

Параметрическое возбуждение линейного осциллятора

Задачи для самостоятельного решения

Бутиков Е. И.

Аннотация. В данном пособии приведены контрольные вопросы, теоретические и экспериментальные задачи для самостоятельной работы к лабораторной работе «Параметрическое возбуждение линейного осциллятора», а также материал для возможных индивидуальных заданий студентам (по указанию преподавателя).

Содержание

1	Основной параметрический резонанс	1
2	Параметрические резонансы высоких порядков	4

1 Основной параметрический резонанс

1.1* **Основной резонанс ($n = 1$) в отсутствие трения.** Задайте умеренное значение глубины m модуляции момента инерции (около 10 – 15%). Пусть период модуляции T равен половине периода T_0 собственных колебаний осциллятора. Чтобы принудительная модуляция параметра вызвала резонанс, осциллятор с самого начала должен совершать хотя бы небольшие собственные колебания, т. е. должны быть заданы ненулевые начальные условия.

(а) Какого вида начальные условия следует задать, чтобы сразу после включения модуляции момента инерции начался быстрейший резонансный рост амплитуды колебаний? Напомним, что в принятой модели в начальный момент времени $t = 0$ грузы скачкообразно раздвигаются в стороны от оси вращения, так что момент инерции ротора возрастает.

(б) Какого вида начальные условия приведут сначала к постепенному затуханию уже существующих колебаний? Проверьте свой ответ в моделирующем эксперименте. Используя полученные графики колебаний, объясните физическую причину первоначального уменьшения амплитуды колебаний. Примите во внимание фазовые соотношения между собственными колебаниями ротора и принудительными периодическими изменениями его момента инерции. Почему через некоторое время убывание амплитуды колебаний сменяется ее возрастанием?

(в)*** Попытайтесь выяснить, какими факторами определяется промежуток времени, по истечении которого первоначальное затухание колебаний сменяется их неограниченным ростом.

1.2* **Рост амплитуды в условиях основного резонанса в отсутствие трения.** Пусть принудительная модуляция момента инерции происходит с периодом T , равным половине периода

T_0 собственных колебаний осциллятора ($T = T_0/2$).

(а) По какому закону растет со временем амплитуда колебаний в условиях основного резонанса, если задано некоторое начальное отклонение $\varphi(0) = \varphi_0$ и нулевая начальная скорость $\dot{\varphi}(0) = 0$? При каком значении глубины модуляции m (в отсутствие трения) начальная амплитуда колебаний удвоится за 10 циклов модуляции момента инерции? Проверьте свой результат в моделирующем эксперименте.

(б) Чем будет отличаться процесс резонансной раскачки от случая, рассмотренного в пункте (а), если задать такое же по величине начальное отклонение в противоположную сторону?

1.3* Порог возбуждения для основного резонанса.

(а) Выбрав умеренное значение глубины модуляции момента инерции (скажем, $m = 15\%$), оцените пороговое (минимальное) значение добротности Q_{\min} в условиях настройки периода модуляции на основной резонанс ($T = T_0/2$). Напомним, что пороговый режим соответствует стационарным колебаниям неизменной амплитуды (параметрическая регенерация). При каких начальных условиях колебания осциллятора с пороговым значением добротности $Q = Q_{\min}$ сразу будут стационарными?

(б) Уточните Вашу теоретическую оценку порогового значения добротности Q_{\min} с помощью моделирующего эксперимента на компьютере (методом проб и ошибок). В чем заключается причина расхождений теоретического и экспериментального значений?

(в) Исследуйте устойчивость режима параметрической регенерации, т. е. режима стационарных колебаний в условиях порога возбуждения (для $Q = Q_{\min}$). Устойчив ли этот режим по отношению к малым изменениям параметров системы (периода и глубины модуляции, добротности)? Устойчив ли режим регенерации по отношению к малым изменениям начальных условий?

(г)** Пороговое значение добротности, обеспечивающее стационарные колебания при заданной глубине модуляции m , будет абсолютно минимальным при *точной* настройке периода модуляции на резонанс. При малых значениях m основной резонанс имеет место при $T = T_0/2$. Однако с ростом m резонансное значение периода модуляции начинает отклоняться от $T_0/2$. Получите выражение для резонансного значения периода модуляции при произвольно большой глубине модуляции m и сделайте численные оценки T для $m = 15\%$ и $m = 40\%$.

