

Комментарии к лекциям по физике

Тема: Собственные колебания нелинейных систем (на примере маятника)

Содержание лекции

Собственные колебания нелинейного осциллятора. Жесткий маятник в поле тяжести. Потенциальная яма и фазовые траектории колебаний и переворотов. Зависимость периода колебаний от амплитуды. Колебания с большими амплитудами. Перевороты маятника. Движение по сепаратрисе. Влияние трения на фазовый портрет маятника.

Введение. Физическая система

Если задаться вопросом, какой физический прибор оставил наиболее глубокий след в истории физики, скорее всего первая мысль будет о маятнике. Начиная с опытов Галилея в XVI веке и вплоть до наших дней простой маятник используется в разнообразных приборах для измерения времени и напряженности гравитационного поля, и, что не менее важно, служит пробным камнем для многих физических теорий. Эта знаменитая механическая система интересна и полезна не только сама по себе как наиболее знакомый пример нелинейного механического осциллятора, но главным образом потому, что многие задачи в разных областях современной физики приводятся к дифференциальному уравнению, описывающему движение маятника. Механические аналоги физических систем допускают прямую визуализацию движения и этим очень полезны для формирования интуитивных представлений о сложных явлениях. Детально разобравшись с поведением механической системы и используя аналогию между колебательными системами разной физической природы, можно значительно продвинуться в понимании разнообразных электромагнитных и оптических нелинейных явлений, где все далеко не так наглядно, хотя системы описываются такими же дифференциальными уравнениями.

В лекции рассматриваются возможные движения математического маятника в виде точечной массы в однородном поле тяготения, закрепленной на конце невесомого стержня, который может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси. Мы рассматриваем именно стержень, а не гибкую нить, чтобы можно было изучать полные перевороты и колебания с амплитудой, приближающейся к 180° . Та же модель в равной мере применима и к поведению физического маятника, т. е. закрепленного на горизонтальной оси произвольного твердого тела (а не только точечной массы), так как обе системы описываются одним и тем же нелинейным дифференциальным уравнением.

В положении устойчивого равновесия центр масс маятника расположен ниже точки подвеса на одной вертикали с ней. При отклонении маятника из этого положения на угол φ сила тяжести создает возвращающий момент, пропорциональный $\sin \varphi$. При малых углах отклонения φ (т. е. при малых колебаниях маятника) значения синуса угла и самого угла практически совпадают ($\sin \varphi \approx \varphi$), и маятник ведет себя подобно линейному осциллятору. В частности, в отсутствие трения маятник

совершает простое гармоническое колебание. При больших амплитудах консервативный маятник совершает периодические колебания, которые, однако, уже не будут гармоническими. Графики таких колебаний заметно отличаются от синусоиды, а период колебаний существенно зависит от амплитуды.

На рис. 1 приведены графики угла отклонения и угловой скорости при колебаниях с амплитудой 179° .

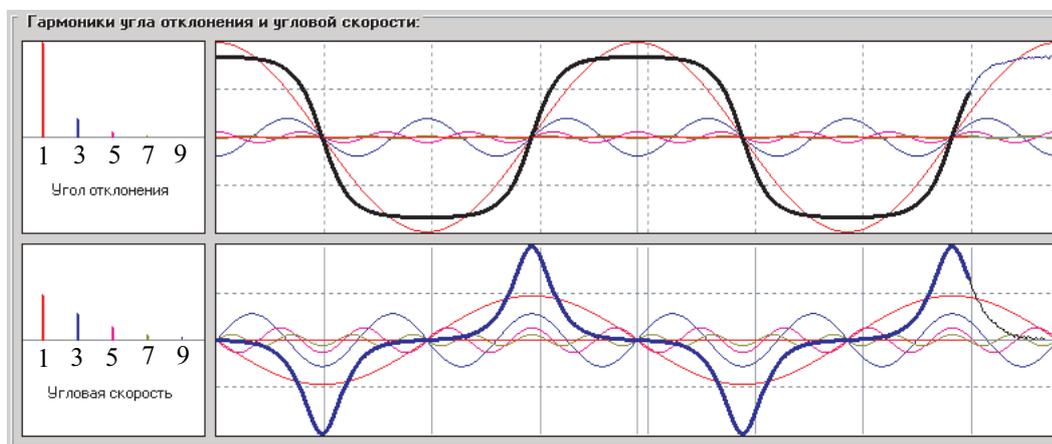


Рис. 1: Графики угла отклонения и угловой скорости при колебаниях маятника с амплитудой 179° вместе с гармониками этих колебаний.

