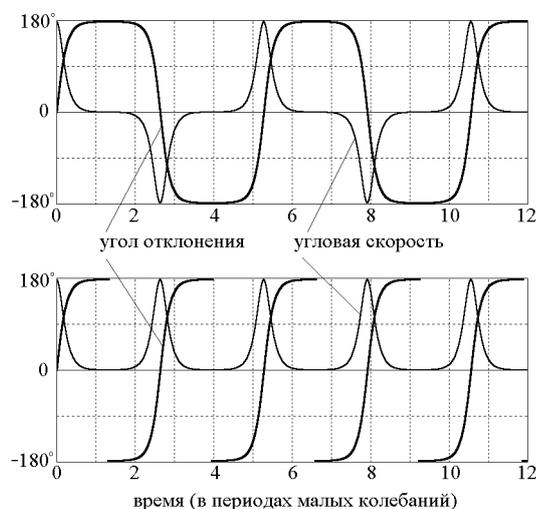


Рис. 5: Графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ при колебаниях и переворотах консервативного маятника с энергией, близкой к значению $2mga$.

достигнет перевернутого положения за конечное время и будет продолжать движение далее в прежнем направлении, набирая скорость по мере приближения к нижнему положению. Если же энергия меньше, чем $2mga$, маятник за конечное время достигнет точки своего максимального отклонения, и затем начнет двигаться обратно. И в том, и в другом случае движение маятника периодическое, причем его период неограниченно возрастает при $E \rightarrow 2mga$. Рис. 6 показывает зависимость периода от полной энергии $T(E)$, полученную с помощью моделирующего эксперимента.

Начальный участок графика показывает почти линейный рост периода с энергией, что соответствует приближенной формуле (10), так как при малых колебаниях полная энергия маятника приблизительно пропорциональна квадрату амплитуды: $E \sim \varphi_m^2$. Такую закономерность, справедливую для колебаний со сравнительно небольшими амплитудами, можно проверить, экспериментируя с настоящим маятником, не прибегая к компьютерному моделированию. Но совсем иное дело, если нас интересуют колебания с амплитудами, приближающимися к 180° , т. е. движение, близкое к лимитационному. При $E \approx 2mga$ тонкие детали зависимости периода от амплитуды в натурном эксперименте установить невозможно. Напротив, моделирование позволяет выполнить точные измерения периода и в то же время увидеть возможный путь для теоретического расчета периода (см. следующий раздел).

Рассмотренные выше математические соотношения, относящиеся к лимитационному движению маятника, играют важную роль в современной теоретической физике, в частности, в теории солитонов (уединенных волновых импульсов, распространяющихся в нелинейной среде с дисперсией).

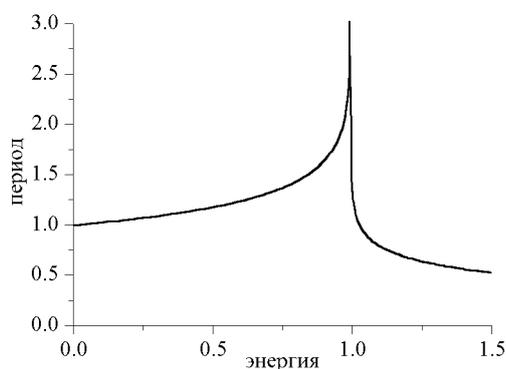


Рис. 6: Период как функция полной энергии E для колебаний и переворотов маятника в отсутствие трения.

1.7 Колебания маятника с большими амплитудами

Предшествующий анализ лимитационного движения (т. е. движения вдоль сепаратрисы в фазовой плоскости) дает ключ к пониманию характера колебаний маятника с амплитудами, приближающимися к 180° , когда энергия маятника лишь чуть меньше высоты $2mga$ потенциального барьера. Этот анализ позволяет также понять характер переворотов маятника при полной энергии, чуть большей, чем потенциальная энергия $2mga$ маятника в перевернутом положении. Именно при таких энергиях обнаруживаются наиболее интересные особенности зависимости периода от энергии.

Выполняя моделирование колебаний маятника с амплитудами φ_m , приближающимися к 180° , например, равными 179.900° , 179.990° и 179.999° , при сравнении графиков скорости можно увидеть, что длительность импульсов в этих случаях практически одинакова, но интервалы между пиками (т. е. периоды колебаний) возрастают по мере приближения амплитуды к 180° . Экспериментальные значения периодов таких необычных колебаний составляют соответственно $5.5 T_0$, $6.8 T_0$ и $8.3 T_0$. Из графиков хорошо видно, что все это различие в периодах накапливается при очень медленном движении маятника в непосредственной близости перевернутого положения, в то время как большая часть кругового пути через нижнее положение равновесия описывается практически неотличимыми графиками, почти совпадающими с графиком лимитационного движения. Это значит, что весь путь маятника от нижнего положения равновесия до точки наибольшего отклонения можно мысленно разделить на две характерные части: одна часть (одинаковая для всех трех рассматриваемых случаев) простирается от нижней точки $\varphi = 0$ до некоторого произвольно выбранного угла φ_c (например, $\varphi_c = 175^\circ$), а вторая часть — от φ_c до максимального отклонения φ_m разного в трех случаях). С хорошей точностью время движения маятника от $\varphi = 0$ до φ_c (обозначим это время через t_0) можно найти, считая, что рассматриваемое движение совпадает с лимитационным. Для этого воспользуемся известным аналитическим решением

(13), подставляя в него $\varphi(t) = \varphi_c$ при $t = t_0$:

$$\omega_0 t_0 = -\ln \tan \frac{\pi - \varphi_c}{4} = -\ln \tan \frac{\alpha_c}{4}, \quad (16)$$

где введено обозначение $\alpha_c = \pi - \varphi_c$ для угла, на который стержень маятника при $\varphi = \varphi_c$ отклонен от верхнего (неустойчивого) положения равновесия. Когда угол φ_c близок к π , угол α_c мал, так что в уравнении (16) можно положить $\tan(\alpha_c/4) \approx \alpha_c/4$, и $\omega_0 t_0 \approx \ln(4/\alpha_c)$.

