

# Колебания и перевороты жесткого маятника

## Задачи для самостоятельного решения

Бутиков Е. И.

**Аннотация.** В данном пособии приведены контрольные вопросы, теоретические и экспериментальные задачи для самостоятельной работы к лабораторной работе «Колебания и перевороты жесткого маятника», а также материал для возможных индивидуальных заданий студентам (по указанию преподавателя).

## Содержание

1	Малые колебания маятника	1
2	Колебания с большими амплитудами	3
3	Перевороты и вращения маятника	7
4	Приложение: Сводка основных формул	8

## 1 Малые колебания маятника

**1.1 Амплитуда, фазовая траектория и энергия малых колебаний.** При малых углах отклонения, когда  $\sin \varphi \approx \varphi$ , возвращающий момент силы тяжести приблизительно пропорционален углу отклонения от положения устойчивого равновесия, и маятник ведет себя подобно линейному осциллятору. В отсутствие трения он совершает простые гармонические колебания. При наличии слабого трения движение маятника можно рассматривать как почти гармоническое колебание с медленно убывающей амплитудой. Выберите полное отсутствие трения и задайте какие-либо начальные условия, обеспечивающие колебания малой амплитуды. Например, пусть начальное отклонение будет равно 30 градусам, а начальная угловая скорость равна нулю. В таком случае амплитуда колебаний составит 30 градусов.

(а) Чему равно максимальное значение скорости в этих колебаниях? Проверьте результат в моделирующем эксперименте.

(б) Какую начальную скорость нужно сообщить маятнику, находящемуся в положении равновесия ( $\varphi(0) = 0$ ), чтобы получить колебания той же амплитуды (30 градусов)? Проверьте свой результат в моделирующем эксперименте. Напоминаем, что начальная угловая скорость должна задаваться при вводе в единицах угловой частоты  $\omega_0$  собственных малых колебаний маятника. Чем отличаются такие колебания от колебаний той же амплитуды, возбуждаемых начальным отклонением?

(в) Убедитесь, что при малых амплитудах графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости имеют форму, близкую к синусоидальной. Убедитесь также, что колебания скорости опережают по фазе колебания угла отклонения на четверть периода. Сопоставьте графики угла отклонения и угловой скорости с движением изображающей точки по фазовой плоскости. Какую форму имеет фазовая траектория малых колебаний маятника? При каком масштабе по оси ординат фазовая траектория малых колебаний будет изображаться окружностью на фазовой плоскости?

(г) Что можно сказать о зависимости от времени кинетической и потенциальной энергий маятника, совершающего малые колебания? Докажите, что средние по времени значения кинетической и потенциальной энергий (за период) приблизительно одинаковы. Если амплитуда равна 30 градусам, то чему равно отношение полной энергии маятника  $E$  к максимально возможному значению потенциальной энергии  $E/E_{\max}$ ?

### 1.2\* Период малых колебаний.

На графиках зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости, получаемых в моделирующей программе, деления на шкале времени (метки времени) показаны в естественных для маятника единицах, а именно, в единицах периода колебаний предельно малой амплитуды  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ . Таким образом, промежутки между метками времени на осях равны  $T_0$ .

(а) Обратите внимание, что при малых, но конечных амплитудах (скажем, около 30 градусов) период колебаний немного превышает значение  $T_0$ . Судить об этом можно либо по графикам на экране, либо по показаниям таймера. В последнем случае можно остановить моделирование (кнопкой «Пуск/Пауза») и прочитать показание таймера в момент, когда маятник совершит целое число циклов. Чтобы было удобно снимать дальнейшие показания таймера, во время паузы можно сбросить показания таймера кнопкой «Сброс таймера». Попробуйте измерить (в единицах  $T_0$ ) период колебаний маятника для нескольких умеренных значений амплитуды.

(б) Какие моменты следует выбирать для снятия показаний таймера (для остановки и пуска моделирования) при экспериментальных измерениях периода колебаний: когда маятник проходит через положение равновесия или когда он достигает положений наибольшего отклонения? Мотивируйте свой ответ. При выполнении измерений периода колебаний нужно снять показание таймера при прохождении маятником определенного положения (например, положения равновесия). Но практически невозможно зафиксировать показание таймера (остановить моделирование) точно в нужный момент. В этом заключается неизбежная причина погрешности измерений. Предложите способ измерения периода колебаний, при использовании которого можно добиться значительного уменьшения погрешности, которая обусловлена указанной причиной.