Метки на шкале времени (т. е. вертикальные деления) проведены в соответствии с естественной для маятника единицей времени, равной периоду колебаний бесконечно малой амплитуды. Обратите внимание на то, что период T несинусоидальных колебаний маятника с амплитудой 179° почти в четыре раза больше периода малых колебаний.

Вместе с графиками на рис. 1 показан также *спектр*, т. е. синусоидальные составляющие (гармоники) этих колебаний. Период основной (фундаментальной) гармоники равен периоду колебаний T . Ее круговая частота обратно пропорциональна периоду: $\omega = 2\pi/T$. Частоты высших гармоник 3ω , 5ω ... кратны основной частоте. Спектр колебаний маятника образован только нечетными гармониками.

Если при начальном возбуждении маятник получит достаточно большую энергию, сначала он будет совершать полные перевороты. Из-за трения маятник постепенно теряет энергию, и с некоторого момента вращательное движение сменяется колебательным.

Дифференциальное уравнение физического маятника можно получить, основываясь на основном уравнении динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Применительно к физическому маятнику в однородном поле тяжести в отсутствие трения это уравнение принимает вид:

$$J\ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi. \quad (1)$$

Здесь J — момент инерции маятника относительно оси вращения, a — расстояние от оси до центра масс, g — ускорение свободного падения. Левая часть уравнения (1) представляет собой скорость изменения момента импульса маятника, пра-

вая — момент силы тяжести. Этот момент равен произведению силы mg (приложенной в центре масс) на плечо этой силы $a \sin \varphi$. После деления обеих частей уравнения (1) на J получаем:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

где введено обозначение $\omega_0^2 = mga/J$. Для простого маятника $a = l$, $J = ml^2$, и поэтому $\omega_0^2 = g/l$. Для физического маятника ω_0^2 можно представить в таком же виде, если ввести по определению величину $l = J/(ma)$. Эта величина имеет размерность длины и называется *приведенной длиной* физического маятника. Поскольку физический маятник с приведенной длиной l описывается тем же дифференциальным уравнением, что и математический маятник такой же длины l , эти две системы динамически эквивалентны.

При малых углах отклонения от положения устойчивого равновесия можно заменить в уравнении (2) $\sin \varphi$ на φ , и тогда уравнение (2) совпадет с дифференциальным уравнением колебаний гармонического осциллятора (см. лекцию 28). Поэтому величина ω_0 в уравнении (2) для маятника имеет физический смысл угловой частоты предельно малых колебаний маятника в отсутствие трения.

При наличии вязкого трения в правую часть уравнения (2) следует добавить член, пропорциональный угловой скорости $\dot{\varphi}$. Поэтому уравнение маятника с трением принимает следующий вид:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (3)$$

Таким образом, маятник как динамическая система характеризуется всего двумя независимыми параметрами: *угловой частотой малых колебаний* ω_0 и *постоянной затухания* γ , которая также имеет размерность частоты (или угловой скорости). Как и в случае линейного осциллятора, вместо постоянной затухания удобно использовать эквивалентный безразмерный параметр — *добротность* $Q = \omega_0/(2\gamma)$. В случае малых колебаний величина Q/π равна числу полных циклов, на протяжении которых амплитуда уменьшается в $e \approx 2.72$ раза.

Принципиальное различие между уравнением (3) для маятника и соответствующим дифференциальным уравнением для пружинного осциллятора (который рассматривался в лекции 28) заключается в том, что уравнение (3) *нелинейно*. Трудности нахождения аналитического решения этого уравнения как раз и обусловлены его нелинейностью. В общем случае решение уравнения (3) в элементарных функциях не выражается. В частном случае отсутствия трения решение уравнения (2) можно выразить через специальные функции (эллиптические интегралы).

Фазовый портрет маятника

Общее представление о возможных движениях маятника при разных значениях сообщенной ему энергии дают фазовые траектории, т. е. кривые зависимости угловой скорости от угла отклонения. Особенно важно, что фазовые траектории могут рассказать многое о возможном поведении нелинейной физической системы в тех случаях, когда аналитического решения не существует.

