

# Комментарии к лекциям по физике

## Тема: Собственные колебания осциллятора. Затухание колебаний при вязком и сухом трении

### Содержание лекции

Свободные колебания гармонического осциллятора. Изохронность линейного осциллятора. Затухание колебаний при вязком трении. Декремент затухания. Добротность. Фазовый портрет линейного осциллятора. Превращения энергии при колебаниях. Критическое затухание. Аперiodический режим. Затухание колебаний при сухом трении. Зона застоя. Причины случайных погрешностей стрелочных измерительных приборов.

### Модель линейного осциллятора

Состояние равновесия физической системы называется *устойчивым*, если при любом отклонении из равновесия возникает *возвращающая*, или *восстанавливающая* сила, которая стремится вернуть систему в равновесие. Если систему вывести из устойчивого равновесия каким-либо внешним воздействием и затем предоставить самой себе, в системе будут происходить колебания около устойчивого положения равновесия. Такие колебания, происходящие в отсутствие периодического внешнего воздействия на систему, в соответствии с общепринятой классификацией колебаний по способу возбуждения называют *собственными* или *свободными*. Любая система, способная совершать собственные колебания, называется *осциллятором*.

В отсутствие трения энергия, сообщенная системе при начальном возбуждении, остается неизменной в процессе последующих собственных колебаний. Поэтому в идеализированных консервативных системах собственные колебания продолжаются неограниченно долго. В консервативных системах с одной степенью свободы собственные колебания будут строго периодическими, так как начальное состояние системы воспроизводится через равные промежутки времени. При наличии трения, неизбежного в любой реальной системе, собственные колебания постепенно затухают из-за диссипации (рассеяния) механической энергии, и в конце концов система приходит в состояние покоя в положении равновесия.

Если восстанавливающая сила пропорциональна величине отклонения из положения равновесия, то такая система в отсутствие трения, а также при наличии вязкого трения (сила трения пропорциональна скорости) описывается *линейным дифференциальным уравнением*. В отсутствие трения собственные колебания в линейной системе будут гармоническими (синусоидальными), а при слабом вязком трении — почти гармоническими (с экспоненциально убывающей амплитудой). Модель линейного осциллятора пригодна также для описания малых колебаний вблизи устойчивого положения равновесия и в нелинейных системах при условии, что зависимость возвращающей силы от смещения из положения равновесия может быть аппроксимирована линейной функцией вплоть до отклонений, соответствующих амплитуде рассматриваемых колебаний.

Хорошо известный пример линейной механической системы — груз, подвешенный на упругой пружине, подчиняющейся закону Гука. Другой пример — торсионный пружинный осциллятор, представляющий собой уравновешенный ротор (маховик) со спиральной пружиной, закручивающейся при повороте маховика (рис. 1).

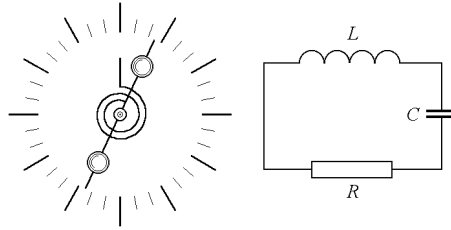


Рис. 1: Торсионный пружинный осциллятор и его электромагнитный аналог — последовательный  $RLC$ -контур.

Подобное устройство используется в механических карманных или наручных часах (балансовый механизм). Электромагнитный аналог механического пружинного линейного осциллятора — последовательный  $LCR$ -контур — показан в правой части рис. 1.

При повороте маховика из положения равновесия на угол  $\varphi$  прикрепленная к нему спиральная пружина (другой конец которой закреплен неподвижно) создает возвращающий момент  $N$ , пропорциональный углу отклонения:

$$N = -D\varphi. \quad (1)$$

Коэффициент пропорциональности  $D$  называется жесткостью пружины. Применяя к движению маховика с моментом инерции  $J$  основное уравнение динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, получаем следующее дифференциальное уравнение собственных колебаний торсионного пружинного осциллятора:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (2)$$

где введено обозначение  $\omega_0^2 = D/J$ . Общее решение уравнения (2) представляет собой простое *гармоническое колебание*:

$$\varphi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \delta_0). \quad (3)$$

Амплитуда  $A_0$  и начальная фаза  $\delta_0$  в выражении (3) зависят от *начальных условий*, т. е. от угла отклонения  $\varphi(0)$  и угловой скорости  $\dot{\varphi}(0)$  при  $t = 0$ . Другими словами, эти характеристики колебательного движения зависят от способа возбуждения колебаний. Колебания происходят с угловой частотой  $\omega_0$ , квадрат которой пропорционален жесткости пружины  $D$  и обратно пропорционален моменту инерции  $J$  маховика. Частота  $\omega_0$  и соответствующий ей период  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , в отличие от амплитуды и начальной фазы, не зависят от начальных условий — они целиком определяются свойствами самого осциллятора, т. е. значениями параметров осциллятора  $D$  и  $J$ . Собственные колебания линейного осциллятора всегда

происходят с одной и той же собственной частотой  $\omega_0$  независимо от способа возбуждения. Независимость частоты собственных колебаний от начальных условий, а следовательно от амплитуды (и энергии) колебаний называют *изохронностью* линейного осциллятора.

