

Комментарии к лекциям по физике

Тема: Вынужденные колебания осциллятора при синусоидальном внешнем воздействии

Содержание лекции

Вынужденные колебания осциллятора при синусоидальном воздействии. Силовое и кинематическое возбуждение колебаний. Резонанс смещения и скорости. Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики. Средние значения кинетической и потенциальной энергии. Поглощаемая и рассеиваемая мощность. Лоренцевский контур. Устойчивость режима установившихся вынужденных колебаний. Переходные процессы. Установление вынужденных колебаний.

Введение

В соответствии с принятой классификацией колебаний по способу их возбуждения, колебания называют *вынужденными*, когда осциллятор подвергается внешнему периодическому воздействию, которое приводит к появлению в дифференциальном уравнении системы дополнительного члена в виде заданной периодической функции времени. Поведение колебательной системы под действием периодических внешних сил представляет собой один из наиболее важных вопросов в теории колебаний. Самая замечательная особенность вынужденных колебаний заключается в явлении *резонанса*, когда сравнительно слабое периодическое внешнее воздействие может вызвать чрезвычайно сильную реакцию осциллятора. Резонанс очень часто встречается в физике и находит множество различных интересных применений.

Резонанс определяется не значением внешней силы в какой-то момент, а всем видом функциональной зависимости внешнего воздействия от времени на большом интервале. В случае собственных колебаний в замкнутой системе внешнее воздействие, необходимое для выведения системы из равновесия и возбуждения колебаний, вообще не оставляет никаких следов в дифференциальном уравнении колебаний. Это воздействие лишь обеспечивает определенные начальные условия и заканчивается к некоторому моменту времени, рассматриваемому как начальный момент для дальнейших собственных колебаний. Этим начальным состоянием определяется амплитуда и фаза последующих собственных затухающих колебаний, а их частота (и быстрота затухания) определяются исключительно свойствами самого осциллятора, т. е. совершенно не зависят от характеристик возбуждающего внешнего воздействия. Напротив, вынужденные колебания, происходящие при постоянном действии периодической внешней силы, зависят не только и не столько от начальных условий, сколько от характеристик внешнего воздействия, а именно от амплитуды и (главным образом) от частоты внешней силы. Начальные условия сказываются только на протяжении переходного процесса, который можно рассматривать как наложение затухающих собственных колебаний осциллятора на установившиеся колебания. После полного затухания вклада собственных колебаний «выживают» только установившиеся колебания неизменной амплитуды.

Модель физической системы

Для изучения закономерностей вынужденных колебаний будем использовать такой же механический осциллятор, что и при изучении собственных колебаний — уравновешенный инертный маховик (стержень с грузами) на упругой спиральной пружине, обеспечивающей ему устойчивое положение равновесия. Такое устройство напоминает балансовый механизм механических наручных часов. Но теперь второй конец пружины не закреплен неподвижно, а соединен с шатуном, который можно поворачивать в одну и в другую сторону вокруг общей с маховиком оси (рис. 1).

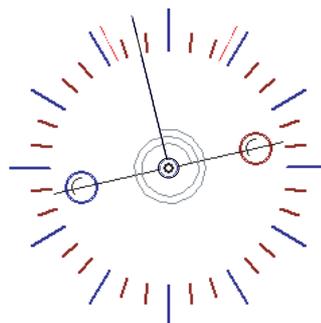


Рис. 1: Торсионный пружинный осциллятор, возбуждаемый заданным периодическим движением шатуна, к которому прикреплена спиральная пружина.

При повороте шатуна положение равновесия ротора (маховика) смещается вместе с шатуном на такой же угол. Около нового положения равновесия ротор может совершать затухающие колебания на собственной частоте. При слабом и умеренном трении частота этих колебаний близка к частоте ω_0 собственных колебаний маховика в отсутствие трения. Эта частота определяется жесткостью D пружины и моментом инерции J маховика: $\omega_0 = \sqrt{D/J}$.

Если шатуону принудительно сообщить периодическое колебательное движение, то на осциллятор будет действовать периодическая внешняя сила. Такое воздействие дает пример *кинематического возбуждения* колебаний, для которого характерно заданное движение какой-либо части колебательной системы. Кинематический способ возбуждения колебаний выбран здесь из-за своей наглядности: движение возбуждающего шатуна непосредственно наблюдается на экране. Компьютерное моделирование позволяет отчетливо видеть, скажем, сдвиг фаз между возбуждающим шатуном и ротором, соотношение их амплитуд, и многое другое.

В отличие от кинематического возбуждения, при *динамическом*, т. е. прямом силовом возбуждении, задается действующая на осциллятор внешняя сила, явно зависящая от времени и не зависящая от положения и скорости осциллятора. Прямой силовой способ возбуждения менее нагляден, но в большинстве учебников рассматривается именно силовое возбуждение вынужденных колебаний. Дифференциальные уравнения для силового и кинематического способов возбуждения колебаний одинаковы, но некоторые физические различия проявляются в характере энергетических превращений.

Пусть возбуждающий шатун принудительно совершает гармонические колебания около среднего положения (вертикального на рис. 1) с некоторой амплитудой

ϕ_0 и угловой частотой ω , так что угол его отклонения $\phi(t)$ синусоидально зависит от времени:

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Если в некоторый момент времени t маховик осциллятора отклонен от среднего положения (принятого за начало отсчета углов на шкале на рис. 1) на угол ϕ , а стержень в этот момент смещен на угол ϕ , то со стороны пружины на маховик действует момент сил $-D(\varphi - \phi) = -D\varphi + D\phi_0 \sin \omega t$. В самом деле, пружина в этот момент времени деформирована (закручена от равновесного состояния) на угол $\varphi - \phi$, а не на угол φ , как в случае свободных колебаний. Поэтому уравнение основного закона динамики для вращательного движения маховика с моментом инерции J в отсутствие трения имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi + D\phi_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

Это уравнение можно рассматривать и как дифференциальное уравнение вынужденных колебаний торсионного пружинного осциллятора под действием приложенного к нему заданного внешнего момента $D\phi_0 \sin \omega t$, изменяющегося синусоидально с частотой ω и неизменной амплитудой $D\phi_0$. Таким образом, кинематический и силовой способы возбуждения действительно описываются одним и тем же дифференциальным уравнением.