Для консервативной системы можно построить семейство фазовых траекторий, не решая дифференциального уравнения, описывающего ее поведение. Уравнения

фазовых траекторий непосредственно следуют из закона сохранения энергии. Потенциальная энергия маятника в поле тяготения $E_{\text{pot}}(\varphi)$ зависит от угла отклонения маятника φ из положения равновесия:

$$E_{\text{pot}}(\varphi) = mga(1 - \cos \varphi). \quad (4)$$

График $E_{\text{pot}}(\varphi)$ показан в верхней части рис. 2. Потенциальная энергия имеет минимальное (нулевое) значение в положении устойчивого равновесия, расположенном при $\varphi = 0$ (дно потенциальной ямы). Потенциальная энергия маятника имеет максимальное значение $2mga$ в перевернутом положении (при $\varphi = \pm\pi$), которое соответствует неустойчивому равновесию. Это вершина потенциального барьера. Потенциальная энергия маятника периодически зависит от угла φ (с периодом 2π).

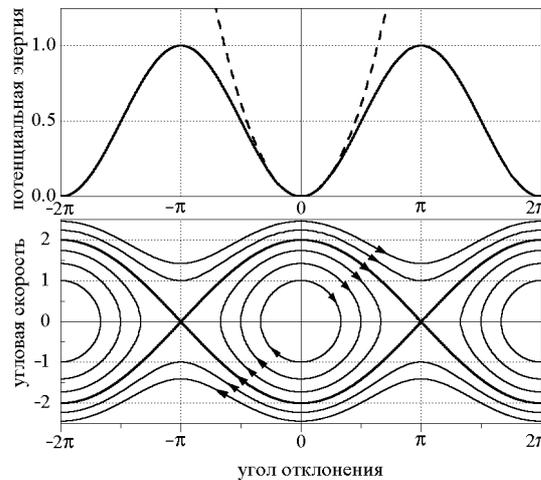


Рис. 2: Потенциальная яма и фазовый портрет консервативного маятника.

Штриховой линией на рис. 2 для сравнения показана параболическая потенциальная яма линейного (гармонического) осциллятора, период колебаний которого не зависит от амплитуды. Так как вблизи минимума обе потенциальные ямы имеют одинаковую кривизну, малые колебания маятника имеют такой же период, как и колебания соответствующего линейного осциллятора.

В отсутствие трения полная энергия маятника E , т. е. сумма его кинетической энергии $\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$ и потенциальной энергии (4), остается постоянной во время движения:

$$\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + mga(1 - \cos \varphi) = E. \quad (5)$$

Это уравнение связывает между собой угол отклонения φ и угловую скорость $\dot{\varphi}$. Поэтому (5) представляет собой уравнение фазовой траектории, соответствующей определенному значению полной энергии маятника E . Для дальнейшего удобно представить уравнение (5) в несколько иной форме. Вспоминая, что $mga/J = \omega_0^2$, и вводя по определению величину $E_0 = J\omega_0^2/2$ (которая имеет физический смысл кинетической энергии тела с моментом инерции J , вращающегося с угловой скоростью ω_0), уравнение (5) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{\omega_0^2} + 2(1 - \cos \varphi) = \frac{E}{E_0}. \quad (6)$$

Когда полная энергия маятника E меньше, чем максимально возможное значение его потенциальной энергии (когда $E < 2mga = 4E_0$), т. е. когда полная энергия меньше высоты потенциального барьера, показанного на рис. 2, маятник совершает колебания, качаясь туда и обратно между симметричными положениями максимального отклонения φ_m и $-\varphi_m$. В этих крайних положениях (точках поворота) потенциальная энергия маятника $E_{\text{pot}}(\varphi)$ сравнивается с его полной энергией E , а значит кинетическая энергия и угловая скорость обращаются в нуль. Если амплитуда мала ($\varphi_m \ll \pi/2$), колебания почти синусоидальны, а соответствующая им фазовая траектория имеет почти эллиптическую форму. Эллиптическая форма фазовой траектории малых колебаний получается из уравнения (6), если подставить в него приближенное значение косинуса: $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$, справедливое для малых углов φ :

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{E\omega_0^2/E_0} + \frac{\varphi^2}{E/E_0} = 1. \quad (7)$$

Это уравнение определяет эллипс в фазовой плоскости ($\varphi, \dot{\varphi}$). Его горизонтальная полуось равна максимальному угловому отклонению маятника $\varphi_m = \sqrt{E/E_0}$. Если угловую скорость $\dot{\varphi}$ откладывать на оси ординат в единицах угловой частоты малых колебаний ω_0 , задаваемый уравнением (7) эллипс вырождается в окружность.

