

Осциллятор с несинусоидальной внешней силой

Учебное пособие

Бутиков Е. И.

Аннотация. В учебном пособии дано описание моделируемой физической системы и приведены теоретические сведения, необходимые студентам для подготовки к лабораторной работе «Осциллятор с несинусоидальной внешней силой».

Вторую часть пособия составляют контрольные вопросы, теоретические и экспериментальные задачи для самостоятельной работы, а также материал для возможных индивидуальных заданий студентам (по указанию преподавателя).

Содержание

1	Теоретические сведения	2
1.1	Моделируемая физическая система	2
1.2	Дифференциальное уравнение колебаний осциллятора	3
1.3	Гармоники внешней силы и установившихся колебаний осциллятора	4
1.4	Вынужденные колебания осциллятора как собственные колебания около чередующихся смещенных положений равновесия	8
1.5	Переходные процессы при раскатке осциллятора ступенчатым внешним моментом	9
1.6	Оценка размаха установившихся колебаний	11
1.7	Установившиеся колебания при частых поворотах шатуна	15
1.8	Превращения энергии	16
1.9	Электромагнитный аналог осциллятора	18
2	Контрольные вопросы и задачи	20
2.1	Резонансное возбуждение осциллятора	20
2.2	Нерезонансные вынужденные колебания	22
2.3	Приложение: сводка основных формул	24

1 Теоретические сведения

В этой главе рассматриваются вынужденные колебания торсионного пружинного осциллятора при периодических принудительных мгновенных изменениях положения равновесия. Такое воздействие на осциллятор эквивалентно приложению внешнего крутящего момента с кусочно-постоянной зависимостью от времени, имеющей вид прямоугольных импульсов. Это пример вынужденных колебаний осциллятора под действием периодической, но негармонической внешней силы.

1.1 Моделируемая физическая система

Для изучения вынужденных колебаний линейного осциллятора при несинусоидальном периодическом внешнем воздействии здесь рассматривается такой же механический торсионный пружинный осциллятор, что и при изучении колебаний, вынуждаемых синусоидальной силой. Рисунок 1 дает представление о схематическом изображении осциллятора с возбуждающим шатуном на экране компьютера в моделирующей программе.

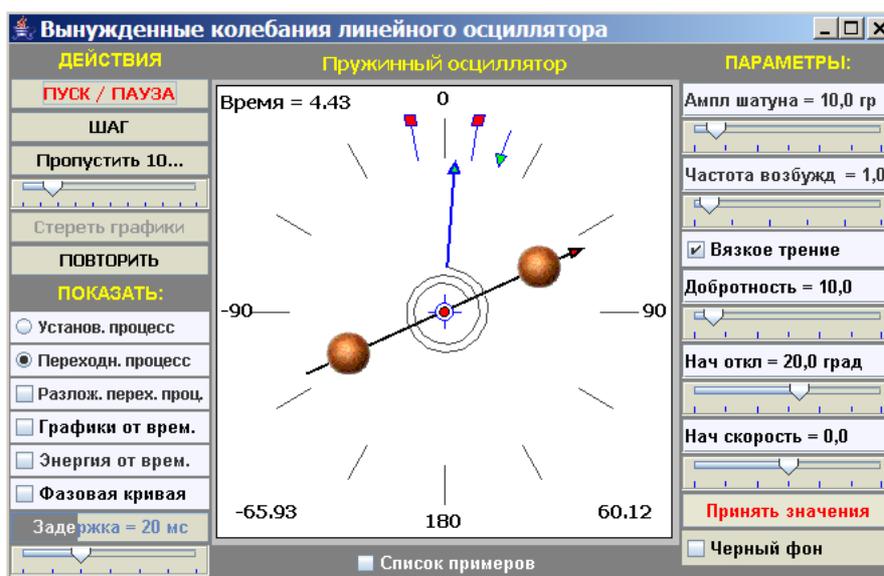


Рис. 1: Торсионный пружинный осциллятор, возбуждаемый заданным периодическим движением шатуна, к которому прикреплена спиральная пружина.

Упругая спиральная пружина, прикрепленная к ротору (маховику), обеспечивает ему устойчивое положение равновесия. Второй конец пружины соединен с шатуном, который можно поворачивать вокруг оси, общей с осью маховика. При повороте шатуна положение равновесия маховика смещается вместе с шатуном на такой же угол. Осциллятор может совершать около

нового положения равновесия затухающие собственные колебания. При слабом и умеренном трении частота этих колебаний почти совпадает с собственной частотой в отсутствие трения ω_0 , зависящей от жесткости пружины D и момента инерции маховика: $\omega_0 = \sqrt{D/J}$.

Внешнее периодическое воздействие на осциллятор в виде симметричных прямоугольных импульсов можно реализовать, если через равные промежутки времени принудительно поворачивать шатун поочередно то в одну, то в другую сторону на один и тот же угол. Будем предполагать, что эти принудительные повороты шатуна, а значит и смещения положения равновесия маховика, происходят настолько быстро, что маховик за это время не успевает ни повернуться на сколько-нибудь заметный угол, ни изменить своей угловой скорости. В математической модели системы эти скачкообразные повороты возбуждающего шатуна считаются мгновенными.

Смещение положения равновесия маховика равносильно приложению к нему дополнительного постоянного внешнего момента. Поэтому периодические скачкообразные повороты шатуна можно рассматривать как действие на осциллятор кусочно-постоянного внешнего момента сил. Вынужденные колебания линейного осциллятора, происходящие в результате такого внешнего воздействия, могут служить удобным примером для изучения поведения линейной колебательной системы под действием периодической, но *негармонической* внешней силы.

1.2 Дифференциальное уравнение колебаний осциллятора

Пусть скачкообразные повороты шатуна происходят поочередно вправо и влево через равные промежутки времени $T/2$, так что на протяжении интервала $(0, T/2)$ положение равновесия маховика смещено вправо на некоторый угол ϕ_0 , а в течение следующего интервала $(T/2, T)$ положение равновесия смещено влево на такой же угол. Затем все повторяется сначала. Таким образом, T — это полный период внешнего воздействия.

Будем считать, что стрелка, прикрепленная к маховику, при ненапряженной пружине ориентирована параллельно шатуну. Другими словами, шатун и стрелка показывают на одно и то же деление шкалы, если пружина, соединяющая шатун с маховиком, не деформирована. Нулевое деление шкалы соответствует среднему положению шатуна (вертикальному на условном изображении системы в моделирующей программе), из которого он поочередно смещается в точки шкалы $\pm\phi_0$. Когда стрелка, указывающая ориентацию маховика, показывает на деление шкалы, характеризуемое углом φ , деформация пружины определяется углом $\varphi - \phi_0$, если шатун отклонен вправо, или углом $\varphi + \phi_0$, если шатун отклонен влево.

Таким образом, пока шатун смещен вправо, на маховик со стороны пружины действует момент упругой силы, равный $-D(\varphi - \phi_0)$, и на этом интервале времени вращательное движение маховика с моментом инерции J в отсутствие трения описывается дифференциальным уравнением:

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi - \phi_0). \quad (1)$$

Перенесем член $-D\varphi$ (часть момента упругой силы, пропорциональную углу φ отклонения маховика от нулевого деления шкалы) из правой части уравнения (1) в левую. Можно считать,

что оставшийся в правой части дополнительный момент сил $D\phi_0$ обусловлен смещением шатуна из среднего положения вправо на угол ϕ_0 . Разделим обе части уравнения на момент инерции J , и введем обозначение $\omega_0 = \sqrt{D/J}$ для характеризующей осциллятор величины ω_0 . Физический смысл этой величины — частота собственных колебаний осциллятора в отсутствие трения. В результате уравнение вращательного движения маховика на интервале времени $(0, T/2)$ принимает следующий вид:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \omega_0^2 \phi_0. \quad (2)$$

Когда в момент $T/2$ шатун скачком поворачивается влево, знак момента упругой силы в правой части уравнения (2) изменяется на противоположный. Поэтому вращение маховика в течение интервала времени $(T/2, T)$ описывается аналогичным уравнением, отличающимся от (2) лишь знаком постоянного члена в правой части. Поэтому

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \begin{cases} \omega_0^2 \phi_0, & (0, T/2), \\ -\omega_0^2 \phi_0, & (T/2, T). \end{cases} \quad (3)$$

При наличии вязкого трения в дифференциальное уравнение (2) вынужденных колебаний осциллятора нужно добавить еще один член, пропорциональный угловой скорости маховика $\dot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \begin{cases} \omega_0^2 \phi_0, & (0, T/2), \\ -\omega_0^2 \phi_0, & (T/2, T). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь постоянная затухания γ характеризует интенсивность вязкого трения в системе. Из-за трения колебания осциллятора, происходящие на собственной частоте ω_0 , постепенно затухают, и по истечении некоторого интервала времени после начала действия внешней силы происходит установление колебаний: угол $\varphi(t)$, характеризующий ориентацию маховика, будет изменяться периодически с периодом T в ритме изменения внешнего воздействия. Переходный процесс установления вынужденных колебаний в системе в общем случае продолжается тем дольше, чем большее время τ требуется для затухания собственных колебаний осциллятора: $\tau = 1/\gamma$.

Напомним, что в случае синусоидальной внешней силы установившиеся вынужденные колебания принимают не только период внешнего воздействия, но и повторяют его форму (т. е. тоже характеризуются синусоидальной зависимостью от времени). При любой другой периодической внешней силе установившиеся вынужденные колебания имеют такой же как у вынуждающей силы период, но иную форму временной зависимости.