Разделив обе части уравнения (4.1а) на момент инерции маховика J и вводя обозначение $\omega_0 = \sqrt{D/J}$ для частоты собственных колебаний ($\omega_0^2 = D/J$), переписываем уравнение в канонической форме:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \omega_0^2 \phi_0 \sin \omega t. \quad (3)$$

При наличии вязкого трения, пропорционального скорости, мы должны добавить в уравнение движения тормозящий момент силы трения, пропорциональный $\dot{\varphi}$. Тогда вместо уравнения (4.2) будем иметь:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \omega_0^2 \phi_0 \sin \omega t. \quad (4)$$

Постоянная затухания γ характеризует интенсивность вязкого трения. Как и в случае собственных колебаний, вместо нее можно использовать эквивалентную безразмерную величину — добротность Q , определяемую соотношением $Q = \omega_0/2\gamma$. Таким образом, вынужденные колебания осциллятора описываются *неоднородным* линейным дифференциальным уравнением второго порядка, в отличие от собственных колебаний, для которых дифференциальное уравнение однородно, т. е. не содержит происходящей от внешней силы правой части в виде заданной функции времени. Положение рассматриваемой системы в любой момент времени определяется двумя угловыми координатами — углами φ и ϕ . Но координата ϕ — положение возбуждающего стержня — задана внешними условиями, она не свободна, так что в сущности второй степенью свободы система не обладает. «Свободной» координатой, т. е. неизвестной функцией времени, является только угол φ отклонения ротора от среднего положения. Для нахождения этой функции достаточно одного дифференциального уравнения (4). Дифференциальное уравнение, соответствующее второй координате ϕ , можно использовать для нахождения момента внешней

силы, необходимой для обеспечения заданного движения шатуна. Источник такой силы всегда испытывает реакцию (обратное воздействие) со стороны шатуна.

Установившиеся вынужденные колебания

В течение некоторого времени после включения синусоидальной внешней силы (на протяжении переходного процесса) осциллятор успевает «забыть» свое начальное состояние, его колебания приобретают стационарный характер, и осциллятор в конце концов совершает незатухающие синусоидальные колебания на частоте внешнего воздействия — *установившиеся* вынужденные колебания. Эти установившиеся колебания описываются *периодическим* частным решением неоднородного дифференциального уравнения (4):

$$\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta). \quad (5)$$

Установившиеся колебания характеризуются определенными постоянными значениями амплитуды a и сдвига фаз δ между колебаниями ротора осциллятора и возбуждающего шатуна. Величины a и δ зависят от близости частоты внешнего воздействия ω к собственной частоте осциллятора ω_0 . Зависимости $a(\omega)$ и $\delta(\omega)$ от частоты внешнего воздействия называют соответственно *амплитудно-частотной* и *фазо-частотной характеристиками* осциллятора. При относительно слабом трении (при $\gamma \ll \omega_0$, т. е. $Q \gg 1$) зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты имеет ярко выраженный *резонансный характер* — амплитуда резко возрастает при приближении ω к собственной частоте ω_0 . График зависимости амплитуды установившихся колебаний от частоты ω называют резонансной кривой. Чем выше добротность Q осциллятора, тем острее пик резонансной кривой, т. е. тем сильнее выражены резонансные свойства осциллятора.

Когда частота вынуждающей силы ω заметно отличается от собственной частоты ω_0 , можно пренебречь влиянием трения на амплитуду a и фазовый сдвиг δ установившихся вынужденных колебаний. Другими словами, в таких условиях для описания поведения реальной системы с небольшим трением можно воспользоваться идеализированной моделью системы, в которой трение полностью отсутствует. (Отметим, что применимость физической модели к реальной системе зависит не только и не столько от свойств системы, сколько от характера решаемой задачи.) Таким образом, для описания установившихся колебаний в случае, когда $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$, можно воспользоваться уравнением (3), которое строго применимо к линейному осциллятору без трения. Периодическое частное решение этого уравнения, описывающее установившиеся вынужденные колебания, можно попытаться искать в виде:

$$\varphi(t) = a \sin \omega t. \quad (6)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3), находим, что (6) дает решение уравнения (3) если амплитуда $a(\omega)$ как функция частоты ω имеет вид:

$$a(\omega) = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

Если частота ω равна нулю, выражение (7) дает $a = \phi_0$: маховик покоится в смещенном положении равновесия. Когда $\omega \ll \omega_0$, из (7) получаем $a \approx \phi_0$: при очень медленном движении шатуна маховик квазистатически следует за ним, оставаясь все время в положении равновесия, которое смещается поочередно вправо и влево вместе с шатуном. Таким образом, при очень низкой частоте кинематически возбуждаемые вынужденные колебания осциллятора совершаются с той же амплитудой и в той же фазе, что и колебания шатуна.

Выражение (7) показывает, что по мере роста частоты возбуждения ω растет амплитуда вынужденных колебаний осциллятора, и эти колебания происходят в одинаковой фазе с колебаниями шатуна. Двигаясь в одном направлении, они оба одновременно пересекают среднюю точку и одновременно достигают своих крайних положений. Однако крайнее отклонение маховика a больше, чем крайнее отклонение ϕ_0 шатуна. При $\omega \rightarrow \omega_0$ амплитуда колебаний маховика a стремится к бесконечности. Это значит, что вблизи резонанса (при $\omega \approx \omega_0$) трением пренебрегать нельзя (см. ниже).