Время t_0 зависит, конечно, от $\alpha_c = \pi - \varphi_c$, т. е. от положения точки, которую мы выбрали для деления всего пути на две части. Дальнейшее движение маятника от $\varphi = \varphi_c$ до максимального отклонения $\varphi = \varphi_m$, происходящее в малой окрестности перевернутого положения в течение некоторого времени t_1 , можно рассматривать с помощью *линеаризованного* уравнения движения. Для этого в точном уравнении (2) перейдем к новой переменной $\alpha = \pi - \varphi$. Другими словами, мгновенное положение маятника будем отсчитывать не от нижнего, а от верхнего положения равновесия. Тогда в уравнении (2) можно положить $\sin \alpha \approx \alpha$, и уравнение для $\alpha(t)$ принимает вид:

$$\ddot{\alpha} - \omega_0^2 \alpha = 0, \quad (17)$$

Общее решение этого линейного уравнения имеет вид суперпозиции двух экспонент:

$$\alpha(t) = C_1 e^{\omega_0 t} + C_2 e^{-\omega_0 t}. \quad (18)$$

Постоянные C_1 и C_2 находятся из начальных условий. Здесь удобно, пользуясь обратимостью движения маятника, выбрать начало отсчета времени в точке поворота α_m , т. е. вместо движения вверх от α_c до α_m , происходящего в течение искомого времени t_1 , рассмотреть обратное движение от точки поворота α_m до α_c . Ясно, что оно потребует точно такого же времени t_1 . Тогда в начальный момент $\dot{\alpha}(0) = 0$, откуда $C_1 = C_2$. Из второго начального условия $\alpha(0) = \alpha_m$ находим $C_1 = \alpha_m/2$. Далее подставляем в (18) $\alpha(t_1) = \alpha_c$ и учитываем, что $\exp(-\omega_0 t_1) \ll \exp(\omega_0 t_1)$. Последнее неравенство справедливо при условии, что выбранный нами угол α_c удовлетворяет неравенству $\alpha_c \gg \alpha_m$ (время движения t_1 на втором участке составляет несколько периодов малых колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$). Окончательно для времени движения t_1 на участке от α_c до α_m получаем следующее приближенное выражение:

$$\omega_0 t_1 = \ln \frac{2\alpha_c}{\alpha_m}. \quad (19)$$

Полное время движения $t_0 + t_1$ от нижнего положения до точки поворота φ_m находим, складывая правые части (16) и (19). При сложении из выражения для $t_0 + t_1$ произвольно выбранный нами угол $\alpha_c = \pi - \varphi_c$ выпадает. Это значит, что результат не зависит от выбора точки деления φ_c ; важно лишь, чтобы для произвольно выбранного угла φ_c выполнялись неравенства $\alpha_m \ll \alpha_c \ll 1$. Так как время $t_0 + t_1$ составляет четверть периода колебаний маятника с амплитудой φ_m , для периода колебаний с амплитудами φ_m , близкими к 180° , получаем следующую

теоретическую оценку:

$$T = 4(t_0 + t_1) \approx \frac{4}{\omega_0} \ln \frac{8}{\alpha_m} = \frac{2}{\pi} T_0 \ln \frac{8}{\pi - \varphi_m}. \quad (20)$$

Для амплитуд 179.900° , 179.990° и 179.999° расчет по формуле (20) дает значения периодов $5.37 T_0$, $6.83 T_0$ и $8.30 T_0$ соответственно, хорошо согласующиеся с измеренными в моделирующем эксперименте значениями ($5.5 T_0$, $6.8 T_0$ и $8.3 T_0$). Приближенная формула (20) тем точнее, чем ближе амплитуда φ_m к 180° .

1.8 Колебания с предельно большими амплитудами и перевороты маятника

Интересно сравнить между собой движения маятника для двух значений полной энергии E , которые слегка отличаются от максимального значения потенциальной энергии $E_{\max} = 2mga$ в сторону меньших и больших значений на одну и ту же величину, например, для $E/E_{\max} = 0.9999$ и $E/E_{\max} = 1.0001$. Фазовые траектории этих движений проходят вплотную к сепаратрисе, причем первая лежит внутри, а вторая — вне сепаратрисы. Внутренняя замкнутая кривая соответствует колебаниям с большой амплитудой 178.9° , внешняя кривая — переворотам с медленным прохождением через верхнюю точку. Измеряя в моделирующем эксперименте периоды этих движений, мы получаем значения $3.814 T_0$ и $1.907 T_0$ соответственно. Замечательно, что период колебаний с энергией $E/E_{\max} = 0.9999$ ровно вдвое больше периода переворотов, происходящих при энергии $E/E_{\max} = 1.0001$. Графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ для этих движений показаны на рис. 5

Из моделирующих экспериментов можно сделать вывод о том, что на большей части кругового пути маятника графики рассматриваемых колебаний и переворотов (см. рис. 5) почти совпадают: в случае колебаний маятник, двигаясь от нижней точки, через конечное время останавливается в точке своего максимального отклонения, а затем движется в обратном направлении; в случае переворотов маятник достигает вершины барьера также за конечное время и затем продолжает движение в прежнем направлении. При колебаниях маятник движется туда и обратно, т. е. проходит почти весь круговой путь дважды за период. В фазовой плоскости изображающая точка при этом проходит вдоль верхней и нижней ветвей сепаратрисы, прижимаясь к ней изнутри. При переворотах маятник проходит круговой путь один раз за период, а точка в фазовой плоскости проходит вдоль одной из ветвей сепаратрисы, прижимаясь к ней снаружи. Чтобы объяснить, почему период колебаний вдвое больше периода переворотов, достаточно доказать, что маятник с энергией $E = 2mga - \Delta E$ затрачивает на движение от $\varphi = 0$ до точки наивысшего подъема ровно столько же времени, сколько маятник с энергией $E = 2mga + \Delta E$ затрачивает на движение до перевернутого положения.

Приближенный теоретический расчет времени движения маятника до точки поворота при колебаниях с амплитудой, приближающейся к 180° , приведен в предыдущем разделе. Аналогичный подход можно использовать и для расчета времени движения до перевернутого положения при переворотах.

Мы видим, что графики рассматриваемых колебаний и переворотов (см. рис. 5) почти совпадают с графиками лимитационного движения (см. рис. 1.6). Отличия от лимитационного движения обнаруживаются только в непосредственной окрестности перевернутого положения маятника. Поэтому весь путь маятника от нижнего положения равновесия до точки наибольшего отклонения в случае колебаний и до перевернутого положения в случае переворотов можно мысленно разделить на две характерные части: одна часть (одинаковая для двух рассматриваемых случаев) простирается от нижней точки $\varphi = 0$ до некоторого произвольно выбранного угла φ_c , а вторая часть — от φ_c до максимального отклонения φ_m в первом случае и до $\varphi = \pi$ во втором случае).