(в) Сравните экспериментально измеренные значения периода  $T$  для заданного значения ам-

плитуды колебаний  $\varphi_0$  со значениями периода, рассчитанными по приближенной теоретической формуле

$$T = T_0(1 + \varphi_0^2/16), \quad (1)$$

где амплитуда  $\varphi_0$  выражена в радианах. Составьте таблицу экспериментальных и теоретических значений периода для амплитуд 30, 45, 60, 90, 120, 135 и 150 градусов. Найдите максимальное значение амплитуды  $\varphi_0$ , вплоть до которого ошибка теоретической формулы (1) не превышает одного процента. Какую ошибку дает эта формула при амплитуде 45 градусов? Как можно получить эту приближенную теоретическую формулу? (Приведите ее вывод в отчете.)

### 1.3 Затухание малых колебаний.

(а) Покажите теоретически, что малое трение приводит к экспоненциальному затуханию собственных колебаний маятника. При каком значении добротности  $Q$  амплитуда уменьшается вдвое за четыре полных цикла колебаний? Введите рассчитанное значение добротности и проверьте результат в моделирующем эксперименте на компьютере.

(б) Убедитесь, что в случае очень сильного вязкого трения, характеризуемого значениями добротности  $Q$  ниже критического значения 0.5, выведенный из положения равновесия маятник возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. Может ли маятник пересечь положение равновесия? В чем заключается основное качественное различие фазовых траекторий маятника в случаях слабого и очень сильного затухания?

## 2 Колебания с большими амплитудами

### 2.1 Сравнение маятника с линейным осциллятором.

При больших углах отклонения от положения равновесия сильнее проявляется нелинейный характер зависимости возвращающего момента силы тяжести от угла отклонения  $\varphi$ . Поскольку  $\sin \varphi < \varphi$ , увеличение возвращающего момента с ростом угла отклонения у маятника происходит в меньшей степени, чем у линейного осциллятора. Поэтому маятник относится к нелинейным колебательным системам с «мягкой» возвращающей силой.

(а) Каким образом упомянутое различие между маятником и линейным осциллятором проявляется в графиках зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости? Как эти различия проявляются на фазовой траектории? Приведите качественное физическое объяснение этих различий.

(б) Какие различия между маятником и линейным осциллятором можно наблюдать в характере превращений энергии при колебаниях? Сопоставьте фазовую траекторию маятника с графиком потенциальной энергии от угла отклонения (с потенциальной ямой маятника). Обратите внимание на взаимное расположение точек поворота (точек максимальных отклонений) на фазовой плоскости и в потенциальной яме маятника. При заданных начальных условиях ( $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = \Omega$ ), чему равны значения потенциальной и кинетической энергий маятника в крайних точках и в положении равновесия (в отсутствие трения)?

**2.2\* Колебания маятника с большими амплитудами.**

(а) Исследуйте экспериментально большие колебания маятника в отсутствие трения. Обратите внимание на строго периодический характер графиков динамических переменных при этих отчетливо несинусоидальных колебаниях в консервативной нелинейной системе. Когда амплитуда колебаний несколько превышает  $90^\circ$ , график зависимости угловой скорости от времени имеет пилообразную форму с почти прямолинейными равносторонними треугольными зубцами. Объясните, почему. В этом случае соответствующий график зависимости угла отклонения от времени состоит из зубцов почти параболической формы, в противоположность синусоидальной форме при колебаниях с малой амплитудой. Объясните параболическую форму зубцов в этом случае. Обратите внимание на возрастание периода колебаний при увеличении амплитуды (соседние деления на шкале времени разделены интервалом  $T_0$ , равным периоду предельно малых колебаний маятника).

(б) Обратите внимание на то, как замкнутые фазовые траектории колебаний консервативного маятника вытягиваются в горизонтальном направлении по мере увеличения энергии маятника. Объясните, почему наблюдается (возрастающее с энергией) отличие этих фазовых траекторий от эллиптических (или круговых) фазовых траекторий линейного осциллятора. Для такого объяснения воспользуйтесь сравнением параболической потенциальной ямы линейного осциллятора с синусоидальной потенциальной ямой маятника. Примите, что вблизи дна обе потенциальные ямы имеют одинаковую кривизну, т. е. что период  $T_0$  малых колебаний маятника равен периоду колебаний соответствующего линейного осциллятора. Напомним, что период колебаний линейного осциллятора не зависит от амплитуды (и энергии).