При $\omega > \omega_0$ значение a , как видно из (7), становится отрицательным. Это означает, что при $\omega > \omega_0$ установившиеся вынужденные колебания происходят в противофазе с внешней силой: когда шатун движется в одну сторону, маховик поворачивается в противоположную сторону, и оба одновременно достигают своих крайних положений. Для этого случая решение также можно записать в форме (5), сохраняя положительные значения a для всех частот: просто под a в (5) нужно понимать модуль правой части выражения (7), а сдвиг фаз δ положить равным нулю при $\omega < \omega_0$ и $-\pi$ при $\omega > \omega_0$.

Вблизи резонанса (в области частот ω , удовлетворяющих условию $|\omega - \omega_0| \leq \gamma$) необходимо учитывать трение в дифференциальном уравнении вынужденных колебаний, т. е. нужно решать уравнение (4). Установившиеся вынужденные колебания описываются его периодическим частным решением. Это решение можно искать в виде (5). Амплитуду a и фазу δ можно найти, подставляя $\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta)$ в (4) и приравнявая коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ в левой и правой частях уравнения. Менее громоздкий способ определения a и δ основан на использовании векторных диаграмм. Приведем здесь без вывода окончательные результаты:

$$a(\omega) = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \tan \delta(\omega) = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (8)$$

Графики зависимости амплитуды от частоты $a(\omega)$, называемые также резонансными кривыми или амплитудно-частотными характеристиками осциллятора, показаны в левой верхней части рис. 2 для нескольких значений добротности. (По оси абсцисс отложена вынуждающая частота ω в единицах собственной частоты ω_0 , т. е. отношение ω/ω_0 , а по оси ординат — отношение амплитуды маховика к амплитуде вынуждающего шатуна $a(\omega)/\phi_0$). Амплитуда установившихся колебаний достигает максимального значения на резонансной частоте ω_{res} :

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (9)$$

Это выражение для ω_{res} справедливо, если трение не слишком велико, а именно, если $\omega_0 > \sqrt{2}\gamma$. При малом трении, когда $\gamma \ll \omega_0$ или $Q \gg 1$, из (9) находим приближенное выражение:

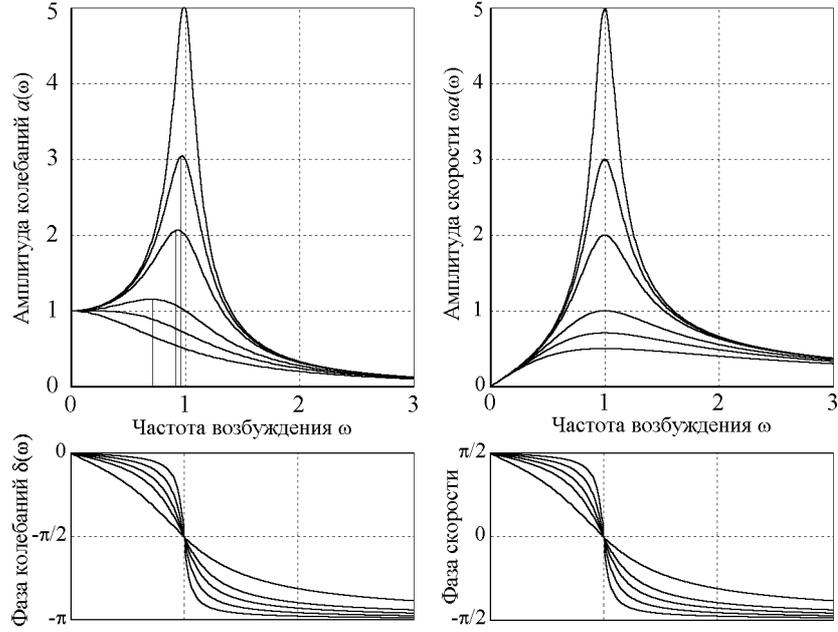


Рис. 2: Резонансные кривые линейного осциллятора.

$$\omega_{\text{res}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right). \quad (10)$$

Из (10) видно, что при малом трении резонансная частота практически совпадает с собственной частотой осциллятора в отсутствие трения ω_0 : значение ω_{res} отличается от ω_0 всего лишь на величину второго порядка по малому параметру γ/ω_0 . Например, при $Q = 10$ (умеренное трение) резонансная частота отличается от частоты собственных колебаний только на 0.25%.

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний на резонансе определяется следующим выражением:

$$a_{\text{max}} = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \approx \frac{\omega_0 \phi_0}{2\gamma} = Q \phi_0. \quad (11)$$

Из (11) видно, что резонансная амплитуда a_{max} установившихся колебаний приблизительно в Q раз больше амплитуды ϕ_0 вынуждающего шатуна (при условии что добротность Q не слишком мала). Иначе об этом можно сказать так: амплитуда a_{max} установившихся колебаний маховика при резонансе в Q раз больше его амплитуды при очень низкой вынуждающей частоте ω (при медленных колебаниях шатуна). Мы видим, что резонансный отклик осциллятора при вынужденных колебаниях характеризуется той же самой величиной — добротностью Q , — что и затухание собственных колебаний.