Чем больше полная энергия E (т. е. чем больше амплитуда колебаний φ_m), тем значительнее движение маятника отличается от простого гармонического колебания, и тем сильнее фазовая траектория отличается от эллипса. При увеличении полной энергии E и приближении ее к значению $2mga$ фазовая траектория вытягивается в горизонтальном направлении (вдоль оси φ) сильнее, чем в вертикальном (вдоль оси $\dot{\varphi}$). Так происходит потому, что склоны потенциальной ямы маятника с увеличением амплитуды колебаний поднимаются не столь круто, как склоны параболической ямы линейного осциллятора (см. рис. 2). Так как возвращающий момент силы тяжести у маятника растет с углом отклонения медленнее, чем у осциллятора, маятник называют системой с «мягкой» возвращающей силой. Поэтому в отличие от осциллятора, период колебаний которого не зависит от амплитуды, период колебаний маятника растет по мере увеличения амплитуды.

Когда маятник отклонен из равновесия на угол, близкий к 90° , возвращающий момент силы тяжести почти постоянен (слабо зависит от угла φ в окрестности 90°). Это можно увидеть и из графика зависимости потенциальной энергии от φ (см. рис. 2), наклон которого почти неизменен вблизи точек перегиба $\varphi = \pm 90^\circ$. Поэтому маятник движется здесь с почти постоянным угловым ускорением, а угловая скорость линейно зависит от времени, что отчетливо проявляется на графиках угловой скорости. Для колебаний с большими амплитудами ($110 - 140^\circ$) эти графики принимают пилообразную форму с почти прямолинейными зубцами. Прямолинейным участкам графиков скорости на графиках угла отклонения соответствуют зубцы параболической формы. Весь график угла отклонения $\varphi(t)$ состоит из таких почти параболических сегментов, выпуклости которых поочередно обращены в противоположные стороны.

При больших амплитудах маятник большую часть периода колебаний проводит в окрестности точек максимального отклонения (точек поворота), где направление его движения изменяется на противоположное. С увеличением размаха колебаний на графике угла отклонения $\varphi(t)$ вершины становятся более плоскими, а на графике угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ — более острыми. Такие изменения формы графиков ясно видны на рис. 3.

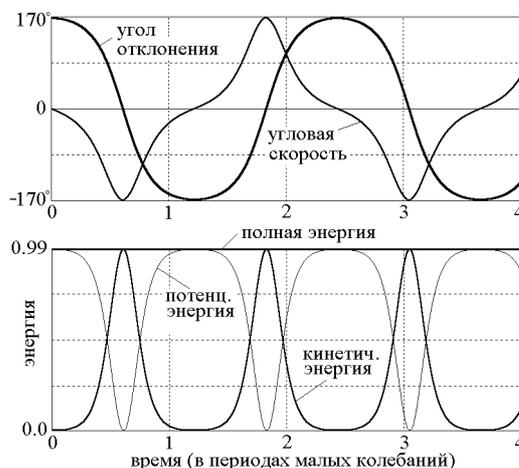


Рис. 3: Графики больших колебаний маятника в отсутствие трения ($\varphi_{\max} = 170^\circ$).

В нижней части рис. 3 показаны графики потенциальной, кинетической и полной энергий маятника. При больших колебаниях маятник проводит на пологих склонах потенциальной ямы в среднем больше времени нежели вблизи ее дна. Поэтому с увеличением амплитуды колебаний вершины графика потенциальной энергии $E_{\text{pot}}(t)$ растягиваются и становятся шире, чем долины между ними, в противоположность гармоническому осциллятору, для которого максимумы и минимумы графика имеют одинаковую ширину. Противоположные изменения происходят на графике кинетической энергии $E_{\text{kin}}(t)$. Это значит, что при колебаниях большого размаха среднее по времени значение потенциальной энергии маятника больше среднего значения кинетической энергии. Напомним, что при малых колебаниях маятника средние значения двух видов энергии одинаковы (как и у гармонического осциллятора).