1.4* Рост амплитуды параметрических колебаний при превышении порога возбуждения.

(а) Для периода модуляции $T = T_0/2$ и глубины модуляции $m = 15\%$, во сколько раз возрастает амплитуда колебаний за 10 циклов модуляции параметра, если добротность вдвое больше своего порогового значения, т. е. $Q = 2Q_{\min}$? Зависит ли ответ на этот вопрос от начальных условий? Проверьте свой ответ в эксперименте.

(б) Какой будет амплитуда колебаний спустя еще 10 периодов модуляции? Почему при превышении порога возбуждения трение не в состоянии ограничить роста амплитуды колебаний, возбуждаемых параметрически?

1.5** Основной интервал параметрического резонанса в отсутствие трения.

(а) Выполните теоретический расчет значений периода модуляции T , соответствующих границам основного интервала параметрической неустойчивости, для заданного значения глубины

модуляции m (в приближении $m \ll 1$) для случая, когда трение отсутствует.

(б) Как ширина интервала неустойчивости зависит от глубины модуляции? Влияют ли члены второго порядка малости (по параметру $m \ll 1$) на ширину интервала?

1.6** Колебания на границах основного интервала параметрической неустойчивости.

Введите значение периода модуляции T , соответствующее одной из границ основного интервала параметрической неустойчивости при заданной глубине модуляции (в отсутствие трения). Эти границы замечательны тем, что для них возможны стационарные периодические колебания неизменной амплитуды. Однако при произвольных начальных условиях форма колебаний будет постепенно изменяться, т. е. периодического процесса не будет. Амплитуда колебаний будет сначала увеличиваться, а через некоторое время уменьшаться и потом снова возрастать, либо наоборот, сначала уменьшаться, а затем увеличиваться. Почему?

1.7** Начальные условия для периодических колебаний на границах интервала.

(а) Введите значение периода модуляции, соответствующее нижней границе основного интервала параметрической неустойчивости при заданном значении глубины модуляции m (в отсутствие трения). Задайте произвольно некоторое начальное отклонение ротора. Какую начальную скорость необходимо задать для того, чтобы получить в моделирующем эксперименте стационарные периодические колебания неизменной амплитуды? Сделайте соответствующие расчеты и эксперименты также и для верхней границы интервала неустойчивости.

(б) Объясните характерные особенности наблюдаемых графиков и фазовой траектории для стационарных колебаний на каждой из границ основного интервала параметрической неустойчивости.

(в) Для выбранного значения начального угла отклонения φ_0 и рассчитанного значения начальной угловой скорости $\dot{\varphi}(0)$, обеспечивающей стационарные колебания на границе интервала, рассчитайте амплитуду колебаний (для каждой из границ интервала). Проверьте свои теоретические значения в эксперименте.

1.8** Порог параметрического возбуждения в пределах резонансного интервала. Режим параметрической генерации при точной настройке на основной резонанс был рассмотрен в задаче 1.3, где требовалось найти минимальное значение добротности $Q = Q_{\min}$, обеспечивающее стационарные колебания. Но стационарные колебания возможны и при некоторой расстройке периода модуляции относительно его резонансного значения.

(а) Выберите некоторое значение периода модуляции T где-либо в пределах интервала параметрического резонанса (для заданной глубины модуляции m), например, посередине между резонансным значением и одной из границ. Оцените наблюдаемый в эксперименте рост амплитуды колебаний в отсутствие трения, и затем на основе этих наблюдений рассчитайте то минимальное (пороговое) значение добротности $Q = Q_{\min}$, которое может обеспечить стационарные колебания при данных значениях глубины и периода модуляции.

(б) Проверьте свою оценку $Q = Q_{\min}$ в эксперименте и уточните ее методом проб и ошибок. Сравните наблюдаемые графики (и фазовые траектории) стационарных колебаний с соответствующими графиками стационарного процесса параметрической регенерации в условиях

точной настройки периода модуляции на основной резонанс, а также с графиками стационарных колебаний на границах интервала в отсутствие трения. Чем объясняются наблюдаемые отличия?

(в)*** Для малых значений глубины модуляции $m \ll 1$ рассчитайте с точностью до членов второго порядка по m пороговое значение добротности $Q = Q_{\min}$ для значения периода модуляции, лежащего в произвольной точке внутри интервала параметрического резонанса. Сравните свой теоретический результат с оценкой, полученной экспериментально в пунктах (а) и (б).