1.3 Гармоники внешней силы и установившихся колебаний осциллятора

Для нахождения формы установившихся колебаний можно воспользоваться двумя принципиально различными способами.

Первый способ основан на разложении периодической временной зависимости внешней силы в ряд Фурье, т. е. на представлении этой силы в виде суперпозиции синусоидальных составляющих, называемых *гармониками*. Совокупность таких синусоидальных составляющих с дис-

кретными частотами образует *спектр* периодического колебания сложной формы. Благодаря линейности дифференциального уравнения осциллятора действие каждой из гармонических составляющих вынуждающей силы можно рассмотреть по отдельности и найти соответствующее данной гармонике синусоидальное вынужденное колебание осциллятора. Результирующее вынужденное колебание находится как наложение (как сумма) этих синусоидальных колебаний с разными частотами.

Таким образом, каждой гармонике «входного» внешнего периодического воздействия на осциллятор соответствует своя гармоническая составляющая той же частоты в «выходных» установившихся колебаниях осциллятора. Однако благодаря избирательной реакции осциллятора на гармонические воздействия разных частот отношения амплитуд гармоник в спектре выходного колебания будут иными, нежели отношения амплитуд тех же гармоник в спектре входного периодического воздействия. Поэтому и график установившихся колебаний на выходе будет отличаться по форме от графика временной зависимости входного воздействия.

В частности, может оказаться, что какая-либо n -я гармоническая составляющая вынуждающей силы с относительно небольшой амплитудой вызывает особенно сильные колебания осциллятора. Так происходит, когда частота $\omega_n = n\omega = n \cdot 2\pi/T$ этой гармонике близка к собственной частоте осциллятора ω_0 , так как вынужденные колебания осциллятора под действием такой синусоидальной силы происходят в условиях, близких к резонансным. Напротив, относительный вклад гармонических составляющих вынуждающей силы, частоты которых лежат далеко от максимума резонансной кривой (амплитудно-частотной характеристики осциллятора), на «выходе» системы будет заметно ослаблен благодаря резонансной селективности реакции осциллятора — в спектре его результирующих колебаний далекие от резонанса гармоники оказываются в значительной мере подавленными.

Отличие формы установившихся колебаний от формы вынуждающей силы обусловлено не только изменением соотношения амплитуд гармоник на «входе» и на «выходе», но и различиями в изменении фаз разных гармоник при их передаче с «входа» на «выход». В случае высокодобротного ($Q \gg 1$) осциллятора, имеющего «острую» амплитудно-частотную характеристику и почти ступенчатую фазо-частотную характеристику, гармоники с частотами ниже резонансной ($\omega_n < \omega_0$) имеют на выходе практически такие же фазы, как и на входе, но высокочастотные гармоники ($\omega_n > \omega_0$) имеют на выходе инвертированные фазы (в выходных колебаниях осциллятора эти гармоники представлены с противоположными по отношению к вынуждающей силе фазами).

Гармоника внешней силы, частота которой близка к ω_0 , имеет на выходе заметно увеличенный относительный вклад, и отстает по фазе почти на $\pi/2$ от соответствующих ей синусоидальных колебаний в составе внешней силы.

Приведем аналитическое решение дифференциального уравнения (4), основанное на разложении входящей в его правую часть периодической кусочно-постоянной ступенчатой функции в ряд Фурье. Это разложение содержит только нечетные гармоники (при сделанном выборе начала отсчета времени — только синусы) с частотами $\omega_k = k\omega$ ($k = 1, 3, 5 \dots$), где $\omega = 2\pi/T$ — частота внешнего воздействия:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{4\phi_0\omega_0^2}{\pi k} \sin \omega_k t. \quad (5)$$

Отметим, что амплитуды последовательных гармоник в разложении периодической ступенчатой функции убывают с увеличением их номера k и частоты $\omega_k = k\omega$ сравнительно медленно — как $1/k$. Рассматриваемый случай дает пример действительно полигармонического внешнего воздействия на осциллятор, так как спектр ступенчатой внешней силы богат гармониками.

Периодическое частное решение уравнения (5) для зависимости угла отклонения маховика осциллятора от времени $\varphi(t)$ при установившихся вынужденных колебаниях дает:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{4\phi_0}{\pi k} \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_k^2)^2 + 4\gamma^2\omega_k^2}} \sin(\omega_k t + \alpha_k). \quad (6)$$

где фазы α_k отдельных гармонических составляющих определяются соотношениями:

$$\tan \alpha_k = \frac{2\gamma\omega_k}{\omega_k^2 - \omega_0^2}. \quad (7)$$

Из формул (6) и (7) можно увидеть отмеченные выше особенности реакции линейного осциллятора на периодическое внешнее воздействие с прямоугольной зависимостью от времени, а именно, каким образом амплитуды и фазы гармоник «входного» спектра внешней силы преобразуются при переходе к характеристикам спектра «выходных» установившихся колебаний осциллятора. Видно, в частности, что при совпадении частоты ω_k одной из гармоник внешнего момента с резонансной частотой осциллятора ω_{res} знаменатель соответствующего члена суммы в (6) оказывается очень малым, особенно для осциллятора с малым показателем затухания ($\gamma \ll \omega_0$), т. е. с высокой добротностью ($Q = \omega_0/2\gamma \gg 1$). Иными словами, реакция осциллятора в этом случае имеет характер *резонанса*. Напомним, что при слабом и умеренном трении резонансная частота очень близка к частоте ω_0 собственных колебаний в отсутствие трения:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right).$$

Поскольку относительная разность ω_{res} и ω_0 представляет собой величину второго порядка по малому параметру $\gamma/\omega_0 = 1/(2Q)$, в большинстве практически важных случаев можно не делать различия между собственной и резонансной частотами и полагать $\omega_{\text{res}} = \omega_0$.

Преобразование спектра прямоугольного входного воздействия в спектр колебаний на выходе иллюстрирует рис. 2. Резонансная кривая в левом верхнем углу характеризует реакцию осциллятора с данными параметрами на отдельные гармонические составляющие внешней силы.

При плавном изменении (сканировании) частоты ω внешнего синусоидального воздействия резонансная реакция осциллятора возможна только при совпадении этой частоты с ω_{res} . Другими словами, возможен только один резонанс, наступающий при совпадении периода T синусоидального воздействия с периодом T_0 собственных колебаний осциллятора. Однако при ска-

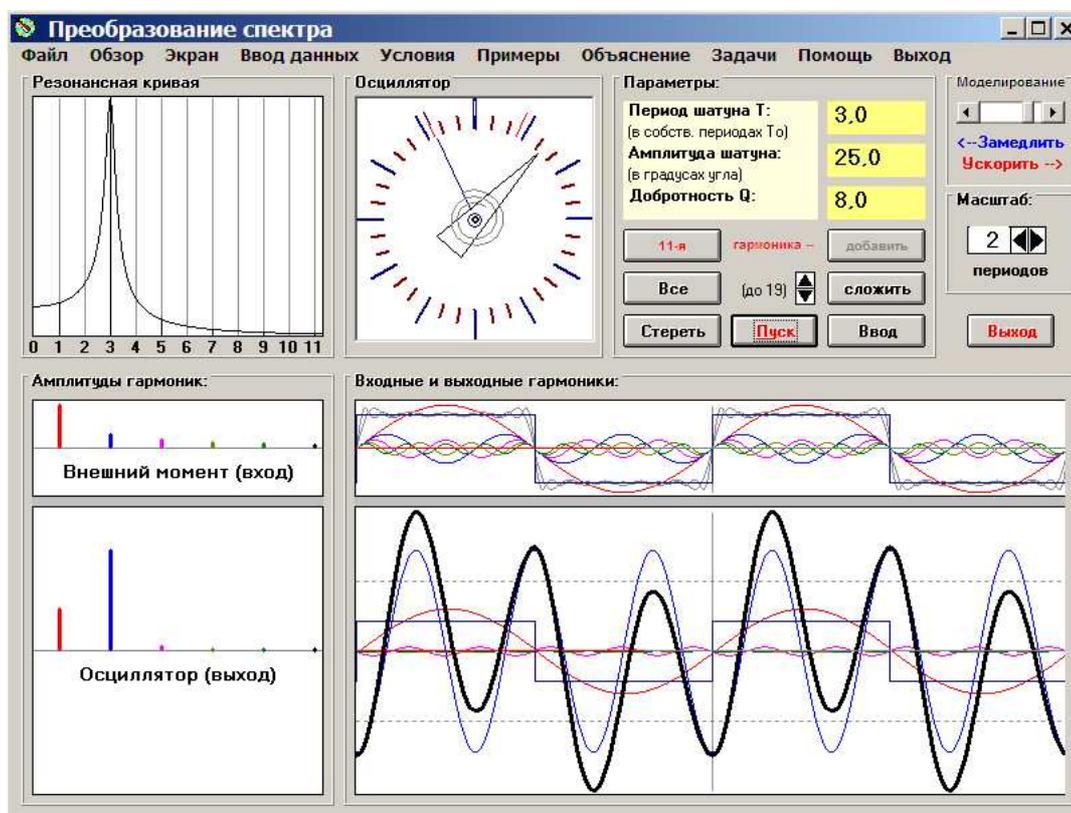


Рис. 2: Преобразование спектра внешнего входного момента с прямоугольной зависимостью от времени в спектр установившихся выходных вынужденных колебаний осциллятора.