В отсутствие трения амплитуда $a(\omega)$ установившихся вынужденных колебаний осциллятора превышает амплитуду возбуждающего шатуна ϕ_0 при всех частотах в интервале между $\omega = 0$ и $\omega = \sqrt{2}\omega_0$. Когда частота $\omega = 0$ вынуждающей силы превышает собственную частоту $\omega_0 = 0$ более чем в $\sqrt{2}$ раз, амплитуда осцилля-

тора становится меньше амплитуды шатуна ϕ_0 и стремится к нулю при дальнейшем увеличении частоты — инертный маховик не успевает следовать за быстрыми движениями шатуна. В этой области частот динамический эффект вынуждающей силы слабее, чем действие такой же, но статической силы. Все это справедливо и при наличии слабого трения, только граничная частота будет немного меньше чем $\sqrt{2}\omega_0$, о чем можно судить по графикам $a(\omega)$ на рис. 2.

Фазо-частотные характеристики осциллятора, т. е. графики зависимости фазы вынужденных колебаний от частоты (точнее, графики сдвига фаз $\delta(\omega)$ между вынужденными колебаниями ротора и возбуждающего шатуна), полученные из (8) для разных значений добротности Q , показаны в левой нижней части рис. 2. Из этих графиков видно, что установившиеся колебания всегда отстают по фазе от возбуждающей силы, поскольку сдвиг фаз $\delta(\omega)$ отрицателен при всех частотах.

Вдали от резонанса при низкой частоте $\omega \ll \omega_0$ запаздывание почти исчезает, т. е. маховик совершает колебания в фазе с шатуном. В случае $\omega = \omega_0$ при любом трении колебания маховика отстают от колебаний возбуждающего стержня на четверть периода ($\delta = -\pi/2$): когда маховик достигает крайних отклонений, стержень проходит через среднее положение, и наоборот. Когда ω значительно превосходит ω_0 , сдвиг фаз δ приближается к $-\pi$: запаздывание маховика по фазе составляет почти 180° . В этом случае маховик и шатун в любой момент движутся в противоположных направлениях. Они почти одновременно пересекают нулевое деление шкалы, и почти одновременно достигают своих противоположных крайних точек.

Как следует из (8), в отсутствие трения сдвиг фаз либо равен нулю (при $\omega < \omega_0$), либо 180° (при $\omega > \omega_0$). Таким образом, при $\omega = \omega_0$ происходит скачкообразный переход от режима колебаний маховика в фазе с шатуном к режиму колебаний в противофазе. (В отсутствие трения амплитуда маховика в точке этого перехода обращается в бесконечность.) При наличии трения, как можно видеть из рис. 2, переход от одного режима к другому происходит постепенно в некотором интервале частот в окрестности ω_0 . Ширина этого интервала частот пропорциональна постоянной затухания γ .

При установившихся колебаниях под действием синусоидальной внешней силы *угловая скорость* маховика $\dot{\varphi} = a\omega \cos(\omega t + \delta)$ изменяется со временем также по гармоническому закону с частотой ω вынуждающей силы. Выражение для амплитуды угловой скорости $\Omega = a(\omega)\omega$ отличается от амплитуды угла отклонения $a(\omega)$ (8) дополнительным множителем ω :

$$\Omega(\omega) = \omega a(\omega) = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2/\omega - \omega)^2 + 4\gamma^2}}. \quad (12)$$

Как видно из (12), максимум резонансной кривой для скорости расположен точно при $\omega = \omega_0$ для любых значений постоянной затухания γ . Поэтому резонанс угловой скорости всегда (при любом трении) происходит при совпадении частоты вынуждающей силы ω с собственной частотой ω_0 , несмотря на то, что резонанс угла отклонения происходит при $\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$. Резонансные кривые скорости для нескольких значений добротности приведены в правой верхней части рис. 2. В нижней правой части этого рисунка показаны кривые зависимости сдвига фаз между колебаниями угловой скорости маховика и колебаниями шатуна. При резонансе скорости, т. е. при $\omega = \omega_0$, этот сдвиг обращается в нуль — изменения скорости происходят в фазе с изменениями вынуждающей силы, что соответству-

ет наиболее эффективной передаче энергии осциллятору от внешнего источника, приводящего в движение возбуждающий шатун.

Поглощаемая и рассеиваемая осциллятором мощность. Лоренцевский контур

Несмотря на то, что в установившихся вынужденных колебаниях амплитуда постоянна, энергия осциллятора остается постоянной только в среднем. В течение некоторой четверти периода колебаний энергия передается от возбуждающего шатуна к осциллятору, а в течение следующей четверти цикла энергия передается обратно от осциллятора источнику внешнего воздействия, обеспечивающему заданное принудительное движение шатуна. Поэтому в отличие от случая собственных колебаний не только кинетическая и потенциальная энергии осциллятора, но и его полная энергия испытывает колебания. Эти колебания полной энергии происходят с частотой, вдвое превышающей частоту внешнего воздействия.

Мощность, рассеиваемая (превращаемая в теплоту) осциллятором при установившихся вынужденных колебаниях, определяется работой, совершаемой моментом силы вязкого трения в единицу времени:

$$P_{\text{расс}} = N_{\text{тр}}\dot{\varphi} = -2J\gamma\dot{\varphi}^2 = -2J\gamma\omega^2 a^2 \cos^2(\omega t + \delta). \quad (13)$$

Здесь амплитуда a и сдвиг фаз δ определяются выражениями (8). Как видно из (13), рассеяние энергии происходит неравномерно в течение периода: скорость диссипации максимальна в моменты прохождения ротора через среднее положение, и уменьшается до нуля в точках его наибольшего отклонения (в точках поворота), когда угловая скорость ротора обращается в нуль. Усредняя рассеиваемую мощность по периоду колебаний, получаем:

$$\langle P_{\text{расс}} \rangle = -J\gamma\omega^2 a^2 = -J\gamma\omega^2 \frac{\omega_0^4 \phi_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (14)$$