Если полная энергия маятника превышает потенциальную энергию в перевернутом положении, т. е. если $E > 2mga$, то угловая скорость маятника не обращается в нуль даже при $\varphi = \pm\pi$. В противоположность режиму колебаний знак угловой скорости теперь остается неизменным. Маятник совершает полные обороты, т. е. *вращается* в определенном направлении. Это вращение происходит неравномерно: когда он проходит через низшую точку своего кругового пути, т. е. через положение устойчивого равновесия, угловая скорость максимальна. В моменты прохождения через верхнюю точку (через положение неустойчивого равновесия) угловая скорость маятника минимальна.

В фазовой плоскости вращение маятника представлено траекторией, которая выходит за пределы вертикальных линий $\varphi = \pm\pi$, продолжаясь периодически с каждым новым оборотом, как показано на рис. 2. Для верхних кривых, лежащих

выше оси φ , значения угловой скорости $\dot{\varphi}$ положительны и угол φ возрастает со временем. Это значит, что они соответствуют вращению маятника в положительном направлении (против часовой стрелки). Изображающая точка движется вдоль этих кривых слева направо.

Для любой консервативной системы уравнение фазовой траектории (в частности, уравнение (6) в случае маятника) всегда выражается четной функцией аргумента $\dot{\varphi}$, так как кинетическая энергия зависит только от $\dot{\varphi}^2$. Отсюда следует, что фазовая траектория симметрична относительно горизонтальной оси φ . Эта симметрия означает, что движение системы в одном направлении (скажем, по часовой стрелке) механически эквивалентно движению в обратном направлении (против часовой стрелки). Другими словами, движение консервативной системы *обратно во времени*: если в произвольный момент времени знак скорости мгновенно изменить на противоположный, изображающая точка в фазовой плоскости перескакивает на ту же самую фазовую траекторию в новое положение, расположенное симметрично по другую сторону горизонтальной оси φ . Двигаясь в обратном направлении, система проходит через те же пространственные точки с той же самой скоростью (по модулю), что и в прямом движении. Поскольку обращение знака скорости ($\dot{\varphi} \rightarrow -\dot{\varphi}$) эквивалентно изменению направления времени ($t \rightarrow -t$), отмеченное свойство консервативных систем называют также симметрией по отношению к *обращению времени*.

Дополнительная симметрия фазовых траекторий консервативного маятника относительно вертикальной оси $\dot{\varphi}$ (симметрия по отношению к замене $\varphi \rightarrow -\varphi$) следует из симметрии потенциальной ямы: $E_{\text{pot}}(-\varphi) = E_{\text{pot}}(\varphi)$. При включении трения в модель маятника движение системы становится необратимым во времени. Поэтому отмеченная выше симметрия фазовых траекторий системы относительно координатных осей фазовой плоскости исчезает.

Углы φ и $\varphi \pm 2\pi$, $\varphi \pm 4\pi$, ... эквивалентны, так как соответствуют одному и тому же положению маятника. Поэтому достаточно рассматривать только часть фазовой плоскости, например, полосу, заключенную между вертикальными прямыми $\varphi = -\pi$ и $\varphi = \pi$ (см рис. 2). Эти прямые можно отождествить и считать, что когда изображающая точка покидает выделенную область, пересекая правую ее границу $\varphi = \pi$, эта точка одновременно входит с противоположной стороны через левую границу $\varphi = -\pi$ (если маятник совершает переворот против часовой стрелки).

Двумерное фазовое пространство жесткого маятника можно представлять себе не только как часть плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$, заключенную между вертикальными прямыми $\varphi = +\pi$ и $\varphi = -\pi$, но и как некоторую поверхность, не имеющую границ. Это возможно потому, что противоположные точки вертикальных прямых, соответствующие одинаковым значениям $\dot{\varphi}$, описывают физически эквивалентные состояния маятника. Принимая во внимание также периодичность зависимости потенциальной энергии маятника и возвращающего момента силы тяжести от угла φ , можно вырезать эту часть плоскости и свернуть ее в цилиндр, соединив граничные прямые $\varphi = +\pi$ и $\varphi = -\pi$. Образованную таким образом цилиндрическую поверхность можно рассматривать как фазовое пространство маятника. Фазовые траектории, охватывающие этот цилиндр, соответствуют полным переворотам (неравномерному вращению) маятника. Такое вращение, как уже отмечалось, происходит при значениях полной энергии, превосходящих высоту потенциального барьера $2mga$, разделяющего соседние минимумы потенциальной энергии.