нировании периода внешнего воздействия с прямоугольной зависимостью от времени обнаруживается множество резонансов: резонанс наступает, когда период внешнего воздействия как совпадает с собственным периодом осциллятора, так и тогда, когда он втрое, впятеро и вообще в нечетное число раз больше собственного периода, т. е. при $T = (2n + 1)T_0$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Высшие резонансы с $n > 1$ наступают, когда собственная частота осциллятора совпадает с частотой одной из нечетных гармоник внешней силы.

Ступенчатую функцию в правой части (4) можно представить как сумму других функций разными способами. Возможно разложение в ряд не только по синусам и косинусам, но и по другим полным системам функций. С математической точки зрения все такие разложения одинаково допустимы. Целесообразность разложения именно в ряд Фурье, т. е. на сумму гармонических составляющих, связана с *физикой*: только при синусоидальной форме внешнего воздействия реакция осциллятора будет выражаться в результирующем движении, имеющем такую же форму временной зависимости.

Кроме того, линейный осциллятор с высокой добротностью Q (т. е. с острой резонансной

кривой) будет заметным образом реагировать только на ту гармонику сложного внешнего воздействия (сигнала), частота которой близка к его собственной частоте. В этом отношении осциллятор можно рассматривать как своего рода спектральный прибор, выделяющий в сложном сигнале определенную гармоническую составляющую. Иначе говоря, высокочастотный пере-страиваемый по частоте осциллятор производит фактическое разложение сложного входного воздействия в ряд Фурье на *физическом уровне*. Именно поэтому для осциллятора синусоидальные функции оказываются физически выделенными по сравнению с различными полными системами других функций.

1.4 Вынужденные колебания осциллятора как собственные колебания около чередующихся смещенных положений равновесия

Другой способ нахождения установившихся колебаний при действии на осциллятор ступенчатой внешней силы, т. е. нахождения периодического частного решения неоднородного дифференциального уравнения (4), основан на представлении установившегося движения как сменяющих друг друга затухающих собственных колебаний осциллятора около чередующихся положений равновесия $+\phi_0$ и $-\phi_0$. На протяжении первого полуцикла от $t = 0$ до $t = T/2$ положение равновесия находится при $\varphi = +\phi_0$. Для этого полуцикла зависимость $\varphi(t)$ от t может быть представлена следующим образом:

$$\varphi(t) = \phi_0 + Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta), \quad (0, T/2), \quad (8)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ — частота собственных затухающих колебаний, а A и θ — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий для первого полуцикла установившихся колебаний. В течение следующего полуцикла ($T/2, T$) затухающие собственные колебания происходят около смещенного в противоположную сторону положения равновесия, и для этого интервала времени описывающая колебания функция $\varphi(t)$ имеет вид:

$$\varphi(t) = -\phi_0 - Ae^{-\gamma(t-T/2)} \cos(\omega_1(t - T/2) + \theta), \quad (T/2, T), \quad (9)$$

где постоянные A и θ имеют те же значения, что и в (8). Так будет потому, что при установившихся колебаниях график движения в течение второй половины периода, когда шатун смещен влево, будет со сдвигом по времени на $T/2$ повторять в зеркальном отражении график движения в течение первой половины периода. Это соотношение отчетливо видно из рисунка 3, на котором приведены графики установившихся колебаний при $T = 3T_0$ (период T вынуждающей силы втрое больше собственного периода T_0).

Постоянные A и θ для любых заданных значений T и γ можно рассчитать, пользуясь тем, что при скачкообразном (мгновенном) повороте шатуна из одного положения в другое угол отклонения маховика и его угловая скорость не успевают измениться. Это требование дает два уравнения для нахождения A и θ . Решая их, находим:

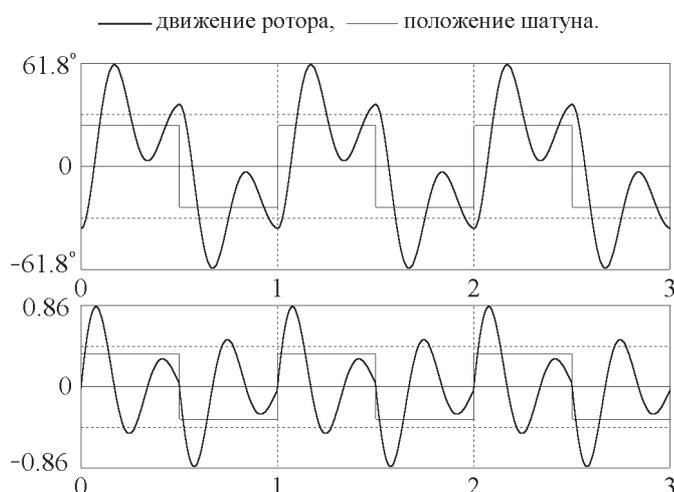


Рис. 3: Графики угла отклонения (вверху) и угловой скорости (внизу) для установившихся колебаний осциллятора при резонансе $T = 3T_0$ (добротность $Q = 3$, амплитуда шатуна $\phi_0 = 25^\circ$).

$$\tan \theta = -\frac{e^{-\gamma T/2}[\omega_1 \sin(\omega_1 T/2) + \gamma \cos(\omega_1 T/2)] + \gamma}{e^{-\gamma T/2}[\omega_1 \cos(\omega_1 T/2) - \gamma \sin(\omega_1 T/2)] + \omega_1}, \quad (10)$$

$$A = \frac{2\phi_0}{e^{-\gamma T/2} \cos(\omega_1 T/2 + \theta) + \cos \theta}. \quad (11)$$

Выражения (8)–(11) описывают установившееся движение только на промежутке времени от 0 до T , т. е. в них нельзя формально подставлять значения аргумента t , превышающие T . Тем не менее, имея график периодической функции $\varphi(t)$ для интервала $[0, T]$, ее значение для произвольного момента времени t можно получить простым сдвигом на соседние промежутки времени $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$ и т.д., учитывая, что $\varphi(t + T) = \varphi(t)$.

1.5 Переходные процессы при раскатке осциллятора ступенчатым внешним моментом

Рассмотренное выше представление вынужденных колебаний осциллятора под действием кусочно-постоянной внешней силы как последовательности собственных колебаний около чередующихся положений равновесия позволяет понять многие особенности поведения осциллятора не только в установившихся колебаниях, но и в переходном процессе. В частности, легко понять физическую причину резонансного роста амплитуды колебаний, когда период внешнего ступенчатого воздействия совпадает с собственным периодом осциллятора, и когда он в нечетное число раз больше собственного периода.

Для определенности будем считать, что до включения внешнего воздействия ротор осциллятора покоился в положении равновесия. Когда шатун скачком смещается в отклоненное положение, осциллятор начинает совершать около него собственные колебания, причем это движение начнется из среднего положения $\varphi = 0$ при нулевой начальной скорости $\dot{\varphi} = 0$. Поэтому, пока шатун смещен вправо, движение маховика происходит по закону

$$\varphi(t) = \phi_0 - \phi_0 \exp(-\gamma t) \cos \omega_1 t.$$

(При слабом трении $\omega_1 \approx \omega_0$). Таким образом, начиная движение с нулевой угловой скоростью из $\varphi = 0$ при $t = 0$, маховик проходит через смещенное положение равновесия $\varphi = \phi_0$ через четверть периода (когда $\omega_0 t = \pi/2$), и достигает своего крайнего отклонения вправо, равного почти $\varphi = 2\phi_0$, через половину периода (когда $\omega_0 t = \pi$ и $t = T_0/2$). (В отсутствие трения он бы достиг отклонения $\varphi = 2\phi_0$.) Если период принудительного движения шатуна T равен T_0 , то маховик оказывается в этой точке $\varphi \approx 2\phi_0$ с нулевой угловой скоростью как раз в тот момент $t = T/2$, когда шатун скачком поворачивается в левое отклоненное положение $-\phi_0$, которое становится новым положением равновесия маховика для следующего интервала времени $(T_0/2, T)$. Таким образом, следующий полуцикл его собственных колебаний опять начинается при нулевой угловой скорости, но уже при отклонении вправо приблизительно на угол $3\phi_0$ от (смещенного влево) нового положения равновесия. Это начальное отклонение почти на $2\phi_0$ больше, чем в предыдущем полуцикле собственных колебаний, т. е. в момент предыдущего скачкообразного поворота шатуна в новое положение. (Отклонение было бы точно на $2\phi_0$ больше предыдущего при полном отсутствии трения.)

Таким образом, за каждый период внешнего воздействия размах колебаний осциллятора в отсутствие трения увеличивается на одну и ту же величину $4\phi_0$, если этот период совпадает с периодом собственных колебаний или превышает его в нечетное число раз. В реальной системе такой линейный во времени неограниченный рост амплитуды невозможен из-за трения. Амплитуда растет приблизительно линейно только в начальной стадии переходного процесса раскачки осциллятора из состояния покоя. Резонансный рост постепенно замедляется, и в конце концов устанавливается стационарный режим колебаний, когда увеличение амплитуды при перескоке шатуна компенсируется ее уменьшением из-за трения.

Рассмотренный процесс раскачки осциллятора из состояния покоя с постепенным выходом в режим установившихся колебаний особенно наглядно изображается с помощью фазовой траектории, показанной (вместе с графиками угла отклонения и угловой скорости) на рис. 4. Если до включения внешнего воздействия осциллятор покоился в среднем положении $\varphi = 0$, фазовая траектория выходит из начала координат фазовой плоскости, и ее начальный участок представляет собой скручивающуюся эллиптическую спираль с фокусом в точке $(+\phi_0, 0)$. Этот фокус соответствует новому положению равновесия, смещенному вправо. При $T = 3T_0$ за время $T/2$, пока шатун смещен вправо, спираль совершает полтора оборота вокруг фокуса. Следующий участок фазовой траектории, соответствующий колебаниям осциллятора после перескока шатуна в левое положение, изображается аналогичным отрезком спирали, скручивающейся к другому фокусу, расположенному в симметричной точке $(-\phi_0, 0)$ фазовой плоскости.

