

Вынужденные колебания линейного осциллятора

Задачи для самостоятельного решения

Бутиков Е. И.

Аннотация. В данном пособии приведены контрольные вопросы, теоретические и экспериментальные задачи для самостоятельной работы к лабораторной работе «Вынужденные колебания линейного осциллятора», а также материал для возможных индивидуальных заданий студентам (по указанию преподавателя).

Содержание

1	Установившиеся вынужденные колебания	1
2	Переходные процессы	4
3	Приложение: сводка основных формул	7

1 Установившиеся вынужденные колебания

При изучении установившихся колебаний с помощью моделирующей компьютерной программы нет необходимости дожидаться, пока произойдет установление колебаний. Для того, чтобы сразу происходило моделирование установившихся колебаний, достаточно выбрать опцию «Установившиеся колебания» на панели управления. При этом программа автоматически выбирает начальные условия $\varphi(0) = a \sin \delta$ и $\dot{\varphi}(0) = a\omega \cos \delta$, обеспечивающие отсутствие переходного процесса, независимо от введенных Вами начальных условий. Необходимые значения амплитуды a и сдвига фаз δ программа рассчитывает на основе теоретических выражений, используя введенные Вами значения вынуждающей частоты ω и добротности осциллятора Q .

1.1 Установившиеся вынужденные колебания в отсутствие трения.

(а) Строго говоря, в отсутствие трения переходный процесс продолжается бесконечно долго, так что установившиеся колебания неизменной амплитуды возможны только при указанных выше начальных условиях. Имеет ли какой-либо физический смысл аналитическое решение

$\varphi(t) = a \sin \omega t$ с $a = \phi_0 \omega_0^2 / (\omega_0^2 - \omega^2)$, описывающее установившиеся колебания при $\gamma = 0$, для каких-либо иных начальных условий? Можно ли применять это решение к реальным физическим системам? Если да, то при каких условиях возможно наблюдать описываемое этим решением движение в реальных системах?

(б) Убедитесь на опыте, что при вынуждающих частотах, меньших собственной частоты осциллятора (т. е. при $\omega < \omega_0$), установившиеся вынужденные колебания происходят в одинаковой фазе с колебаниями возбуждающего шатуна. При какой частоте амплитуда колебаний маховика будет в два раза превосходить амплитуду шатуна? Рассчитайте эту частоту и проверьте свой результат с помощью моделирующего эксперимента.

(в) Убедитесь, что при вынуждающих частотах, больших чем собственная частота (т. е. при $\omega > \omega_0$), колебания маховика происходят в противофазе с колебаниями возбуждающего шатуна. При каком значении частоты ($\omega > \omega_0$) амплитуда маховика опять будет вдвое превосходить амплитуду шатуна? При какой частоте амплитуды маховика и шатуна будут равны? При какой частоте амплитуда вынужденных колебаний маховика будет вдвое меньше амплитуды шатуна? Проверьте свои ответы в эксперименте.

1.2* Превращения энергии при установившихся вынужденных колебаниях осциллятора.

(а) Используя графики потенциальной, кинетической и полной механической энергии, выясните, во время каких частей цикла вынужденных колебаний энергия передается от шатуна (точнее, от внешнего источника, обеспечивающего заданное принудительное движение шатуна) осциллятору. Приведите физическое объяснение наблюдаемому направлению переноса энергии. На протяжении каких частей цикла происходит обратная передача энергии от осциллятора к внешнему источнику?

(б) В случае кинематического возбуждения вынужденных колебаний, чему равно отношение средних значений потенциальной и кинетической энергии для тех значений частоты возбуждения, при которых амплитуда маховика вдвое превосходит амплитуду шатуна? Для значения частоты, при котором эти амплитуды равны? Для случая, когда амплитуда маховика вдвое меньше амплитуды шатуна? Сравните наблюдаемые на экспериментальных графиках значения с полученными Вами теоретическими значениями этого отношения средних энергий.