Время t_0 движения маятника от $\varphi = 0$ до φ_c (одинаковое для двух рассматриваемых случаев) можно найти, считая, что рассматриваемое движение совпадает с лимитационным. Это было сделано в предыдущем разделе: см. уравнение (16). Теперь мы рассмотрим дальнейшее движение от φ_c и докажем, что время t_1 , необходимое маятнику с энергией $2mga - \Delta E$ (колебательное движение) для достижения точки поворота φ_m равно времени t_2 , в течение которого маятник с энергией $2mga + \Delta E$ (вращательное движение) достигает перевернутого положения $\varphi = \pi$.

Движение маятника в малой окрестности перевернутого положения можно, как и в предыдущем разделе, рассматривать с помощью линеаризованного уравнения движения. Для этого в точном уравнении (2) переходим к новой переменной $\alpha = \pi - \varphi$, задавая мгновенное положение маятника относительно верхнего положения равновесия. Потенциальная энергия маятника зависит от α следующим образом:

$$E_{\text{pot}}(\alpha) = mga(1 + \cos \alpha) \approx 2mga(1 - \frac{1}{4}\alpha^2). \quad (21)$$

Последнее выражение справедливо только для сравнительно малых α , когда маятник находится вблизи перевернутого положения. При $\alpha \ll 1$ момент силы тяжести приблизительно пропорционален углу α , но в отличие от случая устойчивого равновесия этот момент $N = -dE_{\text{pot}}(\alpha)/d\alpha = mga\alpha$ стремится увести маятник в сторону от положения неустойчивого равновесия $\alpha = 0$.

Фазовые траектории движений с энергиями $E = 2mga \pm \Delta E$ вблизи седловой точки $\varphi = \pi$, $\dot{\varphi} = 0$ (в новых переменных $\alpha = 0$, $\dot{\alpha} = 0$) можно найти из закона сохранения энергии, используя приближенное выражение (21) для потенциальной энергии:

$$\frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2}mga\alpha^2 = \pm\Delta E, \quad \text{или} \quad \frac{\dot{\alpha}^2}{\omega_0^2} - \alpha^2 = \pm 4\varepsilon. \quad (22)$$

Здесь мы воспользовались обозначением $\varepsilon = \pm\Delta E/E_{\text{max}} = \pm\Delta E/(2mga)$ для малой безразмерной величины ($\varepsilon \ll 1$), характеризующей относительное отклонение полной энергии маятника E от значения E_{max} , соответствующего сепаратрисе. Из уравнения (22) следует, что фазовые траектории вблизи седловой точки представляют собой гиперболы, асимптотами которых служат две ветви сепаратрисы, встречающиеся в седловой точке ($\varphi = \pi$, $\dot{\varphi} = 0$). Фазовый портрет в окрестности седловой точки показан на рис. 7. Кривая 1 соответствует вращению маятника с энергией $E = 2mga + \Delta E$, кривая 2 описывает колебательное движение с энергией

$E = 2mga - \Delta E$ в окрестности точки поворота φ_m . Эта кривая пересекает ось абсцисс на расстоянии $\alpha_m = \pi - \varphi_m$ от седловой точки.

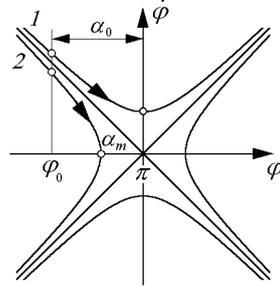


Рис. 7: Фазовые траектории в окрестности седловой точки.

Полагая в уравнении (2) $\sin \alpha \approx \alpha$, приходим к уравнению (17) для $\alpha(t)$, общее решение которого (18) имеет вид суперпозиции двух экспонент. Постоянные C_1 и C_2 в нем находятся из начальных условий. Для колебательного движения эти постоянные были найдены в предыдущем разделе. Время t_1 движения маятника от $\alpha_c = \pi - \varphi_c$ до $\alpha_m = \pi - \varphi_m$ дается формулой (19), в которой α_m теперь удобно выразить через ε , пользуясь соотношением (22) с $\dot{\alpha} = 0$: $\alpha_m = 2\sqrt{-\varepsilon}$ (здесь $\varepsilon < 0$). Таким образом,

$$\omega_0 t_1 = \ln \frac{2\alpha_c}{\alpha_m} = \ln \frac{\alpha_c}{\sqrt{-\varepsilon}}. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь случай вращательного движения с энергией $2mga + \Delta E$. Нас интересует время t_2 , в течение которого маятник движется от φ_c до перевернутого положения $\varphi = \pi$. На фазовой плоскости (см. рис. 7) этому движению соответствует отрезок кривой 1 от α_c до точки пересечения с осью ординат. В этом случае для нахождения t_2 также удобнее рассмотреть обратное во времени движение, приняв за $t = 0$ момент пересечения маятником перевернутого положения: $\alpha(0) = 0$. Значение угловой скорости при $t = 0$ получается из соотношения (22) с $\alpha = 0$: $\dot{\alpha}(0) = 2\sqrt{\varepsilon}\omega_0$. С помощью этих начальных условий ($\alpha(0) = 0$, $\dot{\alpha}(0) = 2\sqrt{\varepsilon}\omega_0$) находим постоянные интегрирования C_1 и C_2 в общем решении (18) линеаризованного дифференциального уравнения, справедливого в окрестности перевернутого положения: $C_1 = \sqrt{\varepsilon}$, $C_2 = -\sqrt{\varepsilon}$. Продолжительность t_2 рассматриваемого движения найдем из уравнения (18), подставляя в него найденные значения C_1 и C_2 , и полагая $\alpha(t_1) = \alpha_c$:

$$\alpha_c = \sqrt{\varepsilon}(e^{\omega_0 t_2} - e^{-\omega_0 t_2}) \approx \sqrt{\varepsilon}e^{\omega_0 t_2}.$$

Произвольно выбранный нами угол α_c с одной стороны должен быть малым (по сравнению с $\pi/2$), чтобы можно было использовать линеаризованное дифференциальное уравнение, но с другой стороны при $\varepsilon \ll 1$ всегда можно выбрать его достаточно большим по сравнению с $\sqrt{\varepsilon}$, чтобы

выполнялось условие $e^{-\omega_c t_2} \ll e^{\omega_c t_2}$. Таким образом,

$$\omega_0 t_2 = \ln \frac{\alpha_c}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (24)$$

Сравнивая выражения (24) и (23), мы видим, что $t_2 = t_1$, если абсолютная величина относительного отклонения энергии маятника $|\varepsilon| = \Delta E/E_{\max}$ от критического значения $E_{\max} = 2mga$, соответствующего сепаратрисе, одинакова в двух рассматриваемых случаях. Учитывая, что и время движения t_0 от положения равновесия $\varphi = 0$ до $\varphi_c = \pi - \alpha_c$ с высокой точностью одинаково, приходим к выводу, что период колебаний вдвое больше, чем период соответствующих переворотов.