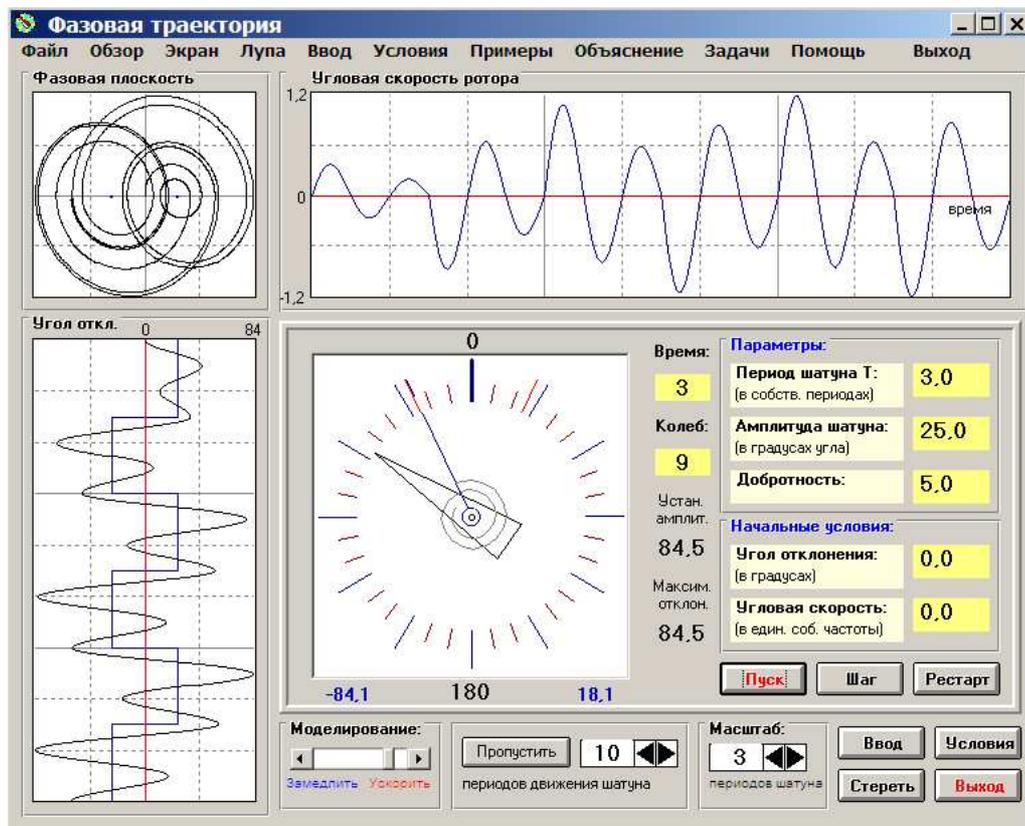


Рис. 4: Графики и фазовая траектория для процесса раскачки осциллятора из состояния покоя в случае резонанса $T = 3T_0$.

Когда на период внешнего воздействия приходится нечетное число периодов собственных колебаний осциллятора, переход фазовой траектории к новому фокусу происходит в тот момент, когда изображающая точка пересекает ось абсцисс фазовой плоскости на максимальном удалении от этого нового фокуса. В результате новый виток фазовой траектории оказывается крупнее предыдущего. Такое «раскручивание» фазовой траектории происходит до тех пор, пока приращение радиуса витков за счет перескока на новый фокус не будет компенсироваться уменьшением радиуса витков из-за трения в промежутке между перескоками. Установившимся колебаниям соответствует симметричная относительно начала координат (центральная симметрия) фазовая траектория, образованная двумя плавно переходящими друг в друга отрезками спиралей, которые описывают собственные затухающие колебания осциллятора около поочередно сменяющихся симметричных положений равновесия (см. рис. 4).

1.6 Оценка размаха установившихся колебаний

На основе приведенного выше описания установившихся колебаний осциллятора под действием кусочно-постоянной вынуждающей силы легко сделать количественную оценку максимальных отклонений для случаев, когда период внешнего воздействия кратен собственному периоду осциллятора.

Рассмотрим сначала основной резонанс, когда период вынуждающей силы равен периоду собственных колебаний: $T = T_0$. Оценку φ_m можно сделать следующим образом. Замкнутая фазовая траектория установившихся колебаний в этом случае состоит из одного витка, пересекающего ось φ в точках $-\varphi_m$ и φ_m , соответствующих одинаковым максимальным отклонениям маятника вправо и влево от среднего положения. Эти точки находятся на угловых удалениях от ϕ_0 на $|\varphi_m + \phi_0|$ влево и на $\varphi_m - \phi_0$ вправо.

Верхняя половина фазовой траектории образована отрезком эллиптической спирали (полувитком) с фокусом в точке ϕ_0 , смещенной вправо из начала координат. При прохождении изображающей точки по этому участку траектории осциллятор совершает половину периода затухающего собственного колебания относительно смещенного вправо положения равновесия: от максимального отклонения $|\varphi_m + \phi_0|$ влево (измеренного от ϕ_0) до максимального отклонения $\varphi_m - \phi_0$ вправо. В момент достижения крайней правой точки положение равновесия переключается в фокус $-\phi_0$, и дальше изображающая точка проходит по нижнему полувитку, замыкая фазовую траекторию. (Заметим, что в случае малого трения эта составная замкнутая фазовая траектория почти не отличается от эллипса. Это значит, что установившимся откликом высокодобротного осциллятора на внешнее воздействие с прямоугольной формой зависимости от времени в условиях основного резонанса $T = T_0$ будет почти синусоидальное колебание на частоте ω_0 — вклад высших гармоник в колебание на выходе оказывается ничтожным.)

Относительное изменение амплитуды из-за трения за половину периода $t = T_0/2$ затухающего собственного колебания составляет $q = \exp(-\gamma T_0/2) = \exp(-\pi/2Q)$. (Здесь произведение постоянной затухания γ и периода собственных колебаний T_0 выражено через добротность Q : $\gamma T_0/2 = \gamma\pi/\omega_0 = \pi/2Q$, поскольку по определению $Q = \omega_0/2\gamma$). Другими словами, каждое крайнее отклонение от равновесия в одну сторону равно умноженному на $q < 1$ предыдущему крайнему отклонению в противоположную сторону. Поэтому для верхнего полувитка левое и правое крайние отклонения от равновесия связаны соотношением:

$$(\varphi_m + \phi_0)q = \varphi_m - \phi_0, \quad (12)$$

откуда для искомого размаха колебаний получаем:

$$\varphi_m = \phi_0 \frac{1+q}{1-q} \approx \frac{4}{\pi} Q \phi_0. \quad (13)$$

Последнее приближенное выражение для амплитуды вынужденных колебаний справедливо в случае слабого затухания, когда $q = \exp(-\gamma T_0/2) = \exp(-\pi/2Q) \approx 1 - \pi/2Q$. Формула (13) показывает, что в условиях первого резонанса, вызываемого основной гармоникой внешнего воздействия, амплитуда установившихся колебаний осциллятора приблизительно в Q раз

превосходит амплитуду $(4/\pi)\phi_0$ этой гармоники в принудительном движении шатуна с прямоугольной зависимостью от времени [см. формулу (5)]. К такому же заключению можно прийти, используя спектральный подход к описанию установившихся вынужденных колебаний.

Аналогичным образом можно получить оценку размаха установившихся колебаний и для резонансов высоких порядков. Например, для резонанса при $T = 3T_0$ (три периода собственных колебаний на протяжении одного периода шатуна) можно рассмотреть половину замкнутой фазовой траектории, состоящую из трех полувитков спирали, скручивающейся к правому фокусу $(\phi_0, 0)$. В начале каждого цикла, когда шатун скачком поворачивается слева направо, изображающая точка оказывается на оси абсцисс фазовой плоскости в некоторой точке $-\varphi_0$ (левая часть рис. 5) слева от нового положения равновесия. Через половину цикла собственных колебаний около ϕ_0 , т. е. спустя $T_0/2$, маховик достигает максимального отклонения вправо φ_m , которое нам предстоит оценить. Затем на протяжении следующего периода собственных колебаний T_0 изображающая точка обходит полный оборот вокруг фокуса $(\phi_0, 0)$ и опять оказывается на оси абсцисс в точке φ_0 , смещенной вправо от фокуса $(\phi_0, 0)$. В этот момент шатун скачком поворачивается влево, и оставшаяся часть фазовой траектории формируется полутора витками спирали, скручивающейся к левому фокусу $(-\phi_0, 0)$.

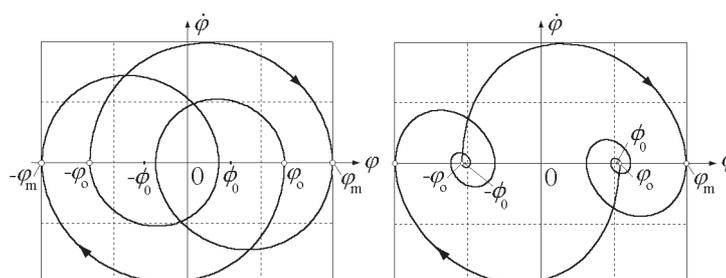


Рис. 5: Фазовые траектории установившихся колебаний осциллятора в случае резонанса $T = 3T_0$ при $Q = 5$ (слева) и резонанса $T = 5T_0$ при сильном трении $Q = 2$ (справа).