Поглощаемая осциллятором мощность, т. е. мощность, передаваемая осциллятору внешним источником, обеспечивающим принудительное движение шатуна, определяется совершаемой в единицу времени работой приложенного к шатуну момента внешней силы. Если не принимать во внимание момент инерции шатуна (считая его малым по сравнению с моментом инерции маховика), то внешний момент равен упругому моменту деформированной пружины: $N_{\text{внеш}} = D(\varphi - \phi) = J\omega_0^2(\varphi - \phi)$. Для нахождения мгновенного значения передаваемой осциллятору мощности нужно умножить этот момент, предварительно подставив в него $\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta)$ и $\phi(t) = \phi_0 \sin(\omega t)$, на угловую скорость шатуна $\dot{\varphi} = \omega \phi_0 \cos \omega t$. Усредняя полученное выражение по периоду колебаний, получим:

$$\langle P_{\text{пол}} \rangle = -\frac{1}{2} J\omega_0^2 a \omega \sin \delta. \quad (15)$$

После подстановки в (15) значений a и δ получим для среднего значения поглощаемой мощности выражение, совпадающее с (14) для средней рассеиваемой осциллятором мощности: при установившихся колебаниях осциллятор рассеивает в среднем за период столько же энергии, сколько получает от внешнего источника.

При этом мгновенные значения рассеиваемой и получаемой мощности не совпадают — кроме систематической подпитки осциллятора энергией, идущей на компенсацию потерь из-за трения, в течение периода происходит и двунаправленный обмен энергией.

В случае сравнительно слабого трения выражение (14) для средней рассеиваемой (и поглощаемой) осциллятором мощности можно упростить. При $\gamma \ll \omega_0$ (или $Q \gg 1$) пик резонансной кривой резкий и узкий: осциллятор избирательно реагирует на синусоидальное внешнее воздействие только в узкой полосе частот в окрестности частоты собственных колебаний. Когда нас интересует поглощаемая мощность на частотах ω , близких к ω_0 , разность квадратов этих частот в знаменателе (14) можно записать следующим образом:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega_0\Delta\omega, \quad (16)$$

где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ — расстройка частоты возбуждения относительно резонанса, т. е. частота, отсчитанная от резонансного значения ω_0 . После подстановки (16) в (14), получаем следующее приближенное выражение для средней поглощаемой мощности:

$$\langle P_{\text{погл}} \rangle = \frac{\gamma J \omega_0^4 \phi_0^2 / 4}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}. \quad (17)$$

Эту зависимость средней поглощаемой мощности от частоты удобно представить в нормализованной форме $F(\Delta\omega)$, разделив $\langle P_{\text{погл}}(\Delta\omega) \rangle$ на ее максимальное значение, достигаемое при $\Delta\omega = 0$:

$$F(\Delta\omega) = \frac{1}{1 + (\Delta\omega)^2 \tau^2} = \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2}, \quad (18)$$

где $\tau = 1/\gamma$ — характерное время (время затухания) осциллятора. Описываемая выражением (18) спектральная зависимость часто встречается в различных физических проблемах и называется *лоренцевским контуром*. (Происхождение названия связано с тем, что такая спектральная зависимость поглощения энергии предсказывается развитой Г. Лоренцем электронной теорией.) В частности, спектры поглощения и испускания света атомами в определенных физических условиях описываются лоренцевским контуром. График этой функции показан на рис. 3. Он имеет вид симметричного пика, центр которого расположен при $\Delta\omega = 0$, т. е. при $\omega = \omega_0$. При смещении от этого положения (от максимума) в любую сторону на $\Delta\omega = 1/\tau = \gamma$ поглощаемая мощность уменьшается до половины своего максимального значения. Таким образом, ширина лоренцевского контура на половине высоты (полуширина) составляет $2\gamma = 2/\tau$.

Переходные процессы

Амплитуда и фаза установившихся вынужденных колебаний не зависят от начальных условий: за время установления колебаний осциллятор их полностью “забывает”. Установившиеся колебания описываются периодическим частным решением (5) неоднородного дифференциального уравнения (4). Характеризующие это решение амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики — резонансные

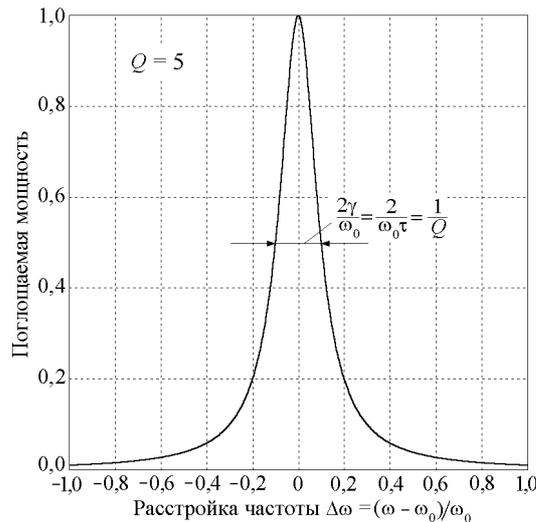


Рис. 3: Спектральная зависимость мощности, поглощаемой осциллятором в установившихся колебаниях (лоренцевский контур).

кривые на рис. 2, как и лоренцевский спектральный контур поглощаемой мощности на рис. 3, — относятся только к режиму установившихся колебаний.

Начальные условия, т. е. угол отклонения $\varphi(0)$ и угловая скорость $\dot{\varphi}(0)$ в момент $t = 0$ включения внешнего воздействия, сказываются только во время *переходного процесса* установления колебаний. В течение переходного процесса затухающие собственные колебания накладываются на установившиеся вынужденные колебания. Математически этот процесс описывается суммой частного решения (5) неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения, т. е. уравнения (4) с равной нулю правой частью. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (4) можно записать в виде:

$$\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta) + C e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta), \quad (19)$$

содержащем произвольные постоянные C и θ . Их значения определяются из начальных условий.