Период переворотов T_{rot} равен удвоенному времени движения $t_0 + t_2$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$. Складывая найденное ранее время t_0 (см. выражение (16), из которого следует, что $\omega_0 t_0 \approx \ln(4/\alpha_c)$) и t_2 из уравнения (24), для T_{rot} получаем:

$$T_{\text{rot}} = 2(t_0 + t_2) = \frac{2}{\omega_0} \ln \frac{4}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{\pi} T_0 \ln \frac{4}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (25)$$

Малый угол $\alpha_c = \pi - \varphi_c$, разделяющий две стадии движения маятника (почти вдоль сепаратрисы от $\varphi = 0$ до φ_c и по гиперболе в окрестности седловой точки от φ_c до $\varphi = \pi$) выпадает из формулы (25) для периода переворотов. Таким образом, известный произвол в выборе α_c не сказывается на теоретической оценке (25) периода переворотов (но при этом для α_c должны выполняться неравенства $\sqrt{\varepsilon} \ll \alpha_c \ll 1$). Период переворотов стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. когда энергия стремится к критическому значению $2mga$. При $\varepsilon = 0.0001$ (когда $E = 1.0001E_{\max}$) формула (25) дает $T_{\text{rot}} = 1.907 T_0$, что совпадает с приведенным выше значением, полученным в моделирующем эксперименте.

Чтобы сравнить приближенные аналитические выражения для периода переворотов (25) маятника с энергией $E = 2mga + \Delta E$ и периода колебаний с энергией $E = 2mga - \Delta E$, в полученной ранее формуле (20) следует выразить α_m через $\varepsilon = -\Delta E/(2mga)$: $\alpha_m = 2\sqrt{-\varepsilon} = 2\sqrt{|\varepsilon|}$. В результате приходим к следующей формуле для зависимости периода колебаний T от $|\varepsilon|$:

$$T = 4(t_0 + t_1) = \frac{4}{\omega_0} \ln \frac{4}{\alpha_m} = \frac{2}{\pi} T_0 \ln \frac{8}{\sqrt{|\varepsilon|}}.$$

Эта формула, как и следовало ожидать, отличается от выражения для периода переворотов (25) множителем 2.

1.9 Средние по времени значения потенциальной и кинетической энергий маятника

Малые колебания маятника почти синусоидальны, и средние за период значения потенциальной и кинетической энергий маятника одинаковы. При колебаниях большого размаха, как уже отмечалось, маятник больше времени проводит на пологих склонах потенциальной ямы, поэтому

в среднем потенциальная энергия преобладает над кинетической. В случае движения с энергией $E \approx 2mga$, рассмотренного в предыдущем разделе, большую часть периода маятник медленно движется в окрестности перевернутого положения, где потенциальная энергия имеет почти максимальное значение $2mga = 2J\omega_0^2$, и только на сравнительно короткое время, пока маятник быстро проходит нижнюю часть своего кругового пути, потенциальная энергия превращается в кинетическую.

Для теоретической оценки отношения средних за период значений потенциальной и кинетической энергий маятника при $E \approx 2mga$ можно принять, что большую часть времени угловая скорость маятника практически равна нулю, а на протяжении сравнительно короткого времени движения угловая скорость $\varphi(t)$ зависит от времени почти так же, как и при лимитационном движении, т. е. в соответствии с (14). Поэтому для острого импульса кинетической энергии на графике $E_{\text{kin}}(t)$ можно взять аналитическую зависимость от времени, характерную для лимитационного движения. Так как крылья этого импульса спадают экспоненциально, среднее за период значение кинетической энергии можно вычислять, распространяя пределы интегрирования до $\pm\infty$:

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{J}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{\varphi}^2(t) dt \approx \frac{J}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}^2(t) dt = \frac{J}{T} \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\varphi}(\varphi) d\varphi. \quad (26)$$

Здесь учтено, что на период колебаний T приходятся два импульса кинетической энергии. Интегрирование по времени в (26) заменено интегрированием по углу отклонения. Из выражения (26) следует, что средняя кинетическая энергия $\langle E_{\text{kin}} \rangle$ в этом движении пропорциональна площади S фазовой плоскости, ограниченной сепаратрисой: $2\langle E_{\text{kin}} \rangle = JS/T$. Для $\dot{\varphi}(\varphi)$ можно воспользоваться выражением (11), справедливым для движения по сепаратрисе:

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{J}{T} 2\omega_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{4}{\pi} J\omega_0^2 \frac{T_0}{T}. \quad (27)$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемом движении полная энергия E приблизительно равна $2mga = 2J\omega_0^2$ и что $E_{\text{pot}} = E - E_{\text{kin}}$, для отношения средних энергий получаем:

$$\frac{\langle E_{\text{pot}} \rangle}{\langle E_{\text{kin}} \rangle} = \frac{2J\omega_0^2}{\langle E_{\text{kin}} \rangle} - 1 = \frac{\pi}{2} \frac{T}{T_0} - 1. \quad (28)$$

В случае $\varphi_m = 179.99^\circ$ период колебаний равен $6.83 T_0$. Из (26) находим, что при колебаниях с такой амплитудой отношение средней потенциальной энергии маятника к средней кинетической энергии равно 9.7.

1.10 Влияние трения на фазовый портрет маятника

При наличии вязкого трения фазовый портрет маятника претерпевает качественные изменения. Становится другой топология фазовых траекторий — сравните рисунки 8 и 2.

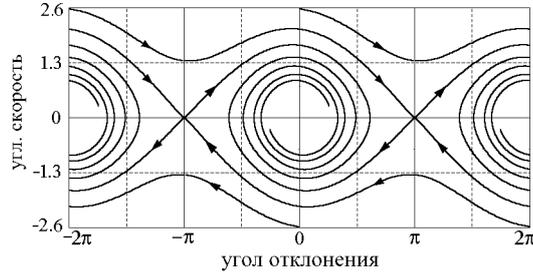


Рис. 8: Фазовый портрет маятника с трением.