После каждой половины периода собственных колебаний $T_0/2$ величина максимального отклонения от положения равновесия уменьшается на один и тот же множитель $q = \exp(-\gamma T_0/2) = \exp(-\pi/2Q)$. В начале цикла изображающая точка смещена от положения равновесия ϕ_0 влево на $\varphi_0 + \phi_0$. Спустя $T_0/2$ точка достигает максимального отклонения вправо от ϕ_0 на угол $\varphi_m - \phi_0$. Поэтому

$$(\varphi_0 + \phi_0)q = \varphi_m - \phi_0. \quad (14)$$

На протяжении следующего периода T_0 изображающая точка опишет целую петлю вокруг ϕ_0 , а ее максимальное отклонение от равновесия умножится на q^2 . Поскольку теперь ее смещение из начала координат равно φ_0 , из равновесия она смещена на $\varphi_0 - \phi_0$. Таким образом, можно написать:

$$(\varphi_m - \phi_0)q^2 = \varphi_0 - \phi_0. \quad (15)$$

Решая систему уравнений (14 – 15), получаем следующее выражение для φ_m :

$$\varphi_m = \phi_0 \left(1 + \frac{2q}{1 - q^3} \right). \quad (16)$$

Например, при $Q = 5$ (такому значению добротности соответствует фазовая диаграмма в левой части рис. 5) множитель $q = \exp(-\pi/2Q) = 0.73$, и формула (16) для максимального отклонения дает $\varphi_m = 3.39 \phi_0$.

Заметим, что в этом случае получить оценку размаха колебаний на основе спектрального подхода затруднительно, так как форма выходных колебаний определяется не только находящейся в резонансе с осциллятором третьей гармоникой: такой же по порядку величины вклад дает и первая гармоника. Форма результирующих колебаний заметно отличается от синусоидальной, что видно как из фазовой диаграммы на рис. 5, так и непосредственно из графиков на рис. 3 (стр. 9), соответствующих параметрам $T = 3T_0$, $Q = 3$ и $\phi_0 = 25^\circ$.

В случае сильного трения размах установившихся колебаний ротора даже в резонансных условиях лишь ненамного превосходит размах принудительных колебаний шатуна, а форма выходных колебаний в меньшей степени отличается от входных прямоугольных импульсов. Основное искажение формы выражается в размытии крутого переднего фронта входных импульсов. Графики угла отклонения и угловой скорости для установившихся колебаний при $T = 5T_0$ и сильном трении ($Q = 2$) показаны на рис. 6.

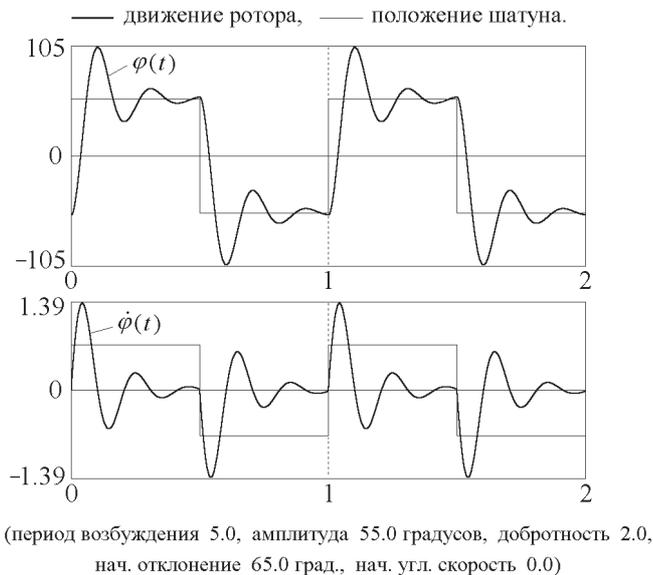


Рис. 6: Графики установившихся колебаний при сильном трении.

Чтобы оценить максимальный отброс стрелки в установившихся колебаниях при сильном трении (добротность Q порядка 1 – 3 единиц), заметим, что при $T/T_0 > Q$ собственные колебания около смещенного положения равновесия успевают почти полностью затухнуть, прежде чем шатун совершит скачкообразный поворот в новое положение. В таких случаях спираль фазовой траектории, скручиваясь к фокусу $(\phi_0, 0)$, подходит очень близко к этой точке до момента перехода к другому фокусу (см правую часть рис. 5 на стр. 13). Это значит, что в начале каждого полуцикла установившихся колебаний изображающая точка стартует практически от одного из фокусов. Так происходит при $T/T_0 > Q$ независимо от точного значения T/T_0 : не имеет значения, будет ли период внешнего воздействия резонансным (т. е. равен нечетному числу собственных периодов) или нет.

Получим оценку максимального отброса в рассматриваемых условиях. При повороте шатуна слева направо изображающая точка начинает движение из левого фокуса $(-\phi_0, 0)$ по сжимающейся спирали, закручивающейся вокруг правого фокуса $(\phi_0, 0)$, как показано в правой части рис. 5. Спираль пересекает ось абсцисс в интересующей нас точке φ_m после полупериода $T_1/2 \approx T_0/2$ затухающих собственных колебаний около смещенного положения равновесия ϕ_0 . Величина начального угла отклонения от этого положения составляет приблизительно $2\phi_0$, а спустя половину периода угловое отклонение равно $\varphi_m - \phi_0$. Начальное и конечное отклонения отличаются множителем $q = \exp(-\gamma T_0/2) = \exp(-\pi/2Q)$, поэтому $2\phi_0 q = \varphi_m - \phi_0$. Отсюда получаем для максимального отброса стрелки выражение:

$$\varphi_m = \phi_0(1 + 2q) = \phi_0(1 + 2e^{-\pi/2Q}). \quad (17)$$

Например, при $Q = 2$ максимальный отброс маховика равен $1.91 \phi_0$, т. е. почти вдвое превышает отклонение возбуждающего шатуна из среднего положения.

Полученный результат не зависит от периода вынуждающего воздействия, однако он справедлив лишь при условии, что за половину этого периода собственные колебания почти полностью «вымирают». Чтобы определить точность полученной оценки, можно рассмотреть возможное остаточное смещение маховика из точки ϕ_0 . Например, при $T = 5T_0$ это остаточное смещение равно приблизительно $2\phi_0 \exp(-5\pi/2Q)$, что при $Q = 2$ дает $0.04 \phi_0$. Это означает, что в начале каждого полуцикла изображающая точка стартует не точно из $\pm\phi_0$, как предполагалось при проведении оценки, а из некоторой точки, слегка смещенной из $\pm\phi_0$ в ту или иную сторону в зависимости от точного значения T/T_0 .

Если период колебаний шатуна в (небольшое) четное число раз больше собственного периода осциллятора, максимальное отклонение маховика в установившихся вынужденных колебаниях при слабом трении близко к удвоенному размаху колебаний шатуна $2\phi_0$. Это легко заключить из вида фазовой траектории (см., например, рис. 7 для случая $T = 4T_0$): каждая из двух симметричных половин фазовой траектории состоит из целого числа витков спирали, скручивающейся к одному из фокусов $(\phi_0, 0)$ и $(-\phi_0, 0)$. Каждый очередной полуцикл установившихся вынужденных колебаний длительностью $T/2 = nT_0$ состоит из целого числа n периодов T_0 собственных колебаний, происходящих около смещенного положения равновесия. Каждый такой полуцикл вынужденных колебаний начинается и заканчивается при почти нулевой угловой скорости рото-

ра. На рис. 7 показана фазовая траектория таких установившихся колебаний при $T = 4T_0$ вместе с графиками угла отклонения и угловой скорости.

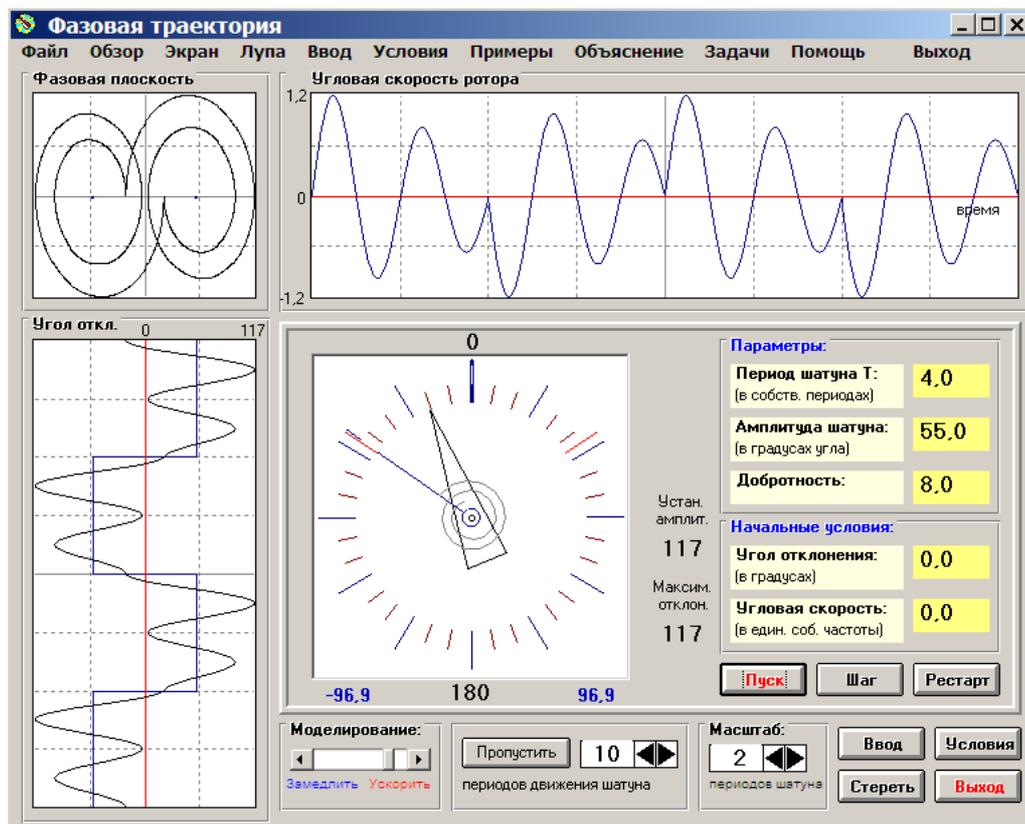


Рис. 7: Фазовая траектория и графики установившихся колебаний осциллятора при $T = 4T_0$.