Мы видим, что переходный процесс описывается суперпозицией синусоидальных колебаний неизменной амплитуды a на частоте внешнего воздействия ω , и затухающих колебаний на частоте ω_1 с экспоненциально убывающей амплитудой. Теоретически переходный процесс продолжается бесконечно долго, но практически его можно считать закончившимся к тому времени, когда вклад собственных колебаний с частотой ω_1 «вымирает», т. е. их амплитуда $C e^{-\gamma t}$ становится пренебрежимо малой по сравнению с амплитудой a установившихся колебаний. При нулевых начальных условиях $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ (осциллятор покоился в положении равновесия до включения периодической внешней силы) это происходит приблизительно через Q периодов собственных колебаний, где $Q = \omega_0/2\gamma$ — добротность осциллятора, обратно пропорциональная постоянной затухания собственных колебаний. Вообще говоря, переходный процесс тем продолжительнее, чем меньше трение в системе. Однако возможны такие начальные условия, при которых пере-

ходного процесса не будет совсем (см ниже).

Частота ω_1 при слабом и умеренном трении очень близка к собственной частоте $\omega_0 = \sqrt{D/J}$ (т. е. к частоте, с которой происходят собственные колебания осциллятора в отсутствие трения):

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2}\right) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right). \quad (20)$$

В большинстве практически важных случаев относительное различие этих частот $(\omega_0 - \omega_1)/\omega_0$ столь мало, что им можно пренебречь и положить $\omega_1 = \omega_0$. В самом деле, если $Q = 5$, эта относительная разность составляет всего лишь 0.5%: $(\omega_0 - \omega_1)/\omega_0 = 0.005$.

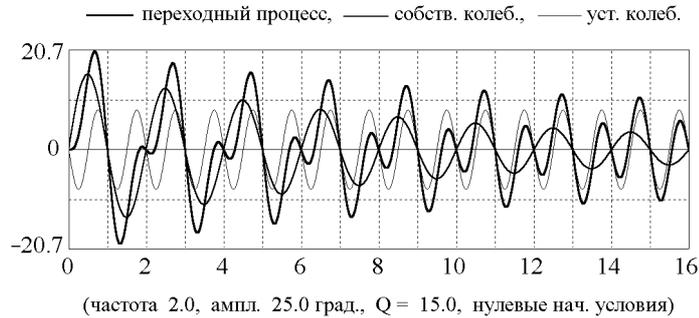


Рис. 4: Разложение переходного процесса на сумму установившихся вынужденных колебаний и затухающих собственных колебаний.

Начальные условия можно задать так, чтобы переходного процесса не было совсем, т. е. чтобы сразу после включения периодического внешнего воздействия происходили установившиеся вынужденные колебания. Очевидно, что начальная амплитуда C вклада собственных колебаний в общее решение (19) будет равна нулю, если установившиеся колебания, описываемые вторым членом в (19), будут сами удовлетворять начальным условиям, без добавления собственных колебаний, т. е. первого члена в (19). Для этого начальное отклонение $\varphi(0)$ должно быть равным $a \sin \delta$, а начальная скорость $\dot{\varphi}(0)$ должна быть равна $a\omega \cos \delta$, где a и δ — амплитуда и фаза установившихся колебаний, определяемые формулами (8). При таких начальных условиях в (19) $C = 0$, т. е. после включения внешнего воздействия колебания на собственной частоте вообще не возникают, и с самого начала происходят вынужденные колебания неизменной частоты и амплитуды.

Ограничимся далее рассмотрением переходных процессов при нулевых начальных условиях, т. е. при раскатке внешней периодической силой осциллятора, находившегося до ее включения в состоянии покоя в положении равновесия:

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0. \quad (21)$$

В момент времени $t = 0$ шатун, раскачивающий осциллятор, начинает двигаться из своего среднего положения по закону:

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t. \quad (22)$$

Рассмотрим случай раскачки осциллятора с малым трением ($\gamma \ll \omega_0$) синусоидальной внешней силой, настроенной в резонанс, т. е. на частоту собственных колебаний осциллятора $\omega_1 \approx \omega_0$. Как следует из (8), периодическое частное решение, описывающее установившиеся колебания, при $\omega = \omega_0$ имеет вид:

$$\varphi(t) \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} \phi_0 \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = -Q\phi_0 \cos \omega_0 t. \quad (23)$$

В рассматриваемом случае амплитуда колебаний маховика превосходит амплитуду шатуна в $Q = \omega_0/2\gamma$ раз, а запаздывание по фазе составляет $-\pi/2$ — движение маховика отстает на четверть цикла от колебаний шатуна.

Прибавим к периодическому частному решению (23) общее решение однородного уравнения с $\omega_1 = \omega_0$:

$$\varphi(t) = -Q\phi_0 \cos \omega_0 t + Ce^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \theta). \quad (24)$$

Произвольные постоянные C и θ определим так, чтобы для $\varphi(t)$ в (24) удовлетворялись начальные условия (21). В рассматриваемом случае слабого трения ($\gamma \ll \omega_0$) экспоненциальный множитель $e^{-\gamma t}$ в (24) на протяжении периода колебаний почти не изменяется. Поэтому при дифференцировании (24) по времени этот множитель можно считать постоянным:

$$\dot{\varphi}(t) \approx Q\phi_0\omega_0 \sin \omega_0 t - Ce^{-\gamma t}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta). \quad (25)$$

Тогда из начального условия $\dot{\varphi}(0) = 0$ находим $\theta = 0$, а из условия $\varphi(0) = 0$ получаем $C = Q\phi_0$. Таким образом, при $Q \gg 1$ и $\omega = \omega_0$ решение дифференциального уравнения (5), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, имеет вид:

$$\varphi(t) = -Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) \cos \omega_0 t = -b(t) \cos \omega_0 t, \quad (26)$$

где

$$b(t) = Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}). \quad (27)$$



Рис. 5: Переходный процесс при резонансе (графики угла отклонения для возбуждающего шатуна и маховика осциллятора при нулевых начальных условиях).