1.3 Амплитуда установившихся колебаний и их запаздывание по фазе. Введите некоторое значение добротности осциллятора, скажем, $Q = 5$.

(а) Оцените, на сколько процентов резонансная частота в этом случае ниже собственной частоты осциллятора ω_0 .

(б) Чему равно отношение амплитуды маховика при резонансе к амплитуде вынуждающего шатуна?

(в) Чему равен сдвиг фаз (в радианах и в долях периода колебаний) между колебаниями маховика и шатуна на резонансной частоте и на частоте, составляющей 0.8 резонансного значения? Дайте ответы на те же вопросы для $Q = 20$.

1.4** Особенности кинематического возбуждения колебаний. В случае динамического возбуждения колебаний заданной периодической силой, величина которой не зависит от по-

ложения маховика, отношение средних значений потенциальной и кинетической энергий равно $(\omega_0/\omega)^2$, так что при низких частотах в среднем преобладает потенциальная энергия.

(а) Проанализируйте изменение со временем каждого из видов энергии и полной энергии осциллятора при кинематическом возбуждении. Почему, несмотря на совпадение дифференциальных уравнений для случаев динамического и кинематического возбуждения колебаний, в энергетических превращениях имеются определенные различия? Рассчитайте отношение средних значений потенциальной и кинетической энергии для кинематического способа возбуждения колебаний. Приведите качественные физические соображения для объяснения отличия этого отношения от случая динамического возбуждения колебаний.

(б) При какой частоте возбуждения средние значения потенциальной и кинетической энергии одинаковы?

(в) В случае динамического возбуждения установившихся колебаний при резонансе максимальные (и средние) значения двух видов энергии одинаковы, а их изменения происходят точно в противофазе, так что полная механическая энергия осциллятора остается неизменной. Внешний источник лишь компенсирует потери энергии из-за трения. Однако при кинематическом возбуждении осциллятора его полная энергия испытывает вариации даже при резонансе. Рассчитайте, на сколько процентов максимальное и минимальное значения полной энергии при резонансе отличаются от ее среднего значения.

1.5** Установившиеся колебания при разных частотах.

(а) Пусть частота ω принудительного движения шатуна немного ниже собственной частоты осциллятора ω_0 , скажем, $\omega = 0.9\omega_0$, и пусть добротность Q равна 5. Чему равно отношение амплитуды установившихся колебаний к амплитуде при резонансе? Какую долю цикла составляет отставание по фазе колебаний маховика от колебаний шатуна?

(б) При каких значениях вынуждающей частоты (по обе стороны от резонанса) амплитуда установившихся колебаний составляет половину амплитуды при резонансе? Какую часть цикла составляет запаздывание по фазе в каждом из этих случаев? Какой из видов энергии в среднем преобладает в каждом случае?

(в) При какой частоте ω вынуждающего шатуна амплитуды маховика и шатуна одинаковы? Какую часть периода составляет в этом случае запаздывание маховика от шатуна по фазе?

1.6** Полуширина резонансной кривой.

(а) Изучите аналитически и экспериментально зависимость резонансной амплитуды установившихся колебаний от значения добротности Q . Как полуширина резонансной кривой зависит от добротности осциллятора? (Полушириной резонансной кривой называют интервал частот, в пределах которого амплитуда установившихся колебаний превышает половину ее максимального значения.) Получите приближенную формулу для полуширины, справедливую в случае слабого затухания, т. е. при $Q \gg 1$.

(б) Как изменяется положение максимума резонансной кривой по мере увеличения затухания? При каком значении добротности Q этот максимум смещается к нулевому значению частоты? Иначе говоря, при какой добротности Q статический эффект вынуждающей силы больше динамического эффекта такой же по величине переменной силы при всех частотах?