1.7 Установившиеся колебания при частых поворотах шатуна

При высокой частоте перескоков возбуждающего шатуна, когда период возбуждения значительно меньше периода собственных колебаний осциллятора, в установившемся движении маховик совершает лишь небольшие вынужденные колебания около своего среднего положения $\varphi = 0$. Эти колебания происходят в противофазе с принудительными поворотами шатуна. Так как амплитуда колебаний ротора мала по сравнению с размахом угловых смещений шатуна ϕ_0 , можно считать, что в интервале между скачкообразными поворотами шатуна деформация пружины неизменна и, следовательно, действующий на маховик со стороны пружины момент упругой силы постоянен и сообщает маховику постоянное угловое ускорение. Момент силы лишь изменяет свое направление на противоположное в моменты перескоков шатуна в новое положение.

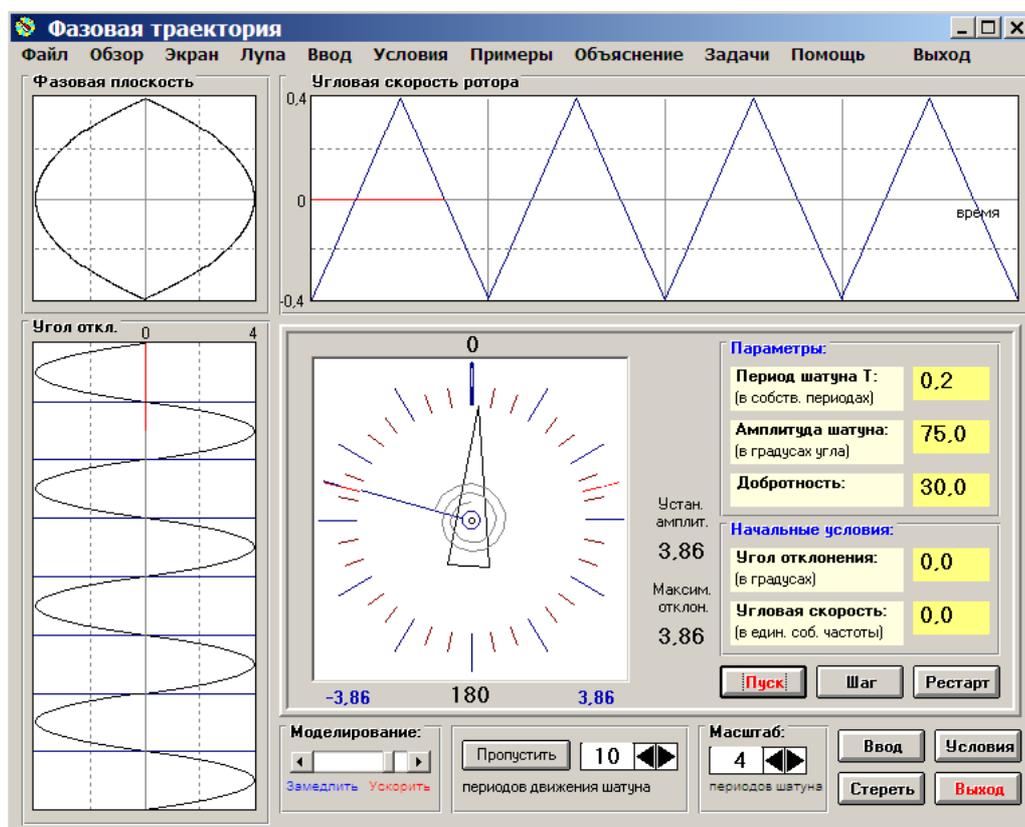


Рис. 8: Установившиеся колебания при $T \ll T_0$ (прямолинейные отрезки пилообразного графика угловой скорости и параболические сегменты графика угла отклонения).

График угловой скорости маховика в установившихся колебаниях при частых перескоках шатуна состоит из отрезков почти прямых линий, соответствующих равноускоренному вращению под действием постоянного момента силы упругости деформированной пружины. Вращение продолжается в одном направлении в интервалах между перескоками шатуна. После каждого поворота шатуна угловое ускорение изменяет знак, оставаясь практически неизменным по величине. В эти моменты прямолинейные отрезки графика скорости соединяются, образуя характерный пилообразный профиль с треугольными равнобедренными «зубцами» (рис. 8). Изломы на непрерывном графике скорости соответствуют разрывам графика ускорения (графика внешнего момента). Пилообразному графику скорости с почти прямолинейными треугольными зубцами соответствует график угла отклонения, образованный чередующимися отрезками парабол, плавно переходящими друг в друга в моменты изломов графика скорости.

1.8 Превращения энергии

При возбуждении колебаний осциллятора внешним моментом с прямоугольной зависимостью от времени внешний источник не совершает никакой работы, пока возбуждающий шатун неподвижен в промежутках между скачкообразными поворотами. Это значит, что обмен энергией между осциллятором и источником, приводящим в движение шатун, может происходить только в моменты перескоков шатуна из одного положения в другое. В промежутках между скачками, пока осциллятор совершает затухающие собственные колебания около одного из смещенных положений равновесия, происходят лишь поочередные превращения потенциальной энергии закрученной пружины в кинетическую энергию маховика и обратно, сопровождаемые постепенной диссипацией механической энергии из-за трения.

Очевидно, что в принятой модели физической системы, когда повороты шатуна считаются мгновенными, скорость массивного маховика не изменяется за время скачка. Поэтому не изменяется и кинетическая энергия осциллятора. Скачок испытывает лишь потенциальная энергия упругой деформации пружины. Потенциальная энергия возрастает, если угол закручивания пружины относительно недеформированного состояния увеличивается, и убывает в противоположном случае.

Чтобы получить представление об этих энергетических преобразованиях, можно открыть окна компьютерной программы «Энергия от времени» и рассмотреть соответствующие графики зависимости разных видов энергии от времени. Ёщжно также открыть окно «Фазовая кривая» и проследить движение точки, изображающей полную энергию системы, в потенциальной яме, т. е. на графике зависимости потенциальной энергии от угла отклонения маховика.

Каждому из двух положений равновесия маховика соответствует своя параболическая потенциальная яма (рис. 9).

Когда маховик расположен под углом φ относительно среднего положения (относительно нулевого деления шкалы), потенциальная энергия пружины $U(\varphi)$ дается одной из квадратичных функций:

$$U(\varphi) = \frac{1}{2}k(\varphi \mp \phi_0)^2. \quad (18)$$

Нужно брать верхний знак в (18), когда положение равновесия смещено вправо (в точку $+\phi_0$), и нижний знак в противоположном случае. Мгновенный перескок шатуна из одного положения в другое при неизменном значении угла φ приводит к вертикальному переходу изображающей точки с одной из ветвей этих потенциальных кривых на другую. До следующего перескока шатуна, пока осциллятор совершает затухающие собственные колебания около одного из смещенных положений равновесия, точка, изображающая полную энергию осциллятора, перемещается туда и обратно между берегами потенциальной ямы, соответствующей данному положению равновесия, постепенно опускаясь из-за трения на ее дно. Это поведение отчетливо видно на рис. 9.