Такая суперпозиция вынужденных и слабо затухающих собственных колебаний той же частоты может рассматриваться как одно «почти гармоническое» колебание с частотой ω_0 , амплитуда которого $b(t)$ медленно нарастает со временем, монотонно приближаясь к постоянному значению $Q\phi_0$, соответствующему установившимся колебаниям (рис.5). Характерное время установления амплитуды $\tau = 1/\gamma$ совпадает со временем жизни собственных колебаний в этой же системе.

Качественно такое поведение осциллятора легко объяснить с помощью энергетических соображений. При большой добротности Q осциллятор при резонансе раскачается до амплитуды $Q\phi_0$, значительно (в Q раз) превосходящей амплитуду шатуна. Чем выше добротность, тем большую энергию запасет осциллятор и, следовательно, тем больше времени (большее число колебаний шатуна) требуется для того, чтобы сообщить ему эту энергию.

При слабом трении продолжительность резонансной раскачки составляет много периодов колебаний: $\tau \gg T_0$. Рост амплитуды на начальном этапе раскачки происходит почти по линейному закону. Это можно увидеть из уравнения (27), полагая в нем $\gamma t \ll 1$. Разлагая экспоненту в степенной ряд и ограничиваясь линейным по γt членом, получаем:

$$b(t) = Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) = \frac{\omega_0}{2\gamma}\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) \approx \frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t. \quad (28)$$

Независимость полученного выражения от постоянной затухания γ означает, что на начальном этапе резонансной раскачки осциллятора из состояния покоя рост амплитуды происходит практически с такой же скоростью, как и в отсутствие трения. В идеализированном случае полного отсутствия трения линейный рост амплитуды продолжался бы неограниченно. Это значит, что при отсутствии трения такая идеализированная система «идет вразнос» и установление вынужденных колебаний при $\omega = \omega_0$ невозможно. Фактически это означает, что принятая модель в данном случае неприменима: при описании резонанса трение необходимо учитывать, сколь бы слабым они ни было. В реальной системе при достаточно больших амплитудах либо становится недопустимым пренебрежение трением, либо зависимость восстанавливающего упругого момента становится нелинейной (при больших деформациях пружины проявляются отклонения от закона Гука). В последнем случае нелинейность системы приводит к неизохронности колебаний и связанному с этим нарушению условий резонанса при колебаниях с большими амплитудами. Это обстоятельство ограничивает рост амплитуды даже в отсутствие трения. Которая из этих причин проявляет себя раньше и в действительности ограничивает резонансный рост амплитуды в реальной физической системе, зависит от свойств конкретной системы, не учитываемых в рассматриваемой упрощенной модели осциллятора.

Переходные процессы вблизи и вдали от резонанса

Если частота вынуждающего воздействия близка к частоте собственных затухающих колебаний осциллятора, то в переходном процессе установления колебаний, пока собственные колебания не затухли, происходит сложение колебаний с близкими частотами ω и ω_1 . (Как уже отмечалось, частота ω_1 почти равна собственной частоте ω_0 в практически важных случаях, когда трение не слишком велико

[(см. (20)], так что в дальнейшем мы не будем делать различия между ω_0 и ω_1 .) Такое наложение колебаний порождает *модулированное колебание*, т. е. почти синусоидальное колебание со средней частотой, амплитуда которого медленно поочередно возрастает и убывает со сравнительно низкой *частотой биений* $|\omega - \omega_0|$, равной модулю разности собственной и вынуждающей частот.

Сначала вынуждающая сила раскачивает осциллятор до амплитуды, превышающей установившееся значение. Затем разность фаз, накопившаяся между колебаниями маховика и шатуна, приводит к обратной передаче энергии от осциллятора к источнику внешнего воздействия, и амплитуда начинает убывать. Дальнейшее изменение разности фаз двух колебаний снова приведет к росту амплитуды, которое через некоторое время опять сменится убыванием, и так далее.

При наличии трения эти процессы модуляции, т. е. чередования медленного роста и убывания амплитуды (*переходные биения*) становятся все менее выраженными по мере затухания вклада колебаний на собственной частоте. На рисунке 6 приведен график переходных биений для случая, когда первоначально маховик покоился в положении равновесия, а частота вынуждающей силы $\omega = 0.8\omega_0$, т. е. четыре цикла ее изменения совершаются на протяжении пяти периодов собственных колебаний. (На графике время отложено в единицах периода вынуждающей силы T .) Таким образом, один период биений $T_b = 2\pi/|\omega - \omega_0|$ равен четырем периодам внешнего воздействия $T = 2\pi/\omega$ и пяти периодам собственных колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

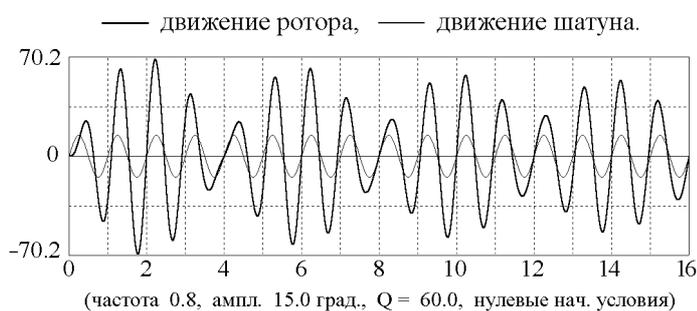


Рис. 6: Постепенно затухающие переходные биения в переходном процессе вблизи резонанса (при нулевых начальных условиях).