Проходящая выше сепаратрисы фазовая траектория, соответствующая вращению маятника против часовой стрелки, с каждым проходом (с каждым оборотом маятника) снижается и приближается к сепаратрисе. Траектория, которая у консервативного маятника проходила вдоль верхней ветви сепаратрисы, теперь не достигает седловой точки $(\pi, 0)$, и превращается в спираль, навивающуюся на фокус, расположенный в начале координат. Внутренняя часть этой спирали, соответствующая малым затухающим колебаниям, подобна фазовой траектории линейного осциллятора с вязким трением.

В случае достаточно слабого вязкого трения можно сделать некоторые теоретические предсказания, касающиеся фазовых траекторий, проходящих вблизи сепаратрисы. Например, возможно оценить минимальную угловую скорость, которую необходимо сообщить маятнику в нижней точке (или в любой другой точке) для того, чтобы он достиг перевернутого положения. Для расчета работы силы трения в этом случае можно принять, что движение происходит по сепаратрисе и считать, что зависимость угловой скорости от угла отклонения приближенно выражается уравнением сепаратрисы (11). Момент силы трения пропорционален угловой скорости: $N_{\text{тр}} = -2\gamma J\dot{\varphi}$. Подставляя сюда угловую скорость $\dot{\varphi}$ из (11), получаем:

$$N_{\text{тр}} = \mp 4\gamma J\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2} = \mp \frac{2mga}{Q} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Этим выражением воспользуемся для вычисления работы сил трения $W_{\text{тр}}$ при движении маятника из начального положения φ_0 в конечное перевернутое положение $\varphi = \pm\pi$:

$$W_{\text{тр}} = \int_{\varphi_0}^{\pm\pi} N_{\text{тр}} d\varphi = -4 \frac{mga}{Q} \left(1 \mp \sin \frac{\varphi_0}{2}\right). \quad (29)$$

Начальную скорость Ω , необходимую для достижения перевернутого положения, можно найти с помощью закона сохранения энергии, учитывая в нем работу сил трения $W_{\text{тр}}$:

$$\frac{1}{2} J\Omega^2 + mga(1 - \cos \varphi_0) + W_{\text{тр}} = 2mga.$$

Подставляя сюда W_{fr} из Eq. (29), получаем искомое выражение для Ω :

$$\Omega^2 = 2\omega_0 \left[1 + \cos \varphi_0 + \frac{4}{Q} \left(1 \mp \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \right]. \quad (30)$$

При $\varphi_0 \neq 0$ знак в выражении (30) зависит от направления начальной скорости. Нужно взять верхний знак, если маятник движется к перевернутому положению по кратчайшему пути, и нижний знак, если он сначала проходит через нижнее положение устойчивого равновесия. Другими словами, при $\varphi_0 > 0$ нужно взять верхний знак для положительных значений Ω , и нижний знак в противном случае. Когда движение маятника возбуждается из нижнего положения ($\varphi_0 = 0$), уравнение (30) дает следующую оценку необходимой начальной скорости:

$$\Omega = \pm 2\omega_0 \sqrt{1 + 2/Q} \approx \pm 2\omega_0(1 + 1/Q).$$

Точное значение Ω будет немного большим, что легко понять, так как движение маятника к перевернутому положению происходит в фазовой плоскости хоть и близко к сепаратрисе, но все же вне ее, где угловая скорость чуть больше. Поэтому фактическая работа сил трения несколько больше рассчитанного значения (29). Например, для $Q = 20$ вышеприведенная оценка дает $\Omega = \pm 2.1\omega_0$, а более точное экспериментальное значение, полученное методом проб и ошибок, равно $\pm 2.10096\omega_0$.

На рис. 9 показаны графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ для аналогичного случая, когда сообщаемая в нижней точке начальная скорость выбрана так, чтобы маятник достиг перевернутого положения (и надолго там задержался) после совершения полутора оборотов.

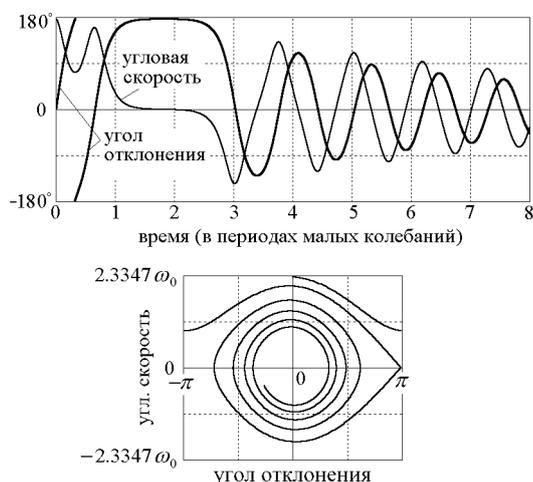


Рис. 9: Перевороты и последующие колебания жесткого маятника с трением ($Q = 20$), которому в положении равновесия сообщена начальная скорость $\Omega = 2.3347\omega_0$.

2 Контрольные вопросы и задачи

2.1 Малые колебания маятника

1.1 Амплитуда, фазовая траектория и энергия малых колебаний. При малых углах отклонения, когда $\sin \varphi \approx \varphi$, возвращающий момент силы тяжести приблизительно пропорционален углу отклонения от положения устойчивого равновесия, и маятник ведет себя подобно линейному осциллятору. В отсутствие трения он совершает простые гармонические колебания. При наличии слабого трения движение маятника можно рассматривать как почти гармоническое колебание с медленно убывающей амплитудой. Выберите полное отсутствие трения и задайте какие-либо начальные условия, обеспечивающие колебания малой амплитуды. Например, пусть начальное отклонение будет равно 30 градусам, а начальная угловая скорость равна нулю. В таком случае амплитуда колебаний составит 30 градусов.

(а) Чему равно максимальное значение скорости в этих колебаниях? Проверьте результат в моделирующем эксперименте.

(б) Какую начальную скорость нужно сообщить маятнику, находящемуся в положении равновесия ($\varphi(0) = 0$), чтобы получить колебания той же амплитуды (30 градусов)? Проверьте свой результат в моделирующем эксперименте. Напоминаем, что начальная угловая скорость должна задаваться при вводе в единицах угловой частоты ω_0 собственных малых колебаний маятника. Чем отличаются такие колебания от колебаний той же амплитуды, возбуждаемых начальным отклонением?

(в) Убедитесь, что при малых амплитудах графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости имеют форму, близкую к синусоидальной. Убедитесь также, что колебания скорости опережают по фазе колебания угла отклонения на четверть периода. Сопоставьте графики угла отклонения и угловой скорости с движением изображающей точки по фазовой плоскости. Какую форму имеет фазовая траектория малых колебаний маятника? При каком масштабе по оси ординат фазовая траектория малых колебаний будет изображаться окружностью на фазовой плоскости?