1.7 Поглощаемая и рассеиваемая мощность.**

(а) Докажите аналитически, что при установившихся вынужденных колебаниях энергия, получаемая осциллятором от внешнего источника за период, равна энергии, рассеиваемой осциллятором из-за трения за то же время. Воспользуйтесь приведенным в учебном пособии «Вынужденные колебания линейного осциллятора» выражением для значений амплитуды a и фазы δ установившихся колебаний.

(б) Покажите, что спектральное распределение энергии, поглощаемой при вынужденных колебаниях осциллятором с высокой добротностью, описывается лоренцевской функцией

$$F(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2},$$

где $\tau = 1/\gamma$. Выразите полуширину лоренцевского контура через добротность осциллятора.

2 Переходные процессы**2.1* Начальные условия, при которых переходный процесс не возникает**

(а) Для произвольных значений добротности осциллятора, амплитуды и частоты возбуждающего шатуна получите выражения для начального угла отклонения маховика $\varphi_0 = \varphi(0)$ и его угловой скорости $\Omega = \dot{\varphi}(0)$ при $t = 0$, при которых переходный процесс не возникает, т. е. синусоидальные вынужденные колебания неизменной амплитуды происходят сразу после включения внешнего воздействия, без переходного процесса.

(б) Приняв $Q = 5$, $\omega = \omega_0$, и $\phi_0 = 15^\circ$, рассчитайте значения φ_0 и Ω , при которых не будет переходного процесса. Проверьте свой результат с помощью моделирующего эксперимента на компьютере. Повторите расчет и эксперимент для других значений параметров системы: $Q = 25$, $\omega = 0.5\omega_0$, $\phi_0 = 15^\circ$ и, скажем, для $Q = 25$, $\omega = 1.5\omega_0$, $\phi_0 = 15^\circ$.

2.2* Переходные процессы при резонансе.

Примите следующие значения для параметров осциллятора и вынуждающего воздействия: $Q = 5$, $\omega = \omega_0$, $\phi_0 = 15^\circ$, и рассмотрите переходный процесс при нулевых начальных условиях $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$.

(а) Рассчитайте промежуток времени (выразив его в единицах периода колебаний), по истечении которого амплитуда маховика достигнет 90% своего установившегося значения. Проверьте свой результат в эксперименте. Обратите внимание на экспоненциальный характер приближения амплитуды к значению, соответствующему установившимся колебаниям.

Проанализируйте энергетические превращения в этом процессе, используя графики кинетической, потенциальной и полной энергии. В какие моменты времени полная энергия осциллятора растет наиболее быстро?

(б) Внимательно изучите графики разложения переходного процесса на его простые составляющие (на гармонические установившиеся колебания и затухающие собственные колебания).

Обратите особое внимание на экспоненциальное затухание вклада собственных колебаний. Почему начальная амплитуда собственных колебаний совпадает в этом случае с амплитудой установившихся колебаний? Изменится ли это соотношение амплитуд при изменении начальных условий?

(в)* Принимая во внимание аналитическое выражение для $\varphi(t)$, соответствующее резонансному случаю ($\omega = \omega_0$), предскажите поведение сечений Пуанкаре на фазовой плоскости. Проверьте свое предсказание в моделирующем эксперименте.

(г)* Рассмотрите переходный процесс резонансной раскачки осциллятора в отсутствие трения. По какому закону растет амплитуда в переходном процессе, начинающемся из состояния покоя в положении равновесия? Во сколько раз амплитуда маховика превысит амплитуду шатуна после $k = 15$ полных циклов колебания шатуна? Сколько периодов внешнего воздействия необходимо для того, чтобы амплитуда маховика в $n = 20$ раз превысила амплитуду шатуна? Проверьте свои ответы в эксперименте. Что представляет собой проекция фазовой траектории на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ в этом случае? Как располагаются в фазовой плоскости сечения Пуанкаре?

(д)* Возможно ли уменьшение амплитуды колебаний маховика в отсутствие трения при точной настройке внешнего воздействия в резонанс с собственной частотой осциллятора? Приведите физическое обоснование своему ответу. Подтверждаются ли Ваши заключения в эксперименте?