Важно отметить, что в принятой модели механической системы мы полагаем, что деформация пружины имеет квазистатический характер, т. е. мы пренебрегаем возможностью ее собственных колебаний как распределенной системы, каждый элемент которой обладает как упругими, так и

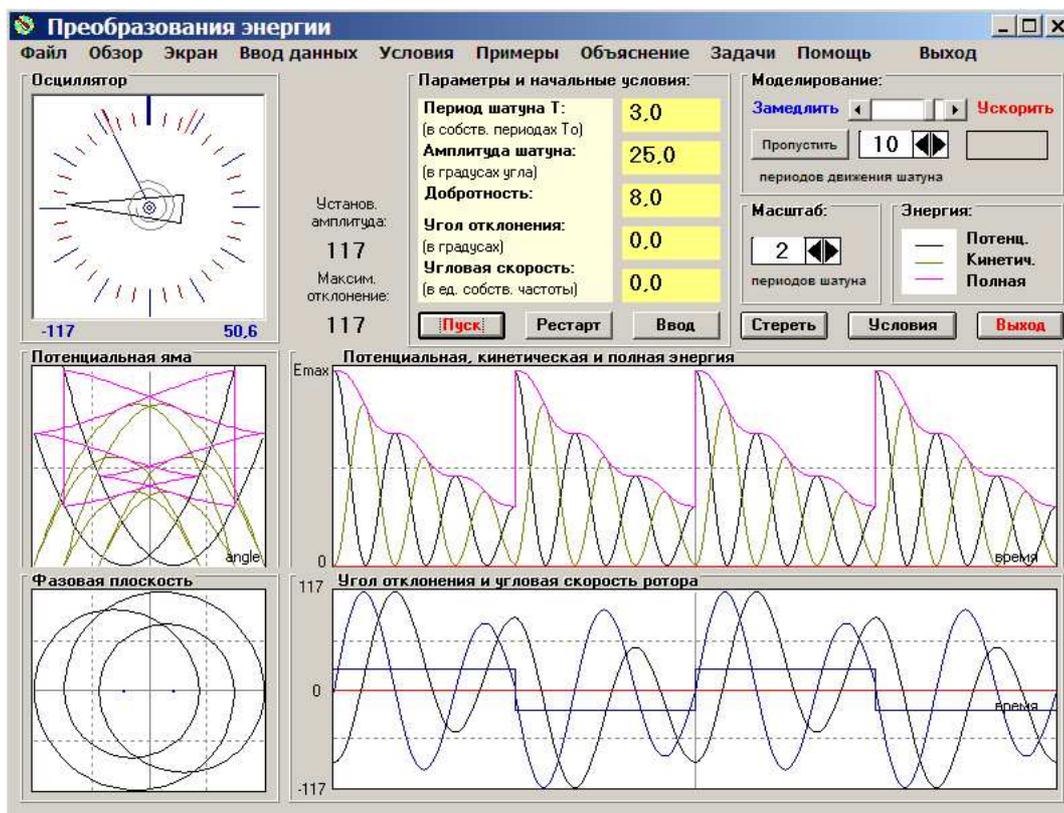


Рис. 9: Энергетические превращения при установившихся вынужденных колебаниях осциллятора в случае $T = 3T_0$.

инертными свойствами. При малой инертности пружины эти колебания имеют значительно более высокую частоту по сравнению с колебаниями массивного маховика, и обычно очень быстро затухают. Принятая здесь модель осциллятора применима в тех случаях, когда время затухания этих колебаний мало по сравнению с периодом собственных колебаний осциллятора.

1.9 Электромагнитный аналог осциллятора

Колебания заряда q конденсатора в последовательном резонансном LCR -контуре, на вход которого подается переменное напряжение, имеющее форму прямоугольных импульсов, описываются таким же дифференциальным уравнением, что и вынужденные колебания рассматриваемого механического пружинного осциллятора, возбуждаемые периодическими скачкообразными поворотами шатуна:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 CV(t). \quad (19)$$

Здесь ω_0 — частота собственных колебаний заряда в контуре в отсутствие затухания (при $R = 0$), зависящая от емкости C конденсатора и индуктивности L катушки: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Постоянная затухания $\gamma = R/(2L)$ характеризует диссипацию электромагнитной энергии (выделение джоулевой теплоты) при протекании тока через резистор сопротивлением R .

Благодаря этой аналогии рассмотренная модель механической колебательной системы позволяет дать очень наглядную картину закономерностей преобразования подаваемого на вход контура переменного прямоугольного напряжения $V(t) = \pm V_0$ в выходное напряжение $V_C(t) = q/C$ (напряжение на конденсаторе C). Выходное напряжение $V_C(t)$ аналогично угловому отклонению ротора от среднего положения $\varphi(t)$. Переменный электрический ток $I(t) = \dot{q}(t)$ в контуре аналогичен угловой скорости ротора $\dot{\varphi}(t)$ в механической модели.

Предположение о квазистатическом характере деформации пружины в механической модели, т. е. предположение о возможности пренебречь собственными колебаниями пружины как распределенной системы, в электромагнитном контуре соответствует предположению о квазистационарности тока. Чтобы в каждый момент времени ток имел одинаковую величину во всех участках последовательной электрической цепи, индуктивность и емкость соединительных проводов должны быть малы по сравнению с индуктивностью катушки и емкостью конденсатора. В таком случае колебательный контур можно рассматривать как систему с сосредоточенными параметрами (вся емкость сосредоточена в конденсаторе, а индуктивность — в катушке), имеющую одну степень свободы.

При использовании этой аналогии между механическим осциллятором и колебательным контуром некоторая осторожность необходима в отношении энергетических превращений. Здесь нельзя сопоставлять буквально энергию заряженного конденсатора и упругую потенциальную энергию закрученной пружины, поскольку последняя определяется углом ($\varphi \pm \phi_0$), в то время как энергия конденсатора определяется непосредственно зарядом конденсатора q или соответствующим напряжением на конденсаторе $V_C = q/C$ (а не напряжением ($V_C \pm V_0$)). Если в механической модели мгновенный поворот шатуна вызывает скачкообразное изменение потенциальной энергии пружины, то в электромагнитном контуре скачок входного напряжения не приводит к скачкообразному изменению заряда конденсатора и, следовательно, его энергии. Более полную аналогию электромагнитных колебаний в последовательном LCR -контуре с приложенным напряжением в виде импульсов прямоугольной формы дает механический осциллятор с прямым силовым (а не рассматриваемым здесь кинематическим) возбуждением вынужденных колебаний. В случае прямого силового возбуждения колебаний аналогия полностью распространяется и на энергетические превращения. Более подробное обсуждение различий в энергетических превращениях при силовом и кинематическом возбуждении колебаний приведено в главе, где рассматриваются вынужденные колебания линейного осциллятора под действием синусоидального внешнего возмущения.

Все, что было сказано выше в отношении преобразования спектра входного воздействия в спектр установившихся вынужденных колебаний осциллятора, полностью справедливо и в отношении преобразования спектра входного прямоугольного напряжения в спектр напряжения на конденсаторе, т. е. на выходе колебательного контура. В наибольшей мере в выходном напряжении будут представлены те гармоники входного сигнала, частота которых близка к собствен-

ной частоте колебательного контура. Контур ведет себя избирательно, пропуская на «выход» только те гармоники в спектре входного сигнала, частоты которых попадают в *полосу пропускания* колебательного контура. При увеличении добротности контура его резонансная кривая становится острее и полоса пропускания сужается, т. е. растет *спектральная селективность* (избирательность) колебательного контура.

Собственную частоту резонансного колебательного контура $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ можно варьировать, изменяя либо емкость C конденсатора, либо индуктивность L катушки. Такой перестраиваемый по частоте высокодобротный колебательный контур с высокой селективностью по сути дела представляет собой спектральный прибор, способный *на физическом уровне* выполнять фурье-разложение сложного входного сигнала.

2 Контрольные вопросы и задачи

2.1 Резонансное возбуждение осциллятора

1.1 Основной резонанс в отсутствие трения. Допустим, что трение полностью отсутствует, и что период T внешней силы в точности равен периоду T_0 собственных колебаний осциллятора. Рассмотрите случай нулевых начальных условий, т. е. маятник покоится в среднем положении в момент включения внешнего воздействия.

(а) Какой должна быть угловая амплитуда ϕ_0 скачкообразных поворотов шатуна для того, чтобы размах колебаний маятника достиг 180° после первых 10 циклов движения шатуна? Проверьте свой результат в моделирующем эксперименте.

(б) По какому закону происходит рост амплитуды колебаний маятника? Объясните наблюдаемую форму фазовой траектории. Как растет со временем полная энергия осциллятора?

(в) В условиях точной настройки периода внешнего воздействия в резонанс с собственным периодом осциллятора, возможно ли убывание во времени амплитуды колебаний? Приведите физическое обоснование своему ответу. Подтверждается ли Ваш ответ моделирующим экспериментом?

1.2 Высшие резонансы в отсутствие трения. Исследуйте резонансное возбуждение первоначально покоившегося в среднем положении осциллятора в условиях, когда период внешнего момента с прямоугольной зависимостью от времени ровно в три раза больше периода собственных колебаний осциллятора ($T = 3T_0$):

(а) При какой амплитуде ϕ_0 принудительных прямоугольных колебаний шатуна размах колебаний маятника достигнет значения 180° после первых 10 циклов движения шатуна? Проверьте свой ответ в эксперименте.

(б) В чем заключаются различия фазовых траекторий в данном случае и в случае основного резонанса ($T = T_0$)?

1.3* Переходный процесс и установившиеся колебания в условиях главного резонанса. Полагая период прямоугольного внешнего воздействия равным периоду собственных коле-

баний осциллятора ($T = T_0$), и считая маховик покоившимся в среднем положении до включения внешней силы, исследуйте переходный процесс и установившиеся колебания при наличии трения:

(а) Рассчитайте амплитуду установившихся колебаний маховика при амплитуде шатуна $\phi_0 = 10^\circ$ и добротности осциллятора $Q = 10$. Проверьте свой результат в эксперименте.

(б) По какому закону происходит рост амплитуды при раскачке осциллятора из состояния покоя? Объясните особенности фазовой траектории, наблюдаемой в этом случае.

(в) Чему равна начальная амплитуда затухающих собственных колебаний, входящих в состав переходного процесса при $\phi_0 = 10^\circ$ и $Q = 10$? По какому закону амплитуда этих колебаний убывает со временем?

(г) Какими должны быть начальные условия для того, чтобы установившиеся вынужденные колебания происходили с самого начала, т. е. сразу после включения периодической прямоугольной внешней силы, без переходного процесса? Проверьте свой результат экспериментально.

(д) Изучите спектральный состав выходных установившихся колебаний в этом случае. Почему эти выходные колебания почти гармонические, несмотря на прямоугольную форму временной зависимости входных колебаний (принудительных колебаний возбуждающего шатуна)?