При наличии силы вязкого трения в дифференциальном уравнении будет присутствовать тормозящий момент этой силы, пропорциональный угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ :

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (4)$$

где *постоянная затухания*  $\gamma$  характеризует интенсивность вязкого трения в системе. Постоянная затухания  $\gamma$ , как и  $\omega_0$ , имеет размерность частоты.

Уравнения (2) и (4) — это *линейные* дифференциальные уравнения, потому что искомая функция  $\varphi(t)$ , как и ее производные по времени, входят в эти уравнения в первой степени. Эти уравнения *однородны*, так как искомая функция или ее производные присутствуют в одинаковой степени во всех членах уравнения. Однородность уравнений отражает отсутствие возбуждающей внешней силы. Таким образом, собственные колебания моделируемой системы описываются однородным линейным уравнением.

Как и любое однородное уравнение, уравнения (2) и (4) имеют тривиальное нулевое решение  $\varphi(t) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(t) = 0$ . Такое решение соответствует отсутствию начального возбуждения (нулевым начальным условиям) и описывает осциллятор, который постоянно находится в покое в положении равновесия. Собственные колебания осциллятора могут возникнуть только в результате некоторого начального возбуждения.

Если трение настолько слабо, что  $\gamma < \omega_0$ , общее решение уравнения (4) имеет колебательный характер и может быть представлено в следующем виде:

$$\varphi(t) = A_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \delta_0). \quad (5)$$

Это решение описывает *затухающие колебания*, медленно меняющаяся амплитуда которых  $A_0 \exp(-\gamma t)$  экспоненциально убывает со временем. Начальное значение амплитуды  $A_0$  и начальная фаза  $\delta_0$  определяются из начальных условий. Частота  $\omega_1$  периодического (косинусоидального) сомножителя в (5) дается следующим выражением:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}. \quad (6)$$

В случае слабого трения, когда постоянная затухания  $\gamma$  мала по сравнению с величиной  $\omega_0$ , характеризующей собственную частоту в отсутствие трения, частота  $\omega_1$  косинусоидального сомножителя в (5) очень близка к  $\omega_0$ :

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \gamma^2/(2\omega_0). \quad (7)$$

Относительное отклонение частоты затухающих колебаний  $\omega_1$  от собственной частоты осциллятора  $(\omega_0 - \omega_1)/\omega_0$  пропорционально квадрату малого параметра  $\gamma/\omega_0$ .

Графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости для затухающих колебаний показаны на рис. 2 для случая возбуждения собственных колебаний начальным отклонением ротора из положения равновесия (в положительном направлении) при нулевой начальной скорости.



Рис. 2: Графики затухающих колебаний при  $Q = 18.1$ .

В условиях слабого и умеренного вязкого трения зависящий от времени множитель  $A_0 \exp(-\gamma t)$  в выражении (5) можно рассматривать как постепенно уменьшающуюся амплитуду затухающих колебаний. Спустя промежуток времени  $\tau = 1/\gamma$ , эта амплитуда приблизительно в  $e \approx 2.72$  раз меньше своего начального значения. Это время  $\tau$  называется *временем затухания* или *временем жизни* колебаний. Хотя формально колебания продолжаются бесконечно долго, характерное время  $\tau$  условно можно рассматривать как длительность процесса затухания колебаний: за конечное число таких интервалов амплитуда становится меньше любого сколь угодно малого значения.

При малом трении, когда  $\gamma \ll \omega_0$ , или  $\tau \gg T_0 = 2\pi/\omega_0$  (условие слабого затухания), осциллятор совершает большое число  $N$  циклов собственных колебаний в течение времени жизни  $\tau$ :  $N = \tau/T_0 \gg 1$ . Последовательные максимальные отклонения из положения равновесия убывают в геометрической прогрессии. В самом деле, пусть  $\varphi_n$  есть максимальное отклонение ротора при  $n$ -м колебании. Тогда

$$\varphi_{n+1}/\varphi_n \approx \exp(-\gamma T_0) \approx 1 - \gamma T_0. \quad (8)$$

Таким образом, отношение последовательных членов (знаменатель) этой бесконечно убывающей геометрической прогрессии меньше единицы на величину  $\gamma T_0 = T_0/\tau \ll 1$ .

Для характеристики быстроты затухания колебаний используют, наряду с размерной постоянной затухания  $\gamma$ , также безразмерный *логарифмический декремент затухания*, определяемый как натуральный логарифм отношения последовательных максимальных отклонений в одну сторону:

$$d = \ln(\varphi_n/\varphi_{n+1}) = \gamma T = T/\tau. \quad (9)$$

Обратная логарифмическому декременту величина  $1/d = \tau/T$  — это число циклов колебаний, совершаемых осциллятором за время затухания  $\tau$ .