(г) Что можно сказать о зависимости от времени кинетической и потенциальной энергий маятника, совершающего малые колебания? Докажите, что средние по времени значения кинетической и потенциальной энергий (за период) приближенно одинаковы. Если амплитуда равна 30 градусам, то чему равно отношение полной энергии маятника E к максимально возможному значению потенциальной энергии E/E_{\max} ?

1.2* Период малых колебаний.

На графиках зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости, получаемых в моделирующей программе, деления на шкале времени (метки времени) показаны в естественных для маятника единицах, а именно, в единицах периода колебаний предельно малой амплитуды $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. Таким образом, промежутки между метками времени на осях равны T_0 .

(а) Обратите внимание, что при малых, но конечных амплитудах (скажем, около 30 градусов) период колебаний немного превышает значение T_0 . Судить об этом можно либо по графикам

на экране, либо по показаниям таймера. В последнем случае можно остановить моделирование кнопкой «Пауза» и прочесть показание таймера в момент, когда маятник совершит целое число циклов. Чтобы было удобно снимать дальнейшие показания таймера, во время паузы можно сбросить показания таймера кнопкой «Сброс таймера». Попробуйте измерить (в единицах T_0) период колебаний маятника для нескольких умеренных значений амплитуды.

(б) Какие моменты следует выбирать для снятия показаний таймера (для остановки и пуска моделирования) при экспериментальных измерениях периода колебаний: когда маятник проходит через положение равновесия или когда он достигает положений наибольшего отклонения? Мотивируйте свой ответ. При выполнении измерений периода колебаний нужно снять показание таймера при прохождении маятником определенного положения (например, положения равновесия). Но практически невозможно зафиксировать показание таймера (остановить моделирование) точно в нужный момент. В этом заключается неизбежная причина погрешности измерений. Предложите способ измерения периода колебаний, при использовании которого можно добиться значительного уменьшения погрешности, которая обусловлена указанной причиной.

(в) Сравните экспериментально измеренные значения периода T для заданного значения амплитуды колебаний φ_0 со значениями периода, рассчитанными по приближенной теоретической формуле

$$T = T_0(1 + \varphi_0^2/16), \quad (31)$$

где амплитуда φ_0 выражена в радианах. Составьте таблицу экспериментальных и теоретических значений периода для амплитуд 30, 45, 60, 90, 120, 135 и 150 градусов. Найдите максимальное значение амплитуды φ_0 , вплоть до которого ошибка теоретической формулы (31) не превышает одного процента. Какую ошибку дает эта формула при амплитуде 45 градусов? Как можно получить эту приближенную теоретическую формулу? (Приведите ее вывод в отчете.)

1.3 Затухание малых колебаний.

(а) Покажите теоретически, что малое трение приводит к экспоненциальному затуханию собственных колебаний маятника. При каком значении добротности Q амплитуда уменьшается вдвое за четыре полных цикла колебаний? Введите рассчитанное значение добротности и проверьте результат в моделирующем эксперименте на компьютере.

(б) Убедитесь, что в случае очень сильного вязкого трения, характеризуемого значениями добротности Q ниже критического значения 0.5, выведенный из положения равновесия маятник возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. Может ли маятник пересечь положение равновесия? В чем заключается основное качественное различие фазовых траекторий маятника в случаях слабого и очень сильного затухания?

2.2 Колебания с большими амплитудами

2.1 Сравнение маятника с линейным осциллятором.

При больших углах отклонения от положения равновесия сильнее проявляется нелинейный характер зависимости возвращающего момента силы тяжести от угла отклонения φ . Поскольку

$\sin \varphi < \varphi$, увеличение возвращающего момента с ростом угла отклонения у маятника происходит в меньшей степени, чем у линейного осциллятора. Поэтому маятник относится к нелинейным колебательным системам с «мягкой» возвращающей силой.

(а) Каким образом упомянутое различие между маятником и линейным осциллятором проявляется в графиках зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости? Как эти различия проявляются на фазовой траектории? Приведите качественное физическое объяснение этих различий.

(б) Какие различия между маятником и линейным осциллятором можно наблюдать в характере превращений энергии при колебаниях? Сопоставьте фазовую траекторию маятника с графиком потенциальной энергии от угла отклонения (с потенциальной ямой маятника). Обратите внимание на взаимное расположение точек поворота (точек максимальных отклонений) на фазовой плоскости и в потенциальной яме маятника. При заданных начальных условиях ($\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \Omega$), чему равны значения потенциальной и кинетической энергий маятника в крайних точках и в положении равновесия (в отсутствие трения)?

2.2* Колебания маятника с большими амплитудами.

(а) Исследуйте экспериментально большие колебания маятника в отсутствие трения. Обратите внимание на строго периодический характер графиков динамических переменных при этих отчетливо несинусоидальных колебаниях в консервативной нелинейной системе. Когда амплитуда колебаний несколько превышает 90 градусов, график зависимости угловой скорости от времени имеет пилообразную форму с почти прямолинейными равносторонними треугольными зубцами. Объясните, почему. В этом случае соответствующий график зависимости угла отклонения от времени состоит из зубцов почти параболической формы, в противоположность синусоидальной форме при колебаниях с малой амплитудой. Объясните параболическую форму зубцов в этом случае. Обратите внимание на возрастание периода колебаний при увеличении амплитуды (соседние деления на шкале времени разделены интервалом T_0 , равным периоду предельно малых колебаний маятника).

(б) Обратите внимание на то, как замкнутые фазовые траектории колебаний консервативного маятника вытягиваются в горизонтальном направлении по мере увеличения энергии маятника. Объясните, почему наблюдается (возрастающее с энергией) отличие этих фазовых траекторий от эллиптических (или круговых) фазовых траекторий линейного осциллятора. Для такого объяснения воспользуйтесь сравнением параболической потенциальной ямы линейного осциллятора с синусоидальной потенциальной ямой маятника. Примите, что вблизи дна обе потенциальные ямы имеют одинаковую кривизну, т. е. что период T_0 малых колебаний маятника равен периоду колебаний соответствующего линейного осциллятора. Напомним, что период колебаний линейного осциллятора не зависит от амплитуды (и энергии).