(в) При больших амплитудах маятник сравнительно быстро проходит окрестность положения равновесия (дно потенциальной ямы), затем медленно взбирается на пологий, почти горизонтальный склон верхней части синусоидального барьера, разделяющего соседние потенциальные ямы, а затем также медленно сползает с него. Таким образом, маятник проводит при больших отклонениях гораздо больше времени, чем линейный осциллятор, параболические берега потенциальной ямы которого имеют неуклонно возрастающую крутизну. Основываясь на сравнении формы этих потенциальных ям, объясните, почему средние за период колебаний значения потенциальной и кинетической энергии маятника не равны друг другу (в то время как у линейного осциллятора средние за период колебаний значения кинетической и потенциальной энергии одинаковы).

(г)\* Тщательно изучите экспериментально интересный случай колебаний с амплитудой, близкой к  $180^\circ$ . Задайте начальное отклонение  $179.999^\circ$  при нулевой начальной скорости. Маятник довольно долго находится с одной стороны перевернутого неустойчивого положения равновесия, затем постепенно ускоряется и сравнительно быстро проходит через дно потенциальной ямы (через устойчивое положение равновесия), затем медленно подходит к перевернутому положению с другой стороны, и надолго застревает в таком положении. Сравните время, в течение которого маятник проходит почти весь круговой путь (за исключением малой окрестности перевернутого положения) от одной стороны перевернутого положения до другой, с периодом малых колебаний маятника. Другими словами, оцените длительность уединенного импульса на графике зависимости угловой скорости от времени. Или, что то же самое, оцените длительность крутого

почти вертикального участка (размытие ступеньки) на почти прямоугольном графике зависимости угла отклонения от времени.

(д)\* Попробуйте определить, каким фактором определяется ширина (длительность) этих почти прямоугольных зубцов графика временной зависимости угла отклонения. Или, что то же самое, каким фактором определяется интервал времени между двумя последовательными импульсами на графике зависимости угловой скорости от времени. Иначе говоря, попробуйте определить физическую причину, определяющую полный период таких необычных колебаний консервативного маятника. (Подсказка: измерьте период колебаний последовательно для значений начального отклонения  $179.999^\circ$ ,  $179.990^\circ$ , и  $179.900^\circ$  градусов, каждый раз при нулевой начальной скорости.

(е)\*\* Попробуйте оценить теоретически промежуток времени, в течение которого маятник достигает положения крайнего отклонения  $179.99^\circ$  при возбуждении из положения равновесия сообщением начальной угловой скорости, необходимой для достижения такого максимального отклонения. Полученный результат используйте для оценки периода колебаний маятника с амплитудой  $179.99^\circ$ . Сравните Вашу теоретическую оценку с периодом колебаний, измеренным в моделирующем эксперименте.

(ж)\*\* Обратите внимание на характер превращений энергии в рассмотренном выше движении. Полная энергия маятника  $E$  в этом движении почти равна высоте  $2mga$  потенциального барьера, т. е. значению потенциальной энергии маятника в перевернутом положении ( $\varphi = \pm\pi$ ). Большую часть периода таких колебаний маятник проводит в окрестности перевернутого положения, так как он очень медленно движется и медленно ускоряется вблизи перевернутого положения. Поэтому среднее за полный период таких колебаний значение потенциальной энергии маятника много больше среднего значения его кинетической энергии. В таких колебаниях потенциальная энергия маятника превращается в кинетическую энергию лишь на короткое время, пока маятник быстро проходит через нижнее положение равновесия (через минимум потенциальной энергии). Попробуйте сделать теоретическую оценку отношения средних (за период колебаний) значений потенциальной и кинетической энергии для амплитуды  $179.99$  градусов.

### 2.3\* Движение вдоль сепаратрисы.

(а) Когда маятнику задают начальное отклонение, близкое к  $180$  градусам, при нулевой начальной скорости, фазовая траектория результирующего движения почти совпадает с сепаратрисой  $\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi/2)$ . Точка, изображающая механическое состояние маятника в фазовой плоскости, быстро проходит вдоль нижней ветви сепаратрисы, надолго застревает около левой седловой точки  $(-\pi, 0)$ , а затем возвращается вдоль верхней ветви сепаратрисы. Как нужно задать начальные условия, чтобы изображающая точка сначала проходила бы вдоль верхней ветви сепаратрисы, а затем вдоль нижней ветви? Только вдоль верхней ветви?

(б) Какую начальную скорость  $\Omega$  (в единицах  $\omega_0$ ) нужно сообщить маятнику в нижнем положении равновесия для того, чтобы изображающая точка двигалась вдоль сепаратрисы фазовой плоскости? Какую начальную скорость нужно для этого сообщить маятнику, отклоненному из положения равновесия на угол  $60$  градусов?  $90^\circ$ ?  $-90^\circ$ ?  $120^\circ$ ? Проверьте свои результаты в моделирующем эксперименте.