Другая эквивалентная логарифмическому декременту безразмерная величина, используемая для характеристики быстроты затухания колебаний, это *добротность*  $Q$ , определяемая соотношением:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \pi \frac{\tau}{T_0}. \quad (10)$$

Число циклов, на протяжении которых размах колебаний осциллятора уменьшается в  $e \approx 2.72$  раза, равно деленному на  $\pi \approx 3.14$  значению его добротности. Число колебаний  $N_{1/2}$ , на протяжении которых амплитуда уменьшается вдвое, выражается через добротность следующим соотношением:

$$N_{1/2} = (\ln 2/\pi)Q = 0.22 Q = Q/4.53. \quad (11)$$

## Неколебательное движение системы

Когда параметры системы удовлетворяют условию  $\gamma \geq \omega_0$  (условие сильного затухания), осциллятор после начального возбуждения возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. В этом движении ротор либо асимптотически приближается к положению равновесия с одной стороны, либо только один раз пересекает среднее положение и затем приближается к нему с другой стороны. Последний случай возможен, если при возбуждении ротор получает достаточно большую начальную скорость в направлении положения равновесия.

Если  $\gamma = \omega_0$ , затухание осциллятора называют *критическим*. В этом случае общее решение дифференциального уравнения (4) принимает следующий вид:

$$\varphi(t) = (C_1 t + C_2) \exp(-\gamma t), \quad (12)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – константы, значения которых определяются из начальных условий. Например, если ротор, первоначально находившийся в положении равновесия ( $\varphi(0) = 0$ ), в результате толчка получает начальную скорость  $\dot{\varphi}(0) = \Omega_0$ , то  $C_1 = \Omega_0$ ,  $C_2 = 0$ , и дальнейшее движение ротора описывается функцией

$$\varphi(t) = \Omega_0 t \exp(-\gamma t). \quad (13)$$

Графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости для осциллятора с критическим затуханием, движение которого возбуждается начальным толчком из положения равновесия, показаны на рис. 3.

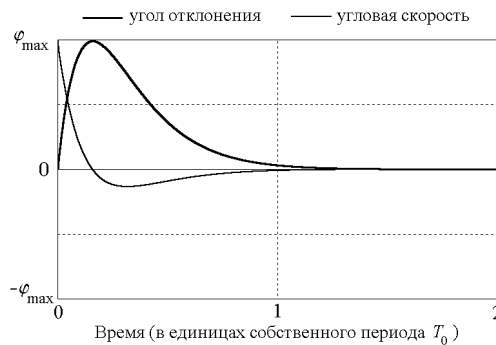


Рис. 3: Графики угла отклонения и угловой скорости при критическом затухании.

Замечательная особенность системы с критическим затуханием заключается в том, что после начального возбуждения она возвращается в состояние покоя в положении равновесия быстрее, чем при любом другом значении постоянной затухания  $\gamma$  (при данном значении  $\omega_0$ ). Как видно из уравнения (10), критическому затуханию, т. е. случаю ( $\gamma = \omega_0$ ), соответствует добротность  $Q = 0.5$ .

Неколебательное движение при очень сильном трении (при сверхкритическом затухании), когда  $\gamma > \omega_0$ , можно представить в виде суперпозиции двух убывающих экспоненциальных функций, характеризуемых различными постоянными времени  $\tau_1 = -1/\alpha_1$  и  $\tau_2 = -1/\alpha_2$  в показателях экспонент:

$$\varphi(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \quad \text{где } \alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (14)$$

Значения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  из находятся из начальных условий, т. е. определяются способом возбуждения системы. В измерительных приборах таких как гальванометры затухание вводится преднамеренно для того чтобы преодолеть трудности считывания показаний при осциллирующей стрелке. Демпфирование называют *критическим*, если подвижная система прибора приходит в равновесие и успокаивается за кратчайшее время, не совершая колебаний. При недостаточном демпфировании прибора ( $Q > 0.5$ ) перед остановкой стрелка совершает колебания. В случае передемпфированного прибора ( $Q < 0.5$  — сверхкритическое затухание) стрелка не совершает колебаний, но тем не менее для ее прихода в положение равновесия требуется большее время по сравнению со случаем критического демпфирования.

Другой пример преднамеренного введения затухания, близкого к критическому — применение гидравлических амортизаторов в упругой подвеске кузова автомобиля. При неисправных амортизаторах после каждого бугорка или ямки на дороге кузов автомобиля совершает колебания, неприятные для пассажиров и опасные с точки зрения надежности сцепления колес с дорогой.

## Фазовая диаграмма линейного осциллятора

Механическое состояние торсионного осциллятора определяется двумя динамическими переменными: *обобщенной координатой* (в данном случае углом отклонения)  $\varphi$  и *обобщенной скоростью* (угловой скоростью)  $\dot{\varphi}$ , или, что эквивалентно, углом отклонения  $\varphi$  и угловым моментом (моментом импульса)  $J\dot{\varphi}$ .