В отсутствие трения вклад колебаний на собственной частоте не затухает, и на протяжении переходного процесса происходит сложение двух близких по частоте гармонических колебаний с неизменными амплитудами. При нулевых начальных условиях их амплитуды относятся как ω/ω_0 . В результате возникают незатухающие биения, т. е. почти гармонические колебания на средней частоте с амплитудой, медленно изменяющейся со временем по синусоидальному закону. В идеализированном случае полного отсутствия трения установившихся колебаний не существует, за исключением рассмотренного выше случая специфических начальных условий, при которых переходный процесс отсутствует).

Далее мы рассмотрим случаи, когда частота внешнего воздействия значительно отличается от собственной частоты осциллятора.

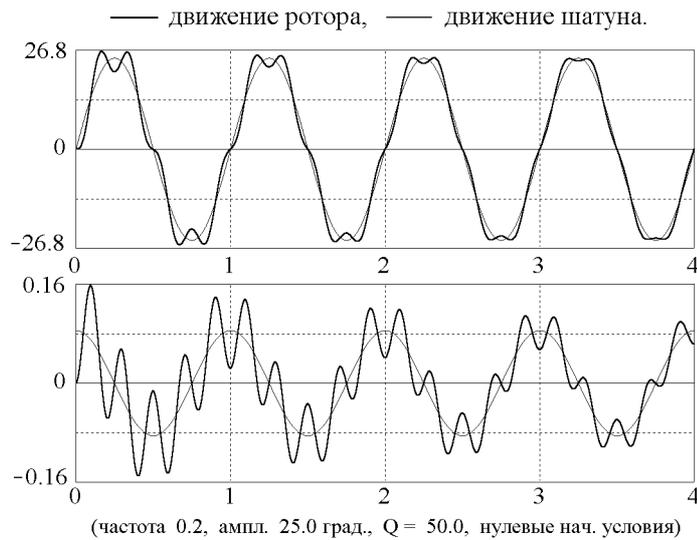


Рис. 7: Графики угла отклонения и угловой скорости ротора в переходном процессе при низкой частоте возбуждения ($\omega \ll \omega_0$).

Если внешняя частота много меньше собственной частоты ($\omega \ll \omega_0$), положение равновесия осциллятора медленно смещается вместе с шатуном поочередно вправо и влево, а ротор совершает около такого медленно движущегося положения равновесия сравнительно быстрые постепенно затухающие колебания на собственной частоте. В результате на медленные установившиеся колебания неизменной амплитуды накладываются искажающие их быстрые собственные колебания постепенно уменьшающейся амплитуды.

Пример такого переходного процесса с $\omega = 0.8\omega_0$ показан на рис. 7. По мере затухания собственных колебаний высокочастотные искажения графика уменьшаются, и в конце концов медленные вынужденные колебания принимают правильную синусоидальную форму.

В противоположном случае высокой частоты принудительного движения шатуна на протяжении переходного процесса быстрые вынужденные колебания неизменной амплитуды происходят около некоторого движущегося среднего положения, которое совершает медленные затухающие колебания на собственной частоте осциллятора.

Графики угла отклонения и угловой скорости для такого переходного процесса показаны на рис. 8 вместе с графиками составляющих его быстрых вынужденных синусоидальных колебаний неизменной амплитуды и медленных затухающих собственных колебаний. Когда медленные собственные колебания затухают, остаются только быстрые колебания, симметричные относительно точки $\phi = 0$ (т. е. относительно среднего положения шатуна). Эти быстрые колебания маховика происходят в противофазе с принудительными колебаниями шатуна. Амплитуда установившихся колебаний значительно меньше амплитуды вынуждающего шатуна.

Рекомендуемая литература:
[1], стр. 239–246.

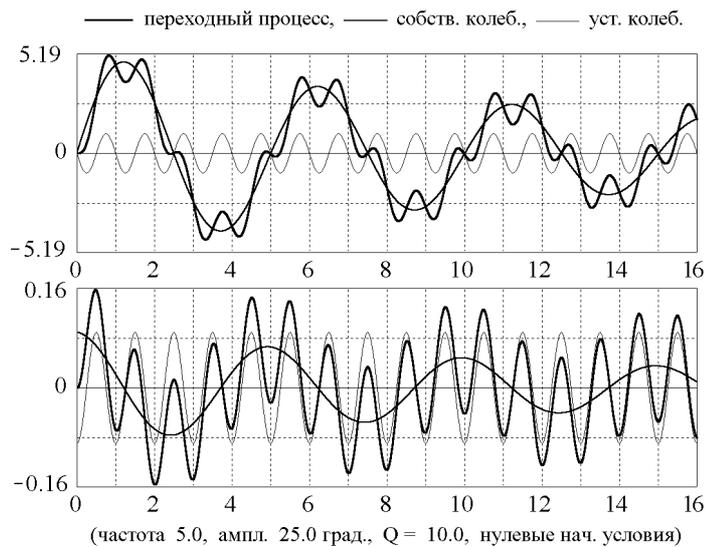


Рис. 8: Графики угла отклонения и угловой скорости ротора в переходном процессе при высокой частоте возбуждения ($\omega \gg \omega_0$).

[2], стр. 437–445.

[3], стр. 105–106, стр. 124–131.

[4], стр. 70–91.

Список литературы

- [1] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971.
- [2] Стрелков С.П. Механика. М., «Наука», 1975.
- [3] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 2 (Пространство. Время. Движение). М., «Мир», 1966.
- [4] Бутиков Е. И. Физика колебаний. Лаборатория компьютерного моделирования. Спб, 2005.