(в) Для лимитационного движения (движения по сепаратрисе) рассчитайте интервал времени  $\tau$ , на протяжении которого кинетическая энергия маятника превосходит его потенциальную энергию. Или, что то же самое, найдите время, в течение которого маятник проходит от одного горизонтального положения до другого, совершая круговой путь от одной стороны перевернутого положения до другой через нижнее положение равновесия. Выразите этот интервал времени в единицах  $T_0$  периода малых колебаний маятника. Проверьте свой теоретический результат в моделирующем эксперименте на компьютере.

#### 2.4 Колебания с большими амплитудами при наличии трения.

(а) Исследуйте влияние вязкого трения на колебания с большими амплитудами. Начните со случая сравнительно слабого трения (скажем,  $Q \approx 20$ ). Обратите внимание на изменение формы графиков по мере того, как механическая энергия маятника и амплитуда постепенно уменьшаются из-за трения. В частности, обратите внимание на то, как первоначально пилообразная кривая графика угловой скорости (с ее острыми почти прямолинейными треугольными зубцами) и первоначальная кривая графика угла отклонения (с почти параболическими зубцами) постепенно эволюционируют, приближаясь по форме к синусоидальным кривым, характерным для гармонического осциллятора.

(б) Под влиянием вязкого трения изменяется топология фазовых траекторий маятника. Вместо замкнутых кривых, соответствующих строго периодическим колебаниям консервативного маятника, мы видим скручивающиеся спирали, совершающие бесконечное число постепенно сжимающихся витков вокруг фокуса, расположенного в начале координат фазовой плоскости. Обратите внимание на то, как постепенно изменяется форма витков фазовой траектории по мере того, как они отдаляются от сепаратрисы. Приведите качественное объяснение наблюдаемым изменениям. Напомним, что в случае линейного осциллятора вязкое трение приводит к сжатию витков фазовой траектории, при котором сохраняется геометрическое подобие витков в процессе приближения фазовой кривой к началу координат.

(в) Открыв окно программы «Энергия от времени», обратите внимание на то, как скорость диссипации механической энергии зависит от положения изображающей точки в потенциальной яме маятника. В какой момент на протяжении цикла колебаний скорость диссипации механической энергии максимальна? Мотивируйте свой ответ.

(г)\*\* С помощью закона сохранения энергии рассчитайте минимальное значение начальной угловой скорости, которую нужно сообщить маятнику в нижнем положении равновесия для того, чтобы он достиг перевернутого положения (неустойчивого равновесия) в случае полного отсутствия трения, и при слабом трении, когда добротность  $Q$  равна 20. Какую начальную скорость нужно сообщить маятнику для достижения перевернутого положения, если первоначально он был отклонен из положения устойчивого равновесия на угол 60 градусов? На угол 90 градусов?

### 3 Перевороты и вращения маятника

Маятник вращается (совершает полные обороты), если его полная энергия превышает  $2mga$ , т. е. превышает максимальное значение потенциальной энергии, соответствующее переверну-

тому положению. Влияние поля тяжести сказывается в том, что вращение маятника в вертикальной плоскости происходит неравномерно: угловая скорость максимальна (при полном отсутствии трения) в те моменты, когда маятник проходит через нижнее положение устойчивого равновесия, и минимальна, когда он проходит через верхнее положение неустойчивого равновесия.

### 3.1 Угловая скорость при переворотах маятника.

(а) Выберите полное отсутствие трения. Рассчитайте минимальное значение начальной угловой скорости, которую нужно сообщить маятнику в нижнем положении равновесия, чтобы маятник совершил полный переворот. Обратите внимание на характер графика зависимости угловой скорости от времени при движении с начальной скоростью, превышающей это минимальное значение: когда маятник совершает перевороты, его угловая скорость изменяется периодически (т. е. угловая скорость осциллирует со временем), но знак угловой скорости (направление вращения) не изменяется, и график не пересекает ось времени.

(б)\* Как изменится период этих колебаний угловой скорости, если увеличить начальную скорость, сообщаемую маятнику при возбуждении? Рассчитайте минимальное значение угловой скорости при переворотах маятника для заданного значения  $\Omega$  начальной угловой скорости. Найдите асимптотическое поведение периода вращения от начальной угловой скорости  $T(\Omega)$  для значений полной энергии  $E$ , значительно превышающих потенциальную энергию перевернутого маятника ( $E \gg 2mga$ ). Сделайте теоретическую оценку периода вращения маятника, которому в нижней точке сообщена угловая скорость, равная 3 единицам угловой частоты малых колебаний. Проверьте результат расчета в моделирующем эксперименте.