(в) При больших амплитудах маятник сравнительно быстро проходит окрестность положения равновесия (дно потенциальной ямы), затем медленно взбирается на пологий, почти горизонтальный склон верхней части синусоидального барьера, разделяющего соседние потенциальные ямы, а затем также медленно сползает с него. Таким образом, маятник проводит при больших отклонениях гораздо больше времени, чем линейный осциллятор, параболические бе-

рега потенциальной ямы которого имеют неуклонно возрастающую крутизну. Основываясь на сравнении формы эти потенциальных ям, объясните, почему средние за период колебаний значения потенциальной и кинетической энергии маятника не равны друг другу (в то время как у линейного осциллятора средние за период колебаний значения кинетической и потенциальной энергии одинаковы).

(г)* Тщательно изучите экспериментально интересный случай колебаний с амплитудой, близкой к 180° . Задайте начальное отклонение 179.999° при нулевой начальной скорости. Маятник довольно долго находится с одной стороны перевернутого неустойчивого положения равновесия, затем постепенно ускоряется и сравнительно быстро проходит через дно потенциальной ямы (через устойчивое положение равновесия), затем медленно подходит к перевернутому положению с другой стороны, и надолго застревает в таком положении. Сравните время, в течение которого маятник проходит почти весь круговой путь (за исключением малой окрестности перевернутого положения) от одной стороны перевернутого положения до другой, с периодом малых колебаний маятника. Другими словами, оцените длительность уединенного импульса на графике зависимости угловой скорости от времени. Или, что то же самое, оцените длительность крутого почти вертикального участка (размытие ступеньки) на почти прямоугольном графике зависимости угла отклонения от времени.

(д)* Попробуйте определить, каким фактором определяется ширина (длительность) этих почти прямоугольных зубцов графика временной зависимости угла отклонения. Или, что то же самое, каким фактором определяется интервал времени между двумя последовательными импульсами на графике зависимости угловой скорости от времени. Иначе говоря, попробуйте определить физическую причину, определяющую полный период таких необычных колебаний консервативного маятника. (Подсказка: измерьте период колебаний последовательно для значений начального отклонения 179.999° , 179.990° , и 179.900° градусов, каждый раз при нулевой начальной скорости.

(е)** Попробуйте оценить теоретически промежуток времени, в течение которого маятник достигает положения крайнего отклонения 179.99° при возбуждении из положения равновесия сообщением начальной угловой скорости, необходимой для достижения такого максимального отклонения. Полученный результат используйте для оценки периода колебаний маятника с амплитудой 179.99° . Сравните Вашу теоретическую оценку с периодом колебаний, измеренным в моделирующем эксперименте.

(ж)** Обратите внимание на характер превращений энергии в рассмотренном выше движении. Полная энергия маятника E в этом движении почти равна высоте $2mga$ потенциального барьера, т. е. значению потенциальной энергии маятника в перевернутом положении ($\varphi = \pm\pi$). Большую часть периода таких колебаний маятник проводит в окрестности перевернутого положения, так как он очень медленно движется и медленно ускоряется вблизи перевернутого положения. Поэтому среднее за полный период таких колебаний значение потенциальной энергии маятника много больше среднего значения его кинетической энергии. В таких колебаниях потенциальная энергия маятника превращается в кинетическую энергию лишь на короткое время, пока маятник быстро проходит через нижнее положение равновесия (через минимум потенциальной энергии). Попробуйте сделать теоретическую оценку отношения средних (за период ко-

лебаний) значений потенциальной и кинетической энергии для амплитуды 179.99 градусов.

2.3* Движение вдоль сепаратрисы.

(а) Когда маятнику задают начальное отклонение, близкое к 180 градусам, при нулевой начальной скорости, фазовая траектория результирующего движения почти совпадает с сепаратрисой $\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi/2)$. Точка, изображающая механическое состояние маятника в фазовой плоскости, быстро проходит вдоль нижней ветви сепаратрисы, надолго застревает около левой седловой точки $(-\pi, 0)$, а затем возвращается вдоль верхней ветви сепаратрисы. Как нужно задать начальные условия, чтобы изображающая точка сначала проходила бы вдоль верхней ветви сепаратрисы, а затем вдоль нижней ветви? Только вдоль верхней ветви?

(б) Какую начальную скорость Ω (в единицах ω_0) нужно сообщить маятнику в нижнем положении равновесия для того, чтобы изображающая точка двигалась вдоль сепаратрисы фазовой плоскости? Какую начальную скорость нужно для этого сообщить маятнику, отклоненному из положения равновесия на угол 60 градусов? 90°? -90°? 120°? Проверьте свои результаты в моделирующем эксперименте.

(в) Для лимитационного движения (движения по сепаратрисе) рассчитайте интервал времени τ , на протяжении которого кинетическая энергия маятника превосходит его потенциальную энергию. Или, что то же самое, найдите время, в течение которого маятник проходит от одного горизонтального положения до другого, совершая круговой путь от одной стороны перевернутого положения до другой через нижнее положение равновесия. Выразите этот интервал времени в единицах T_0 периода малых колебаний маятника. Проверьте свой теоретический результат в моделирующем эксперименте на компьютере.

2.4 Колебания с большими амплитудами при наличии трения.

(а) Исследуйте влияние вязкого трения на колебания с большими амплитудами. Начните со случая сравнительно слабого трения (скажем, $Q \approx 20$). Обратите внимание на изменение формы графиков по мере того, как механическая энергия маятника и амплитуда постепенно уменьшаются из-за трения. В частности, обратите внимание на то, как первоначально пилообразная кривая графика угловой скорости (с ее острыми почти прямолинейными треугольными зубцами) и первоначальная кривая графика угла отклонения (с почти параболическими зубцами) постепенно эволюционируют, приближаясь по форме к синусоидальным кривым, характерным для гармонического осциллятора.

(б) Под влиянием вязкого трения изменяется топология фазовых траекторий маятника. Вместо замкнутых кривых, соответствующих строго периодическим колебаниям консервативного маятника, мы видим скручивающиеся спирали, совершающие бесконечное число постепенно сжимающихся витков вокруг фокуса, расположенного в начале координат фазовой плоскости. Обратите внимание на то, как постепенно изменяется форма витков фазовой траектории по мере того, как они отдаляются от сепаратрисы. Приведите качественное объяснение наблюдаемым изменениям. Напомним, что в случае линейного осциллятора вязкое трение приводит к сжатию витков фазовой траектории, при котором сохраняется геометрическое подобие витков в процессе приближения фазовой кривой к началу координат.