Период вращения быстро уменьшается при увеличении энергии. Асимптотическое поведение периода при $E \gg 2mga$ можно найти следующим образом.

Когда полная энергия маятника E значительно превосходит высоту потенциального барьера $2mga$, можно приближенно считать, что вся энергия маятника — это кинетическая энергия его вращения. Иными словами, в этом случае можно пренебречь влиянием поля тяжести на поведение маятника и в первом приближении считать, что он совершает равномерное вращение. Если возбуждение маятника совершалось сообщением ему в положении устойчивого равновесия некоторой угловой скорости Ω , то дальнейшее вращение и происходит приблизительно с этой угловой скоростью. Поэтому при $E = J\Omega^2/2 \gg 2mga$ период вращения обратно пропорционален угловой скорости Ω , сообщенной маятнику при возбуждении: $T = 2\pi/\Omega$.

Чтобы улучшить полученную оценку зависимости периода от начальной угловой скорости $T(\Omega)$, нужно принять во внимание вариации угловой скорости вращения маятника из-за действия силы тяжести. Угловая скорость осциллирует между максимальным значением Ω в нижней точке и некоторым минимальным значением Ω_{\min} в верхней точке траектории. Минимальную угловую скорость можно найти с помощью закона сохранения энергии:

$$\Omega_{\min} = \sqrt{\Omega^2 - 4\omega_0^2} \approx \Omega \left(1 - 2\frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \right).$$

При сравнительно быстром вращении маятника осцилляции угловой скорости почти синусоидальны. Это можно увидеть из графиков угловой скорости, которые строит моделирующая программа. Поэтому в следующем приближении среднее значение угловой скорости можно получить как полусумму максимального и минимального значений:

$$\Omega_{\text{av}} \approx (\Omega + \Omega_{\min})/2 = \Omega(1 - \omega_0^2/\Omega^2),$$

что для периода вращения маятника дает следующую оценку:

$$T(\Omega) = \frac{2\pi}{\Omega_{\text{av}}} \approx T_0 \frac{\omega_0}{\Omega} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \right).$$

Отличие маятника от линейного осциллятора проявляется прежде всего в зависимости периода колебаний от амплитуды. Чтобы получить приближенную теоретическую формулу для этой зависимости, нужно удержать следующий член в разложении $\sin \varphi$ в дифференциальном уравнении (2):

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3, \quad (8)$$

и в результате получаем следующее приближенное нелинейное дифференциальное уравнение для консервативного маятника с $\gamma = 0$:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi - \frac{1}{6}\omega_0^2\varphi^3 = 0, \quad (9)$$

Приближенное решение уравнения (9) можно искать в виде суперпозиции синусоидального колебания $\varphi(t) = \varphi_m \cos \omega t$ и его третьей гармоники $\epsilon\varphi_m \cos 3\omega t$, частота которой равна 3ω (мы принимаем, что момент $t = 0$ соответствует максимальному

отклонению маятника). Такое решение приведено во многих учебниках, см., например, [1], стр. 224 – 227. Относительный вклад третьей гармоники ϵ оказывается равным $\varphi_m^2/192$, где φ_m – амплитуда основной гармоники, частота которой получается меньшей, чем частота ω_0 предельно малых колебаний на величину, пропорциональную квадрату амплитуды φ_m^2 :

$$\omega \approx \omega_0(1 - \varphi_m^2/16), \quad T = 2\pi/\omega \approx T_0(1 + \varphi_m^2/16). \quad (10)$$

Рекомендуется получить это решение самостоятельно, либо по крайней мере проследить за всеми деталями вывода, приведенного в учебниках, чтобы составить представление о приближенных методах, используемых в теории колебаний. Ту же самую приближенную формулу (10) для зависимости периода колебаний маятника от амплитуды можно получить из точного решения, выраженного через эллиптические интегралы, разлагая точное решение в ряд по степеням амплитуды φ_m .