2.3* **Переходные процессы вблизи резонанса.**

Исследуйте процесс установления колебаний в окрестности резонанса. Пусть частота внешнего возбуждения равна, например, $1.2\omega_0$ (ω_0 — собственная частота осциллятора). Рассмотрите прежде всего поведение системы в отсутствие трения при нулевых начальных условиях.

(а)* Рассчитайте амплитуду колебаний на собственной частоте ω_0 , входящих составной частью в переходный процесс (напомним, что в отсутствие трения их амплитуда остается неизменной, и переходный процесс продолжается бесконечно долго). Найдите также амплитуду угловой скорости этих колебаний. Чему равно отношение амплитуды колебаний на собственной частоте к амплитуде установившихся вынужденных колебаний на частоте ω ? Проверьте свой расчет, используя опцию «Разложение переходного процесса» на панели управления.

(б) Объясните наблюдаемые графики угловой скорости в процессе биений, используя метод векторных диаграмм для сложения двух синусоидальных колебаний, формирующих биения. Сколько циклов колебаний совершит шатун к моменту, когда амплитуда угловой скорости маховика достигнет максимального значения? Сколько времени проходит между последовательными обращениями амплитуды в нуль? Иными словами, чему равен период таких переходных биений?

(в)** Рассчитайте максимальные значения угловой скорости и угла отклонения во время биений. Чему равно отношение максимальной амплитуды маховика к амплитуде шатуна?

(г)** Обратите внимание на распределение сечений Пуанкаре фазовой траектории для рассматриваемого процесса биений в отсутствие трения. Объясните наблюдаемое распределение.

(д)** Рассмотрите влияние небольшого трения на изучаемый процесс, введя умеренное значение добротности Q (20 – 25), оставив без изменения значения всех остальных параметров. Каких изменений в поведении осциллятора следует при этом ожидать? Как изменится распре-

деление сечений Пуанкаре на фазовой плоскости? Проследите поведение сечений Пуанкаре на протяжении всего переходного процесса. Объясните наблюдаемое распределение.

(е)** Слегка измените значение частоты внешнего возбуждения. Пусть, скажем, частота внешнего возбуждения ω будет $1.19\omega_0$ или $1.21\omega_0$ вместо прежнего значения $1.20\omega_0$. К каким изменениям это приведет в переходном процессе? Какими будут распределения сечений Пуанкаре в фазовой плоскости при таких частотах возбуждения в случае отсутствия трения и при наличии слабого трения? С чем связано изменение наблюдаемой картины по сравнению с исследованным выше случаем $\omega = 1.2\omega_0$?

(ж)* Предскажите поведение сечений Пуанкаре для вынуждающей частоты $\omega = 1.25\omega_0$.

2.4* **Переходные процессы вдали от резонанса.**

Пусть частота принудительных колебаний возбуждающего шатуна в четыре раза меньше собственной частоты осциллятора: $\omega = 0.25\omega_0$. Будем рассматривать поведение системы при нулевых начальных условиях.

(а) Какими будут колебания маховика в переходном процессе, если трение отсутствует? Рассчитайте для этого случая амплитуды двух налагающихся друг на друга гармонических колебаний, одного на собственной частоте осциллятора ω_0 и второго на частоте возбуждения ω . Чему равны амплитуды угловых скоростей этих колебаний?

(б) Пронаблюдайте в эксперименте, какую фазовую траекторию вычерчивает в этом процессе изображающая точка. Объясните форму наблюдаемой фазовой траектории и распределение сечений Пуанкаре.

(в) Введите небольшое трение, выбрав для Q значение около 15, сохраняя прежними значения всех остальных параметров. Используя опцию «Разложение переходного процесса» в панели управления, наблюдайте изменение формы графиков при постепенном затухании колебаний на собственной частоте. Проследите, как сложная фазовая траектория переходного процесса постепенно трансформируется в эллипс, соответствующий установившимся синусоидальным колебаниям.