Механическое состояние динамической системы в любой момент времени можно наглядно изобразить с помощью точки (*изображающей точки*) в фазовом пространстве. Для системы с одной степенью свободы, положение которой определяется единственной координатой (в случае торсионного осциллятора это угол отклонения), фазовое пространство динамических переменных двумерно, т. е. представляет собой плоскость. На такой *фазовой плоскости* по оси абсцисс отложена обобщенная координата (угол отклонения)  $\varphi$ , а по оси ординат — угловая скорость  $\dot{\varphi}$ . Очень наглядное графическое представление всему процессу эволюции механического состояния системы дает *фазовая диаграмма*, т. е. линия, которую изображающая точка вычерчивает на фазовой плоскости. Фазовая диаграмма для торсионного осциллятора — это график зависимости угловой скорости  $\dot{\varphi}$  (или момента импульса  $J\dot{\varphi}$ ) от угла отклонения  $\varphi$ .

Если система совершает *периодическое движение*, изображающая точка на фазовой плоскости описывает *замкнутую кривую*, двигаясь по ней в направлении по часовой стрелке. Фазовая траектория периодического движения замкнута, потому что система возвращается в исходное механическое состояние после каждого цикла колебаний.

Совокупность фазовых траекторий, соответствующих разным способам возбуждения (разным начальным условиям) при неизменных параметрах системы образует ее *фазовый портрет*. Через каждую точку фазовой плоскости проходит, вообще говоря, только одна фазовая траектория: если эту точку выбрать в качестве начального состояния системы, дальнейшее движение системы будет определено однозначно в соответствии с единственностью решения задачи Коши для дифференциального уравнения системы. Это движение и будет происходить вдоль фазовой траектории, проходящей через данную точку фазовой плоскости. Другими словами, фазовые траектории системы не пересекаются. Исключение составляют лишь отдельные, изолированные точки фазовой плоскости. Такие точки, через которые проходит более одной фазовой траектории или не проходит ни одной траектории, называются *особыми*. Примеры особых точек будут рассмотрены ниже. Фазовый портрет (вместе с совокупностью особых точек) дает очень наглядное графическое представление о возможных движениях изучаемой динамической системы.

Фазовая траектория гармонических колебаний (например, собственных колебаний линейного осциллятора в отсутствие трения) представляет собой эллипс (или окружность при соответствующем выборе масштаба). Точки, где фазовая траектория пересекает ось абсцисс (в этих точках поворота скорость изменяет знак), соответствуют максимальным отклонениям ротора из положения равновесия.

Фазовый портрет консервативного линейного осциллятора образован набором геометрически подобных эллипсов с общим центром в начале координат фазовой плоскости. Этот центр изображает состояние покоя осциллятора в положении равновесия. Так как через начало координат не проходит ни одна из фазовых траекторий (все траектории окружают эту точку), такая точка фазовой плоскости называется особой точкой типа *центр*.

Как уже отмечалось, период гармонических колебаний целиком определяется параметрами физической системы, а именно значениями жесткости пружины  $D$  и моментом инерции ротора  $J$ . В отличие от амплитуды и начальной фазы, период не зависит от начальных условий, т. е. от способа возбуждения колебаний. Это свойство линейного осциллятора называется *изохронностью*. Благодаря свойству изохронности изображающие точки обходят эллипсы разных размеров на фазовом портрете осциллятора (соответствующие разным амплитудам колебаний осциллятора с данными параметрами) в течение одного и того же времени  $T_0$ .

В присутствии сравнительно слабого вязкого трения ( $\gamma < \omega_0$ ) максимальные отклонения, как и максимальные значения угловой скорости, постепенно уменьшаются с каждым последующим циклом колебаний. Поэтому фазовая траектория собственных колебаний благодаря трению трансформируется из замкнутой кривой (эллипса или окружности) для консервативного осциллятора в постепенно скручивающуюся спираль, сжимающиеся витки которой наматываются вокруг фокальной точки, расположенной в начале координат фазовой плоскости. В этом случае начало координат из особой точки типа центр превращается в особую точку типа

*фокус*. Для семейства фазовых траекторий фокус представляет собой *аттрактор* (от англ. *attract* — притягивать): все фазовые траектории, независимо от того, где они начинаются, асимптотически приближаются к фокусу, совершая вокруг него бесконечное число оборотов по все более сжимающимся виткам (левая часть рис. 4).

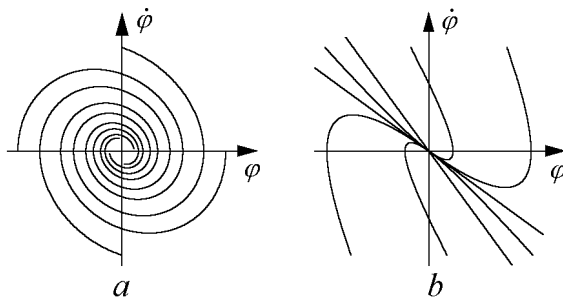


Рис. 4: Фазовый портрет затухающего линейного осциллятора (a) и системы со сверхкритическим затуханием  $\gamma > \omega_0$  (b).