1.9*** Основной интервал параметрического резонанса при наличии трения.

(а) Для некоторого фиксированного значения глубины модуляции m частотный интервал параметрического резонанса сужается с увеличением трения и исчезает совсем, когда добротность уменьшается до порогового значения. Допустим, что добротность Q больше своего порогового значения Q_{\min} . Рассчитайте значения T_- и T_+ периода модуляции T , соответствующие границам интервала параметрического резонанса для заданных m и Q (в приближении $m \ll 1$). Выразите T_- и T_+ через m и m_{\min} , где $m_{\min} = \pi/(2Q)$ — приближенное значение пороговой глубины модуляции m для данной добротности Q (в условиях точной настройки на основной резонанс).

(б) Чтобы в моделирующем эксперименте наблюдать стационарные колебания, соответствующие этим границам, необходимо задать начальные условия должным образом. Какую начальную скорость нужно ввести при заданном начальном отклонении φ_0 , чтобы получить стационарные колебания (для каждой из границ интервала)? Проверьте свои расчеты в эксперименте.

1.10 **Колебания за пределами интервалов параметрического резонанса.** Для некоторого произвольного значения m введите период модуляции T , находящийся вне пределов интервалов параметрического резонанса. Убедитесь, что какими бы ни были начальные условия, колебания рано или поздно затухнут даже при очень слабом трении, и осциллятор будет покоиться в положении равновесия, несмотря на периодические изменения момента инерции.

2 Параметрические резонансы и интервалы неустойчивости высоких порядков ($n > 1$)

2.1* Параметрический резонанс третьего порядка ($n = 3$) в отсутствие трения.

(а) Исследуйте экспериментально параметрическое возбуждение ротора при скачкообразных изменениях момента инерции ротора с периодом $T \approx 3T_0/2$ (приблизительно полтора периода собственных колебаний, или три цикла изменения параметра на протяжении двух собственных колебаний). Какие начальные условия обеспечат рост колебаний с самого начала модуляции параметра?

(б) Какое значение m глубины модуляции момента инерции необходимо задать, чтобы в отсутствие трения начальная амплитуда колебаний удвоилась за 15 циклов модуляции при настройке на резонанс третьего порядка? Сколько циклов модуляции необходимо для того, чтобы амплитуда удвоилась еще раз?

(в) При каких начальных условиях амплитуда колебаний сначала будет убывать? Почему это затухание колебаний через некоторое время неизбежно сменится их ростом?

2.2* Порог возбуждения для параметрического резонанса третьего порядка.

(а) Выполните теоретическую оценку порогового (минимального) значения добротности осциллятора Q_{\min} при малом значении глубины модуляции $m \ll 1$ с точностью до членов первого порядка по m . Сравните полученное значение с пороговой добротностью для основного резонанса (задача 1.3) и для резонанса второго порядка $n = 2$ (см. задачу 3.4). Как можно объяснить это различие пороговых значений добротности для резонансов разных порядков?

(б) Для глубины модуляции $m = 30\%$ рассчитайте минимальное значение добротности Q_{\min} , при котором возможно параметрическое возбуждение колебаний (на основе теоретической оценки, полученной при ответе на предыдущий вопрос данной задачи). Улучшите теоретическую оценку методом проб и ошибок. Объясните наблюдаемую форму графиков и фазовой траектории стационарных колебаний при Q_{\min} . Какие факторы определяют амплитуду таких колебаний?

2.3 Третий интервал параметрического возбуждения.**

(а) Рассчитайте приближенно значения периода модуляции T , которые соответствуют границам третьего интервала параметрической неустойчивости в отсутствие трения при заданной глубине модуляции момента инерции (в приближении $m \ll 1$) с точностью до членов первого порядка по m . Как ширина третьего интервала зависит от глубины модуляции? Влияют ли члены второго порядка на ширину интервала?

(б) Какую начальную угловую скорость следует ввести при выбранном начальном отклонении φ_0 для того, чтобы получить стационарные периодические колебания неизменной амплитуды (для каждой из границ третьего интервала параметрического резонанса)? Проверьте свой ответ в эксперименте. Чем отличаются фазовые траектории, соответствующие стационарным колебаниям на нижней и верхней границах этого интервала?