(г)** Рассмотрите противоположный случай высокочастотной возбуждающей силы. Например, пусть частота внешнего воздействия будет в четыре раза больше собственной частоты осциллятора: $\omega = 4\omega_0$. Выберите нулевые начальные условия и полное отсутствие трения. Чему будет равно отношение амплитуд двух складывающихся колебаний с частотами ω и ω_0 ? Во сколько раз максимальное отклонение маховика, наблюдаемое во время этого переходного процесса, превышает амплитуду установившихся колебаний, входящих составной частью в этот переходный процесс?

(е)** Сравните формы фазовых траекторий и распределения сечений Пуанкаре для последних двух случаев, а именно, $\omega = 0.25\omega_0$ и $\omega = 4\omega_0$ в отсутствие трения. Чем объясняется подобие фазовых траекторий для этих случаев?

(д)* Введите небольшое трение в случае, когда $\omega = 4\omega_0$. Проследите, как постепенно устанавливаются высокочастотные синусоидальные вынужденные колебания по мере того, как затухают колебания на собственной частоте. Как в этом случае эволюционирует форма фазовой траектории? Как ведет себя распределение сечений Пуанкаре в течение рассматриваемого пере-

ходного процесса?

(е)** Повторите моделирующий эксперимент при других значениях вынуждающей частоты. Возьмите, например, значения $\omega = 0.125 \omega_0$, $\omega = 0.5 \omega_0$, $\omega = 1.5 \omega_0$, $\omega = 2 \omega_0$, $\omega = 6 \omega_0$. Объясните наблюдаемые особенности переходных процессов в этих случаях.

3 Приложение: сводка основных формул

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний линейного осциллятора при кинематическом возбуждении:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \omega_0^2\phi_0 \sin \omega t.$$

Периодическое частное решение этого уравнения, описывающее установившиеся вынужденные колебания:

$$\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta).$$

Амплитуда a и сдвиг фаз δ установившихся вынужденных колебаний:

$$a(\omega) = \frac{\omega_0^2\phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad \tan \delta = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Резонансное значение вынуждающей частоты ω_{res} , при котором амплитуда установившихся колебаний максимальна:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right).$$

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний при резонансе (для $\gamma < \sqrt{2}\omega_0$) и приближенное выражение для нее, справедливое при $\gamma \ll \omega_0$:

$$a_{\text{max}} = \frac{\omega_0^2\phi_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \approx \frac{\omega_0\phi_0}{2\gamma} = Q\phi_0.$$

Здесь добротность Q — та же самая безразмерная величина $Q = \omega_0/(2\gamma)$, которая характеризует затухание собственных колебаний.

Амплитуда Ω угловой скорости при установившихся вынужденных колебаниях:

$$\Omega = \omega a(\omega) = \frac{\omega_0^2\phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2/\omega - \omega)^2 + 4\gamma^2}}.$$

Максимальное (резонансное) значение амплитуды угловой скорости Ω_{max} установившихся вынужденных колебаний (при $\omega = \omega_0$):

$$\Omega_{\text{max}} = \omega a(\omega_0) = \frac{\omega_0^2\phi_0}{2\gamma} = \omega_0 Q \phi_0.$$

Спектральная зависимость средней поглощаемой (рассеиваемой) мощности (лоренцевский контур):

$$F(\Delta\omega) = \frac{1}{1 + (\Delta\omega)^2\tau^2} = \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2\tau^2}.$$

Начальные условия, при которых не существует переходного процесса (т. е. сразу происходят установившиеся колебания):

$$\varphi_0 = a \sin \delta, \quad \dot{\varphi}(0) = a\omega \cos \delta,$$

где a и δ — амплитуда и сдвиг фаз установившихся колебаний.

Переходный процесс на резонансной частоте при нулевых начальных условиях:

$$\varphi(t) \approx -Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) \cos \omega_0 t.$$