В случае сравнительно сильного вязкого трения ( $\gamma > \omega_0$ ) аттрактор фазовых траекторий из фокуса превращается в особую точку типа *узел*: все фазовые траектории неколебательных движений приближаются к этому узлу напрямую без наматывания, не совершив и одного оборота. Фазовый портрет передемпфированной системы показан в правой части рис. 4. Все фазовые траектории асимптотически приближаются к началу координат, где у них общая касательная  $\dot{\varphi} = \alpha_1 \varphi$  с наклоном  $\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  (за исключением одной прямолинейной фазовой траектории  $\dot{\varphi} = \alpha_2 \varphi$ ). При специфических начальных условиях вида  $\dot{\varphi}(0) = \alpha_1 \varphi(0)$  изображающая точка движется к узлу непосредственно вдоль этой прямолинейной фазовой траектории (общей касательной всех траекторий). Другая прямолинейная фазовая траектория  $\dot{\varphi} = \alpha_2 \varphi$  соответствует движению при начальных условиях типа  $\dot{\varphi}(0) = \alpha_2 \varphi(0)$ .

Таким образом, на фазовом портрете линейного осциллятора имеется только одна особая точка: начало координат фазовой плоскости, где обе динамические переменные  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  равны нулю. Как уже отмечалось, этой точке соответствует состояние покоя в положении равновесия. При  $\gamma = 0$  это точка типа центр, через которую не проходит ни одна траектория. При  $\gamma < \omega_0$  это фокус, а при  $\gamma > \omega_0$  это узел фазовых траекторий.

Особые точки типа фокус и узел дают примеры аттракторов, к которым притягиваются все фазовые траектории. В дальнейшем, при изучении движения жесткого маятника в поле тяжести, мы встретимся с еще одним типом особых точек, возможных в нелинейных консервативных системах, а именно, с особой точкой типа *седло*, через которую проходят две фазовые траектории.

## Превращения энергии

Полная энергия  $E$  торсионного пружинного маятника представляет собой сумму потенциальной энергии  $E_{\text{пот}}$  упруго деформированной пружины и кинетической энергии  $E_{\text{кин}}$  вращающегося маховика:



$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}D\varphi^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2. \quad (15)$$

Собственные колебания в отсутствие трения характеризуются обратимыми полными превращениями энергии одного из этих видов в другой и обратно. В точках максимального отклонения от положения равновесия кинетическая энергия равна нулю, и полная энергия осциллятора представляет собой потенциальную энергию деформированной пружины. Спустя четверть периода колебаний ротор проходит через положение равновесия, где потенциальная энергия пружины равна нулю, и полная энергия осциллятора представляет собой кинетическую энергию вращающегося маховика. В течение следующей четверти периода происходит обратное превращение энергии: кинетическая энергия превращается в потенциальную энергию упругой деформации. Таким образом, два вида энергии совершают колебания в противофазе друг с другом на частоте  $2\omega_0$ , т. е. на удвоенной собственной частоте  $\omega_0$  колебаний самого осциллятора.

Описанный выше полный обмен между двумя видами энергии характерен для консервативной системы, в которой энергетические превращения обратимы. Сумма кинетической и потенциальной энергий, т. е. полная энергия  $E$  осциллятора, имеет одно и то же значение в любой момент времени, совпадающее с максимальными значениями каждого из этих видов энергии:

$$E = \frac{1}{2}DA_0^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2A_0^2. \quad (16)$$

Полная энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды его колебаний. Средние за период колебаний значения кинетической и потенциальной энергии осциллятора, совершающего собственные колебания, равны друг другу и составляют половину неизменного значения полной энергии:

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = \langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2}E = \frac{1}{4}DA_0^2 = \frac{1}{4}J\omega_0^2A_0^2. \quad (17)$$

При наличии трения в системе взаимные превращения потенциальной и кинетической энергий становятся частично необратимыми из-за рассеяния (диссипации) механической энергии. Графики энергетических превращений при затухающих колебаниях показаны на рис. 5. Здесь верхний график — зависимость угла отклонения  $\varphi(t)$  и угловой скорости  $\dot{\varphi}(t)$  от времени, на нижнем графике кривая 1 — потенциальная энергия  $E_{\text{pot}}$ , кривая 2 — кинетическая энергия  $E_{\text{kin}}$ , кривая 3 — полная энергия  $E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$ . Отметим, что диссипация энергии происходит неравномерно на протяжении цикла колебаний. Скорость диссипации  $-dE/dt$  максимальна при движении ротора в окрестности положения равновесия, а именно в те моменты времени, когда максимальна величина угловой скорости маховика. В самом деле, скорость рассеяния энергии из-за вязкого трения  $-dE/dt = -N_{\text{fr}}\dot{\varphi}$ , где  $N_{\text{fr}} \sim \dot{\varphi}$ , пропорциональна квадрату угловой скорости и тем самым мгновенному значению кинетической энергии  $J\dot{\varphi}^2/2$  маховика. Вблизи точек поворота, когда маховик изменяет направление вращения и его угловая скорость обращается в нуль, диссипации энергии не происходит. Утверждение об экспоненциальном характере убывания энергии затухающего осциллятора, которое часто встречается в учебниках, на самом деле справедливо не для мгновенного, а только для усредненного по периоду колебаний значения полной энергии осциллятора:

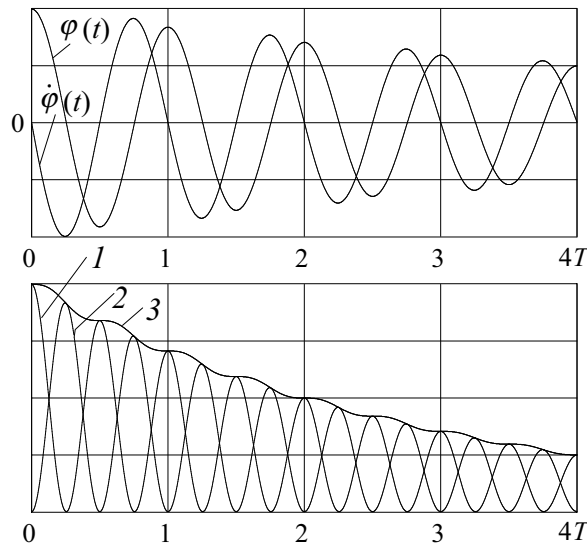


Рис. 5: Превращения энергии при затухающих колебаниях (добротность  $Q = 18.1$ ).

$$\langle E(t) \rangle = E_0 \exp(-2\gamma t) = E_0 \exp(-2t/\tau). \quad (18)$$

Из (18) видно, что время затухания средней энергии осциллятора (время, в течение которого среднее за период значение полной энергии убывает в  $e \approx 2.72$  раза) равно  $\tau/2$ , т. е. вдвое меньше времени затухания амплитуды колебаний.

## Осциллятор с сухим трением

Экспоненциальный характер затухания колебаний под действием вязкого трения обусловлен тем, что сила трения пропорциональна скорости. Любая другая зависимость силы трения от скорости порождает затухание колебаний с иной зависимостью амплитуды от времени.

Случай сухого (или кулоновского) трения интересен с точки зрения практических приложений. При сухом трении, пока система находится в движении, величина силы трения почти постоянна, а ее направление противоположно скорости. В соответствии с упрощенной идеализированной характеристикой сухого трения (так называемой  $z$ -характеристикой) сила трения постоянна по модулю, но ее направление изменяется всякий раз при изменении направления скорости. Когда система покоится, момент силы статического трения может принимать любое значение от  $-N_{\max}$  до  $N_{\max}$ . Действительная величина момента силы трения покоя зависит от других приложенных сил, которые должны быть уравновешены трением для того, чтобы сохранялось состояние покоя. Величина момента силы трения скольжения принимается в этой модели равной максимально возможной величине момента силы трения покоя  $N_{\max}$ .

В реальных системах сухое трение характеризуется более сложной зависимостью силы трения от скорости. Предельная величина силы трения покоя обычно несколько больше силы трения скольжения. Когда скорость движения начинает возрастать от нулевого значения, сила трения скольжения сначала несколько

ко уменьшается, достигает минимума при некоторой скорости, а затем постепенно увеличивается по мере дальнейшего роста скорости. В идеализированной характеристике сухого трения эти особенности игнорируются. Тем не менее, принятая идеализация позволяет объяснить многие существенные особенности вызванного сухим трением процесса затухания колебаний в реальных физических системах.

Из-за того, что момент силы трения покоя может принимать любые значения вплоть до  $N_{\max}$ , по обе стороны от положения равновесия (в котором спиральная пружина не деформирована) имеется интервал углов отклонения, в пределах которого трение покоя в состоянии уравновесит силу натяжения деформированной пружины. Этот интервал называют *зоной застоя* или *мертвой зоной*. В любой точке мертвой зоны ротор осциллятора может находиться в покое в состоянии безразличного равновесия, в противоположность случаю вязкого трения, когда имеется только одно положение равновесия, в котором пружина не деформирована. Если угловая скорость ротора обращается в нуль где-либо в пределах зоны застоя, ротор останавливается и в дальнейшем покоится в этой точке.

Зона застоя простирается на одинаковые расстояния в обе стороны от точки, в которой пружина не деформирована. Чем сильнее трение покоя в рассматриваемой системе, тем шире мертвая зона. Ее границы определяются максимальным значением момента силы трения покоя  $N_{\max}$ .

Важная отличительная черта затухания колебаний под действием силы сухого трения заключается в том, что движение полностью прекращается после *конечного числа циклов*. Пока осциллятор совершает колебания, знак скорости периодически изменяется, и каждое очередное изменение направления скорости происходит при все меньшем отклонении от средней точки зоны застоя. В конце концов точка поворота оказывается внутри зоны застоя, где трение покоя в состоянии уравновесит возвращающую силу пружины. В этот момент движение полностью прекращается. В какой именно точке произойдет остановка, зависит от начальных условий, которые могут меняться от случая к случаю.

Эти особенности присущи различным механическим системам с сухим трением. В частности, сухое трение может присутствовать в стрелочных измерительных приборах, таких как гальванометры с подвижной катушкой. В типичном гальванометре легкая проволочная катушка помещена в магнитное поле между полюсами постоянного магнита и может поворачиваться вокруг оси, закрепленной в подшипниках. При прохождении измеряемого тока катушка поворачивается и закручивает спиральную пружину. Если со стороны подшипников на катушку действует момент сил сухого трения, стрелка прибора может остановиться в любой точке зоны застоя, окружающей с двух сторон деление шкалы, соответствующее измеряемой величине. Этим объясняется возникновение случайных ошибок, неизбежно сопутствующих измерениям, выполняемым при помощи стрелочных приборов. Чем сильнее сухое трение, тем больше погрешности измерений.