1.4* Установившиеся колебания в случаях резонансов высоких порядков.

(а) Рассчитайте амплитуду установившихся колебаний для $T = 3T_0$, $\phi_0 = 25^\circ$, $Q = 5$. Проверьте результат Вашего расчета в эксперименте. Объясните наблюдаемую в этом случае форму графиков и фазовой траектории.

(б) Какие превращения энергии происходят в течение установившихся колебаний? Сопоставьте экспериментально наблюдаемые графики временной зависимости кинетической, потенциальной и полной энергии с соответствующими графиками угловой скорости и угла отклонения маховика. Объясните наблюдаемую форму зависимости полной энергии осциллятора от угла отклонения. Как график полной энергии соотносится с параболическими потенциальными ямами, показанными на той же диаграмме?

(в) Какие гармоники определяют в данном случае форму установившихся колебаний? Почему, несмотря на точную настройку осциллятора на частоту третьей гармоники внешнего воздействия, его первая гармоника заметно влияет на форму выходных колебаний? Каким образом первая гармоника проявляет себя в колебаниях осциллятора?

(г) Исследуйте теоретически и экспериментально влияние трения на спектральный состав и форму установившихся колебаний осциллятора при $T = 3T_0$. Обратите внимание на относительное уменьшение вклада первой и пятой гармоник по мере увеличения добротности осциллятора.

(д) Изучите установившиеся колебания при резонансах пятого и седьмого порядков (т. е. при совпадении частоты пятой или седьмой гармоники вынуждающих прямоугольных импульсов с собственной частотой осциллятора). Обратите внимание на характер преобразования спектра в этих случаях и на зависимость спектра установившихся колебаний от добротности осциллятора. Какой вид имеет фазовая траектория для этих резонансов? Сделайте теоретическую оценку максимального размаха установившихся колебаний маховика при $T = 5T_0$ для случаев высокой

добротности осциллятора (Q порядка 15 – 20) и сильного трения (Q порядка 1 – 3).

2.2 Нерезонансные вынужденные колебания

2.1* **Вынужденные колебания и условия отсутствия переходного процесса при $T = 2T_0$.**

(а) Предскажите теоретически формы графиков угла отклонения, угловой скорости и фазовой траектории установившихся колебаний осциллятора для $T = 2T_0$ при отсутствии трения (и при очень слабом трении). Какими должны быть начальные условия, чтобы установившиеся колебания происходили сразу после включения внешнего воздействия, т. е. чтобы не было переходного процесса? Проверьте свои предсказания в моделирующем эксперименте.

(б) Почему в случае установившихся колебаний при $T = 2T_0$ в отсутствие трения при принудительных скачкообразных поворотах шатуна не происходит обмена энергией между осциллятором и внешним источником (осциллятор не получает и не отдает энергию)?

(в) Изучите спектральный состав установившихся колебаний при $T = 2T_0$. Особое внимание обратите на вклад третьей гармоники в выходные колебания. Частота третьей гармоники в данном случае выше собственной частоты осциллятора, и поэтому на выходе она имеет обращенную фазу. Каким образом это изменение фазы третьей гармоники сказывается на форме результирующих выходных колебаний? Почему при сложении первой и третьей гармоник в выходных колебаниях вместо уплощенной кривой (соответствующей плоским прямоугольным импульсам на входе) получается кривая с «буграми» на месте плоских горизонтальных участков входных прямоугольных импульсов?

2.2* **Установившиеся колебания при $T = 2T_0$ и $T = 4T_0$.**

(а) Рассмотрите вынужденные колебания осциллятора в случае $T = 2T_0$ при наличии умеренного трения (скажем, $Q = 5$). К каким изменениям (по сравнению с рассмотренным выше случаем полного отсутствия трения) приводит это небольшое трение на графиках временной зависимости и на фазовой траектории установившихся колебаний? Обратите внимание на изменения в энергетических превращениях.

(б) Почему при $T = 2T_0$ трение почти не сказывается на спектральном составе установившихся колебаний осциллятора, в отличие от случая $T = 3T_0$?

(в) Рассчитайте размах установившихся колебаний маховика (максимальный угол отклонения от средней точки) при $T = 2T_0$, $\phi_0 = 25^\circ$, $Q = 5$. Сравните результат со случаем отсутствия трения. Проверьте свой ответ в эксперименте.

(г) Рассчитайте размах φ_m установившихся вынужденных колебаний маховика при $T = 4T_0$, $\phi_0 = 25^\circ$, $Q = 5$.

(д)** В отсутствие трения размах установившихся вынужденных колебаний маховика при $T = 4T_0$, как и при $T = 2T_0$, равен $2\phi_0$, т. е. ровно вдвое больше, чем размах принудительных скачкообразных поворотов шатуна. Но если при $T = 2T_0$ введение трения приводит только к уменьшению амплитуды установившихся колебаний, то при $T = 4T_0$ введение небольшого трения приводит к увеличению амплитуды маховика. По мере увеличения трения амплитуда устано-

вившихся колебаний сначала растет, достигает максимума при некотором значении добротности, и затем убывает при дальнейшем увеличении трения. Объясните качественно такую необычную, на первый взгляд, зависимость амплитуды от трения. Найдите то значение добротности Q_m , при котором амплитуда установившихся колебаний максимальна, и рассчитайте эту максимальную амплитуду φ_{\max} . Во сколько раз эта максимальная амплитуда φ_{\max} превосходит размах ϕ_0 поворотов возбуждающего шатуна? Ответьте на те же вопросы для установившихся колебаний при $T = 6T_0$.

2.3 Установившиеся колебания при большом периоде возбуждения ($T \gg T_0$).

(а) Изучите вынужденные колебания осциллятора под действием внешнего момента с прямоугольной зависимостью от времени в условиях, когда собственная частота осциллятора лежит где-нибудь в интервале между частотами двух последовательных нечетных гармоник высокого порядка (например, при $5T_0 < T < 7T_0$). Какие гармоники доминируют в установившихся выходных колебаниях осциллятора? Сравните форму колебаний на выходе с формой импульсов входного воздействия. В чем заключается основное отличие формы колебаний на входе и на выходе?

(б) Исследуйте влияние трения на характер установившихся колебаний. Почему при сильном затухании наблюдаются меньшие искажения (по сравнению со случаем слабого трения), т. е. выходные импульсы имеют почти прямоугольную форму?

(в) Объясните характер превращений энергии при таких колебаниях, используя получаемый в процессе моделирования график зависимости полной энергии от угла отклонения. Какова взаимосвязь этого графика с параболическими потенциальными ямами, показанными на той же диаграмме?

(г) Оцените максимальное отклонение маховика в таких установившихся колебаниях при $T \gg T_0$ и сильном трении (рассмотрите отдельно случаи Q порядка 1 – 3 и $Q = 1/2$).

2.4 Установившиеся вынужденные колебания под действием импульсов малого периода.

(а) Пусть период T внешнего момента с прямоугольной зависимостью от времени составляет небольшую часть (скажем, 0.2 – 0.3) собственного периода осциллятора T_0 . В таких условиях график зависимости угловой скорости маховика от времени при установившихся колебаниях представляет собой «пилу» с почти прямолинейными треугольными равнобедренными зубцами. Почему? Предложите физическое объяснение такой форме графика скорости. Чем в этом случае отличается от синусоиды график зависимости угла отклонения от времени?

(б) Оцените теоретически высоту зубцов графика зависимости угловой скорости от времени при заданных значениях периода и амплитуды принудительных скачкообразных поворотов шатуна. Оцените также максимальный угол отклонения маховика от среднего положения при таких установившихся колебаниях, приняв для T значение $T_0/4$ и $\phi_0 = 30^\circ$ для амплитуды шатуна. Какой спектральный состав характерен для таких колебаний?

2.3 Приложение: сводка основных формул

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний торсионного пружинного осциллятора под действием прямоугольного внешнего момента:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \begin{cases} \omega_0^2\phi_0, & (0, T/2), \\ -\omega_0^2\phi_0, & (T/2, T). \end{cases}$$

То же уравнение с разложением в ряд Фурье правой части, выражающей прямоугольную кусочно-постоянную зависимость от времени вынуждающего момента внешней силы:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{4\phi_0\omega_0^2}{\pi k} \sin \omega_k t.$$

Периодическое частное решение этого уравнения, описывающее установившиеся вынужденные колебания:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{4\phi_0}{\pi k} \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_k^2)^2 + 4\gamma^2\omega_k^2}} \sin(\omega_k t + \alpha_k),$$

где фазы α_k отдельных гармоник определяются соотношением:

$$\tan \alpha_k = \frac{2\gamma\omega_k}{\omega_k^2 - \omega_0^2}.$$

Зависимость от времени $\varphi(t)$ на протяжении интервала $(0, T/2)$, пока положение равновесия находится справа при $\varphi = \phi_0$:

$$\varphi(t) = \phi_0 + Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta), \quad (0, T/2),$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ — частота собственных затухающих колебаний, A и θ — некоторые постоянные. Зависимость от времени $\varphi(t)$ на протяжении интервала $(T/2, T)$, когда собственные колебания происходят около положения равновесия, расположенного при $-\phi_0$:

$$\varphi(t) = -\phi_0 - Ae^{-\gamma(t-T/2)} \cos(\omega_1(t - T/2) + \theta), \quad (T/2, T).$$

В установившихся колебаниях постоянные A и θ имеют здесь те же значения, что и в выражении для $(0, T/2)$.