(в) Какие начальные условия нужно ввести в моделирующем эксперименте для того чтобы получить фазовую траекторию, проходящую над сепаратрисой? Расположенную ниже сепаратрисы? Совпадающую с верхней или с нижней ветвью сепаратрисы?

### 3.2\* Периоды переверотов и больших колебаний.

(а) Особенно интересно сравнить период переверотов маятника в отсутствие трения с периодом колебаний того же консервативного маятника в случае, когда полная энергия  $E$  близка к максимально возможному значению потенциальной энергии  $E_{\max} = 2mga$ . В этом случае фазовые траектории переверотов и колебаний проходят в окрестности сепаратрисы. Используя моделирующий эксперимент, выполните измерение периода для двух значений полной энергии  $E$ , которые слегка отличаются от  $E_{\max}$  на одну и ту же величину в большую и меньшую сторону. Например, возьмите сначала  $E/E_{\max} = 0.9999$  а затем  $E/E_{\max} = 1.0001$ .

(б)\* Чему равно отношение измеренных Вами периодов движения маятника для этих двух случаев? Как можно объяснить наблюдаемое отношение периодов?

(в)\*\* Попытайтесь получить теоретическую оценку периода колебаний маятника с полной энергией  $E/E_{\max} = 0.9999$ , и периода вращения маятника с полной с энергией  $E/E_{\max} = 1.0001$ .

(г)\*\* Когда полная энергия маятника  $E$  превышает высоту потенциального барьера  $E_{\max} = 2mga$ , период вращения  $T$  быстро убывает при увеличении полной энергии маятника. Найдите асимптотическое поведение периода  $T(E)$  при стремлении энергии  $E$  к бесконечности.

### 3.3\* Перевороты маятника при наличии трения.

(а) Изучите экспериментально вращение маятника при наличии слабого вязкого трения. Обратите внимание на то, как фазовая траектория постепенно приближается к сепаратрисе. Какое значение имеет полная энергия маятника в тот момент, когда фазовая траектория пересекает сепаратрису? Обратите внимание на то, что до пересечения сепаратрисы, пока маятник совершает полные перевороты, кинетическая энергия и угловая скорость нигде не обращаются в нуль.

(б)\*\* Используя закон сохранения энергии, оцените минимальную начальную угловую скорость, которую необходимо сообщить маятнику в нижнем положении равновесия для того чтобы он совершил полный оборот. Добротность маятника  $Q = 15$ . Какая начальная угловая скорость нужна для того чтобы маятник совершил два оборота? Проверьте свои расчеты в моделирующем эксперименте. Методом проб и ошибок уточните полученную оценку необходимой минимальной скорости. Объясните наблюдаемое небольшое различие теоретического и экспериментального значений минимальной начальной скорости.

## 4 Приложение: Сводка основных формул

Дифференциальное уравнение движения маятника:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0,$$

где  $\omega_0$  — частота колебаний предельно малой амплитуды:

$$\omega_0^2 = \frac{mga}{J} = \frac{g}{l}; \quad l = \frac{J}{ma}.$$

Здесь  $m$  — масса маятника,  $a$  — расстояние между горизонтальной осью (точкой подвеса) и центром масс,  $J$  — момент инерции относительно оси вращения,  $l = J/ma$  — приведенная длина физического маятника и  $g$  — ускорение свободного падения.

Уравнение фазовой траектории в отсутствие трения:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{\omega_0^2} + 2(1 - \cos \varphi) = \frac{E}{E_0},$$

где  $E$  — полная энергия маятника, а

$$E_0 = \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}mga = \frac{1}{4}(E_{\text{pot}})_{\text{max}}.$$

Здесь  $(E_{\text{pot}})_{\text{max}} = 2mga$  — максимально возможное значение потенциальной энергии, которое маятник имеет в перевернутом вертикальном положении.

Уравнение сепаратрисы в фазовой плоскости имеет вид:

$$\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi/2).$$

Зависимость угла отклонения и угловой скорости маятника для лимитационного движения (движения по сепаратрисе):

$$\varphi(t) = \pi - 4 \arctan(e^{-\omega_0 t}), \quad \dot{\varphi}(t) = \pm \frac{2\omega_0}{\cosh(\omega_0 t)} = \pm \frac{4\omega_0}{(e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t})}.$$