На вращающийся ротор торсионного пружинного осциллятора действуют одновременно возвращающий момент  $-D\varphi$  упругой силы закрученной пружины и момент  $N_{\text{fr}}$  силы трения скольжения. Дифференциальное уравнение вращения ротора с моментом инерции  $J$  имеет следующий вид:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi + N_{\text{fr}}. \quad (19)$$

В соответствии с принятой идеализированной  $z$ -характеристикой сухого трения, момент силы трения скольжения  $N_{\text{fr}}$  направлен противоположно угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ , и остается постоянным до тех пор пока продолжается вращение ротора в одном направлении. Однако момент сил трения может принимать любое значение из интервала от  $-N_{\text{max}}$  до  $N_{\text{max}}$ , если скорость ротора равна нулю:

$$N_{\text{fr}}(\dot{\varphi}) = \begin{cases} -N_{\text{max}} & \text{для } \dot{\varphi} > 0, \\ N_{\text{max}} & \text{для } \dot{\varphi} < 0, \end{cases} \quad (20)$$

или  $N_{\text{fr}} = -N_{\text{max}} \text{sign}(\dot{\varphi})$ . Здесь  $N_{\text{max}}$  – предельное (максимальное) значение момента сил сухого трения. Удобно выразить  $N_{\text{max}}$  через максимальный угол отклонения маховика  $\varphi_m$ , при котором он еще может находиться в состоянии покоя:

$$N_{\text{max}} = D\varphi_m. \quad (21)$$

Очевидно, что угол  $\varphi_m$  соответствует границе зоны застоя.

Дифференциальное уравнение (19), описывающее осциллятор с сухим трением, вообще говоря *нелинейно*, потому что момент силы сухого трения  $N_{\text{fr}}(\dot{\varphi})$  изменяется (скачкообразно) в те моменты, когда изменяется знак угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ , т. е. когда изменяется направление его вращения. Поэтому мы должны рассматривать по сути дела два линейных уравнения вместо одного:

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi + \varphi_m) \quad \text{при } \dot{\varphi} > 0, \quad (22)$$

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi - \varphi_m) \quad \text{при } \dot{\varphi} < 0. \quad (23)$$

Нелинейный характер задачи проявляется здесь в том, что мы должны переходить от одного из линейных уравнений (22)–(23) к другому всякий раз, когда изменяется направление вращения ротора.

Решение уравнений (22)–(23), соответствующее данным начальным условиям, можно найти методом поэтапного интегрирования каждого из линейных уравнений на интервале времени, соответствующем полуциклу колебаний, пока направление вращения ротора остается неизменным. Затем эти решения соединяются вместе («сшиваются») в моменты перехода от одного уравнения к другому таким образом, что угол отклонения и угловая скорость в конце очередного полуцикла выполняют роль начальных условий для следующего полуцикла колебаний ротора. Такая последовательность решений продолжается до тех пор, пока угол отклонения в конце очередного полуцикла не оказывается в пределах мертвой зоны.

Чтобы выявить основные особенности затухания колебаний, вызванного сухим трением, будем предполагать, что вязкое трение полностью отсутствует ( $\gamma = 0$ ).

Пусть в начальный момент  $t = 0$  ротор повернут вправо (по часовой стрелке) от положения равновесия, так что  $\varphi(0) > 0$ . Если это начальное отклонение выходит за границу зоны застоя, т. е.  $\varphi(0) > \varphi_m$ , ротор, будучи освобожденным без толчка, т. е. с нулевой начальной скоростью, начнет двигаться влево ( $\dot{\varphi} < 0$ ), и его движение будет описываться уравнением (23). Решение уравнения (23) представляет собой простое гармоническое колебание с частотой  $\omega_0$ . Среднее положение, около которого происходят эти колебания, совпадает с правой границей зоны застоя  $\varphi_m$ . Это смещение среднего положения колебаний ротора вызвано постоянным моментом силы сухого трения, который действует на ротор вправо (по часовой стрелке),

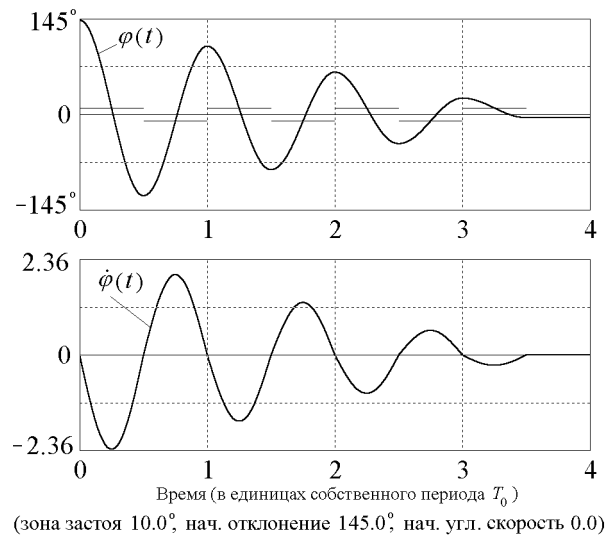


Рис. 6: Графики колебаний, затухающих под действием сухого трения.