(в) Исследуйте ширину третьего интервала параметрического возбуждения в отсутствие трения при произвольно больших амплитудах модуляции m . Обратите внимание, как ведет себя третий интервал при увеличении глубины модуляции. Какими физическими причинами можно объяснить постепенное смещение интервала в сторону более коротких периодов модуляции?

(г) При $m = 60\%$ обе границы третьего интервала параметрического резонанса совпадают (можно сказать, что они пересекаются при $m = 60\%$). Какими физическими причинами объясняется это исчезновение третьего интервала при такой глубине модуляции момента инерции?

2.4 Третий интервал параметрического резонанса при наличии трения.**

(а) При малых m параметрический резонанс третьего порядка имеет место при $T = 3T_0/2$. Однако по мере увеличения глубины модуляции m резонансное значение периода модуляции все сильнее отклоняется от $3T_0/2$. Получите аналитическое выражение для периода модуляции, соответствующее точной настройке на третий резонанс для произвольных (в том числе приближающихся к 100%) значений глубины модуляции. Каковы резонансные значения периода для $m = 15\%$, $m = 40\%$ и $m = 60\%$?

(б) Как влияет трение на ширину третьего интервала параметрического резонанса? Для малых глубин модуляции $m \ll 1$ рассчитайте приближенно значения периода модуляции T , соответствующие границам интервала при заданной добротности Q . Ответ выразите через m и пороговое значение $m_{\min} = 3\pi/(2Q)$ (см. задачу 3.2).

2.5 Параметрический резонанс второго порядка.**

(а) При небольших значениях глубины модуляции ($m < 20\%$) резонанс второго порядка оказывается слабее не только резонанса первого порядка, но и резонанса третьего порядка: при настройке периода модуляции на резонанс второго порядка амплитуда колебаний растет значительно медленнее, чем при настройке на резонансы $n = 1$ и $n = 3$ (для той же глубины модуляции). Какие физические причины можете Вы привести для объяснения того, что резонанс с $n = 2$ (как и другие резонансы четных порядков) при небольших значениях m выражен значительно слабее, чем резонансы нечетных порядков? Объясните наблюдаемую форму фазовой траектории при резонансе второго порядка.

(б) Какие начальные условия нужно задать для получения наиболее быстрого роста амплитуды колебаний при резонансе второго порядка? Попробуйте определить экспериментально пороговое значение глубины модуляции для этого резонанса при заданной добротности (например, при $Q = 15$).

(в)** Для малых значений глубины модуляции $m \ll 1$ рассчитайте теоретически пороговое значение добротности Q_{\min} . (Для этого придется при расчете удерживать члены второго порядка малости по параметру m). Как пороговое значение добротности Q_{\min} зависит от m ? Сравните полученное теоретическое значение с порогом для основного резонанса и для резонанса третьего порядка. Объясните качественно эти различия, привлекая соображения физического характера. Сравните также теоретическое значение пороговой добротности с найденным экспериментально в пункте (б).

2.6 Второй интервал параметрического резонанса.**

(а) Для малых значений глубины модуляции $m \ll 1$ рассчитайте теоретически ширину интервала параметрической неустойчивости, окружающего резонанс второго порядка. (В этом расчете необходимо учитывать члены второго порядка малости по параметру m .) Как ширина второго интервала зависит от m ? Сравните полученный результат для $n = 2$ с соответствующими величинами для основного интервала и для интервала порядка $n = 3$. Почему второй интервал при малых m значительно уже, чем интервал более высокого третьего порядка?

(б) Почему каждой из границ интервала неустойчивости с $n = 2$ соответствуют две различные фазовые траектории? Чем различаются стационарные колебания, соответствующие различным фазовым траекториям для одной и той же границы? Как возбудить каждое из этих колебаний? Какие начальные условия приводят к стационарным колебаниям, если задан период модуляции, соответствующий одной из границ второго интервала параметрического резонанса?

2.7* Второй интервал параметрического резонанса при наличии трения.** Как влияет трение на ширину второго интервала параметрического возбуждения? Рассчитайте теоретически приближенные значения (для $m \ll 1$) периода модуляции T_{\pm} , соответствующие границам этого интервала при заданном значении добротности Q , превосходящем пороговое значение Q_{\min} , отвечающее точной настройке периода модуляции на резонанс второго порядка (см. задачу 2.5). Выразите результат расчета границ интервала для заданного Q через m и Q_{\min} .