(в) Работая в окне программы «Преобразования энергии», обратите внимание на то, как ско-

рость диссипации механической энергии зависит от положения изображающей точки в потенциальной яме маятника. В какой момент на протяжении цикла колебаний скорость диссипации механической энергии максимальна? Мотивируйте свой ответ.

(г)** С помощью закона сохранения энергии рассчитайте минимальное значение начальной угловой скорости, которую нужно сообщить маятнику в нижнем положении равновесия для того, чтобы он достиг перевернутого положения (неустойчивого равновесия) в случае полного отсутствия трения, и при слабом трении, когда добротность Q равна 20. Какую начальную скорость нужно сообщить маятнику для достижения перевернутого положения, если первоначально он был отклонен из положения устойчивого равновесия на угол 60 градусов? На угол 90 градусов?

2.3 Перевороты и вращения маятника

Маятник вращается (совершает полные обороты), если его полная энергия превышает $2mga$, т. е. превышает максимальное значение потенциальной энергии, соответствующее перевернутому положению. Влияние поля тяжести сказывается в том, что вращение маятника в вертикальной плоскости происходит неравномерно: угловая скорость максимальна (при полном отсутствии трения) в те моменты, когда маятник проходит через нижнее положение устойчивого равновесия, и минимальна, когда он проходит через верхнее положение неустойчивого равновесия.

3.1 Угловая скорость при переворотах маятника.

(а) Выберите полное отсутствие трения. Рассчитайте минимальное значение начальной угловой скорости, которую нужно сообщить маятнику в нижнем положении равновесия, чтобы маятник совершил полный переворот. Обратите внимание на характер графика зависимости угловой скорости от времени при движении с начальной скоростью, превышающей это минимальное значение: когда маятник совершает перевороты, его угловая скорость изменяется периодически (т. е. угловая скорость осциллирует со временем), но знак угловой скорости (направление вращения) не изменяется, и график не пересекает ось времени.

(б)* Как изменится период этих колебаний угловой скорости, если увеличить начальную скорость, сообщаемую маятнику при возбуждении? Рассчитайте минимальное значение угловой скорости при переворотах маятника для заданного значения Ω начальной угловой скорости. Найдите асимптотическое поведение периода вращения от начальной угловой скорости $T(\Omega)$ для значений полной энергии E , значительно превышающих потенциальную энергию перевернутого маятника ($E \gg 2mga$). Сделайте теоретическую оценку периода вращения маятника, которому в нижней точке сообщена угловая скорость, равная 3 единицам угловой частоты малых колебаний. Проверьте результат расчета в моделирующем эксперименте.

(в) Какие начальные условия нужно ввести в моделирующем эксперименте для того чтобы получить фазовую траекторию, проходящую над сепаратрисой? Расположенную ниже сепаратрисы? Совпадающую с верхней или с нижней ветвью сепаратрисы?

3.2* Периоды переворотов и больших колебаний.

(а) Особенно интересно сравнить период переворотов маятника в отсутствие трения с пери-

одом колебаний того же консервативного маятника в случае, когда полная энергия E близка к максимально возможному значению потенциальной энергии $E_{\max} = 2mga$. В этом случае фазовые траектории переворотов и колебаний проходят в окрестности сепаратрисы. Используя моделирующий эксперимент, выполните измерение периода для двух значений полной энергии E , которые слегка отличаются от E_{\max} на одну и ту же величину в большую и меньшую сторону. Например, возьмите сначала $E/E_{\max} = 0.9999$ а затем $E/E_{\max} = 1.0001$.

(б)* Чему равно отношение измеренных Вами периодов движения маятника для этих двух случаев? Как можно объяснить наблюдаемое отношение периодов?

(в)** Попробуйте получить теоретическую оценку периода колебаний маятника с полной энергией $E/E_{\max} = 0.9999$, и периода вращения маятника с полной с энергией $E/E_{\max} = 1.0001$.

(г)** Когда полная энергия маятника E превышает высоту потенциального барьера $E_{\max} = 2mga$, период вращения T быстро убывает при увеличении полной энергии маятника. Найдите асимптотическое поведение периода $T(E)$ при стремлении энергии E к бесконечности.

3.3* Перевороты маятника при наличии трения.

(а) Изучите экспериментально вращение маятника при наличии слабого вязкого трения. Обратите внимание на то, как фазовая траектория постепенно приближается к сепаратрисе. Какое значение имеет полная энергия маятника в тот момент, когда фазовая траектория пересекает сепаратрису? Обратите внимание на то, что до пересечения сепаратрисы, пока маятник совершает полные перевороты, кинетическая энергия и угловая скорость нигде не обращаются в нуль.

(б)** Используя закон сохранения энергии, оцените минимальную начальную угловую скорость, которую необходимо сообщить маятнику в нижнем положении равновесия для того чтобы он совершил полный оборот. Добротность маятника $Q = 15$. Какая начальная угловая скорость нужна для того чтобы маятник совершил два оборота? Проверьте свои расчеты в моделирующем эксперименте. Методом проб и ошибок уточните полученную оценку необходимой минимальной скорости. Объясните наблюдаемое небольшое различие теоретического и экспериментального значений минимальной начальной скорости.

2.4 Приложение: Сводка основных формул

Дифференциальное уравнение движения маятника:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0,$$

где ω_0 — частота колебаний предельно малой амплитуды:

$$\omega_0^2 = \frac{mga}{J} = \frac{g}{l}; \quad l = \frac{J}{ma}.$$

Здесь m — масса маятника, a — расстояние между горизонтальной осью (точкой подвеса) и центром масс, J — момент инерции относительно оси вращения, $l = J/ma$ — приведенная длина физического маятника и g — ускорение свободного падения.

Уравнение фазовой траектории в отсутствие трения:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{\omega_0^2} + 2(1 - \cos \varphi) = \frac{E}{E_0},$$

где E — полная энергия маятника, а

$$E_0 = \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}mga = \frac{1}{4}(E_{\text{pot}})_{\text{max}}.$$

Здесь $(E_{\text{pot}})_{\text{max}} = 2mga$ — максимально возможное значение потенциальной энергии, которое маятник имеет в перевернутом вертикальном положении.

Уравнение сепаратрисы в фазовой плоскости имеет вид:

$$\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi/2).$$

Зависимость угла отклонения и угловой скорости маятника для лимитационного движения (движения по сепаратрисе):

$$\varphi(t) = \pi - 4 \arctan(e^{-\omega_0 t}), \quad \dot{\varphi}(t) = \pm \frac{2\omega_0}{\cosh(\omega_0 t)} = \pm \frac{4\omega_0}{(e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t})}.$$