пока он движется влево. При данных начальных условиях ( $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ) амплитуда колебания около средней точки  $\varphi_m$  равна  $\varphi_0 - \varphi_m$ . Первый отрезок графика таких колебаний на рис. 6 представляет собой часть синусоиды со средней точкой, смещенной вверх от оси абсцисс на расстояние  $\varphi_m$ . Крайнее отклонение ротора влево в конце первого полупериода колебаний равно  $\varphi(0) - 2\varphi_m$ .

Когда ротор достигает этого положения, его угловая скорость обращается в нуль. Затем он начинает двигаться вправо. Поскольку при этом его угловая скорость  $\dot{\varphi}$  положительна, мы должны перейти к уравнению (22). Значения  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  в конце предыдущего полупериода служат начальными условиями для дальнейшего движения. Это движение опять представляет собой половину цикла гармонического колебания той же самой частоты  $\omega_0$ , но средняя точка колебаний теперь смещена к левой границе зоны застоя  $-\varphi_m$ . Амплитуда соответствующего сегмента синусоиды равна  $\varphi_0 - 3\varphi_m$ .

Продолжая дальше такой анализ движения, мы заключаем, что в последующие полупериоды ротор совершает гармонические колебания около средних точек, поочередно смещенных к границам мертвой зоны  $\varphi_m$  и  $-\varphi_m$ . Каждому полупериоду соответствует одна и та же частота  $\omega_0$  (частота собственных колебаний в отсутствие трения). Поэтому длительность каждого цикла затухающих колебаний равна периоду  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  собственных колебаний осциллятора в отсутствие трения.

Сшивание синусоидальных сегментов, средние точки которых поочередно смещены к правой и левой границам мертвой зоны, дает всю кривую процесса затухания колебаний под действием сухого трения, показанную на рис. 6. После каждого полного цикла таких колебаний максимальное отклонение ротора уменьшается на одну и ту же величину, равную удвоенной ширине зон застоя (т. е. на величину  $4\varphi_m$ ). Колебания продолжаются до тех пор, пока конечная точка очередного сегмента синусоиды не окажется внутри зоны застоя ( $-\varphi_m, \varphi_m$ ).

Таким образом, в случае затухания под действием сухого трения максимальные отклонения ротора убывают по линейному закону. Последовательность макси-

мальных отклонений образует убывающую арифметическую прогрессию и колебания полностью прекращаются через конечное число циклов, в противоположность случаю вязкого трения, когда максимальные отклонения убывают в геометрической прогрессии (экспоненциально) и формально движение продолжается бесконечно долго.

Общие закономерности затухания колебаний под действием сухого трения отчетливо отражает фазовая траектория. При вязком трении фазовая траектория асимптотически приближается к фокусу, расположенному в начале координат, и состоит из бесконечного числа постепенно сближающихся, все более тесных витков уменьшающегося размера. В случае сухого трения фазовая кривая образована конечным числом эквидистантных витков: она заканчивается (обрывается), как только достигает оси абсцисс в пределах отрезка  $(-\varphi_m, \varphi_m)$ , соответствующего мертвой зоне.

Если наряду с сухим трением осциллятор подвержен действию сравнительно небольшого вязкого трения ( $\gamma < \omega_0$ ), полуэллипсы фазовой траектории превращаются в отрезки слабо скручивающихся спиралей, соответствующих собственным затухающим колебаниям осциллятора с положением равновесия, поочередно смещенным к правой и левой границам зоны застоя. Витки фазовой траектории перестают быть эквидистантными. Но тем не менее скручивание фазовой траектории не продолжается до бесконечности: в этом случае она также обрывается после конечного числа оборотов вокруг начала координат, как только встречается с отрезком  $(-\varphi_m, \varphi_m)$  оси абсцисс, соответствующим мертвой зоне.

В противоположность случаю вязкого трения, после полного прекращения колебаний при сухом трении некоторая (небольшая) часть первоначальной энергии осциллятора может остаться в виде механической энергии. Так будет если окончательная остановка ротора произойдет не в средней точке зоны застоя. В таком случае пружина останется слегка деформированной, и потенциальная энергия упругой деформации не обратится в нуль. Остаточная механическая энергия осциллятора не может превышать значения  $D\varphi_m^2/2 = N_{\max}\varphi_m/2$ .

*Рекомендуемая литература:*

[1], стр. 219–238.

[2], стр. 432–437.

[3], стр. 204–209.

[4], стр. 97–105.

[5], стр. 9–20.

## Список литературы

- [1] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971.
- [2] Стрелков С.П. Механика. М., «Наука», 1975.
- [3] Сивухин Д.В. Общий курс физики, т. 1 Механика. М., «Наука», 1974.
- [4] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 2 (Пространство. Время. Движение). М., «Мир», 1966.

- [5] Бутиков Е. И. Физика колебаний. Лаборатория компьютерного моделирования. Спб, 2005.