Уравнение (10) показывает, что, например, при амплитуде $\varphi_m = 30^\circ$ (0.52 рад) относительное увеличение периода колебаний (по сравнению с периодом колебаний бесконечно малой амплитуды) составляет 0.017 (1.7%). Относительный вклад третьей гармоники в это несинусоидальное колебание составляет 0.14%, т. е. ее амплитуда равна лишь 0.043° .

В следующей таблице приведены значения периода T (для нескольких значений амплитуды), рассчитанные по формуле (10) и измеренные в вычислительном эксперименте. Сравнивая эти значения, приходим к заключению, что приближенная формула (10) для амплитуды 45° дает значение периода с относительной ошибкой лишь $(1.0400 - 1.0386)/1.04 = 0.0013 = 0.13\%$. Однако при 90° ошибка составляет уже 2.24%. Ошибка не превышает 1% для амплитуд вплоть до 70° .

Амплитуда φ_m	T/T_0 (теория)	T/T_0 (эксперимент)
30° ($\pi/6$)	1.0171	1.0175
45° ($\pi/4$)	1.0386	1.0400
60° ($\pi/3$)	1.0685	1.0732
90° ($\pi/2$)	1.1539	1.1803
120° ($2\pi/3$)	1.2742	1.3730
135° ($3\pi/4$)	1.3470	1.5279
150° ($5\pi/6$)	1.4284	1.7622

Лимитационное движение маятника

Фазовая траектория движения консервативного маятника с полной энергией E , равной максимально возможному значению потенциальной энергии маятника, а именно, $E_{\text{пот}}(\pi) = 2mga = E_{\text{max}}$, представляет особый интерес. Она отделяет центральную область фазовой плоскости, занятую замкнутыми траекториями колебательных движений, от внешних областей, занятых фазовыми траекториями вращательных движений. Эта граница называется *сепаратрисой*. На рис. 2 она выделена жирной линией. Сепаратриса разделяет фазовую плоскость маятника на области, соответствующие разным типам движения. Уравнение сепаратрисы следует из уравнения (5) или (6), если подставить туда $E = 4E_0 = 2J\omega_0^2$:

$$\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi/2). \quad (11)$$

Лимитационное движение консервативного маятника (движение с полной энергией $E = 2mga$) заслуживает детального обсуждения. В этом случае изображающая точка в фазовой плоскости движется вдоль сепаратрисы. Когда маятник с энергией $E = 2mga$ приближается к перевернутому положению $\varphi = \pi$ или $\varphi = -\pi$, его угловая скорость стремится к нулю, обращаясь в нуль при $\varphi = \pm\pi$. В фазовой плоскости это состояние представлено седловыми точками $\varphi = \pm\pi$, $\dot{\varphi} = 0$, в которых встречаются верхняя и нижняя ветви сепаратрисы (11). Обе эти точки соответствуют одному и тому же механическому состоянию, в котором перевернутый маятник находится в покое в неустойчивом положении равновесия. Малейшее смещение маятника из этого положения в ту или другую сторону приведет к колебаниям с амплитудой, приближающейся к π , а малейший толчок приведет к вращательному движению (к полным переворотам). При таких колебаниях (как и при переворотах) маятник надолго задерживается в окрестности перевернутого положения.

Замечательно, что для лимитационного движения маятника, т. е. движения с полной энергией $E = 4E_0 = 2mga$, существует аналитическое решение, в котором зависимость от времени для угла отклонения $\varphi(t)$ и для угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ выражается через элементарные функции. Интегрирование дифференциального уравнения (11) с начальным условием $\varphi(0) = 0$ (при положительном знаке квадратного корня) дает:

$$-\omega_0 t = \ln \tan[(\pi - \varphi)/4], \quad (12)$$

и мы приходим к следующему выражению для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \pi - 4 \arctan(e^{-\omega_0 t}). \quad (13)$$

Это решение описывает движение маятника в направлении против часовой стрелки, начинающееся при $t = -\infty$ из положения $\varphi = -\pi$. При $t = 0$ груз маятника проходит через нижнюю точку своей круговой траектории, и затем продолжает движение, асимптотически приближаясь к перевернутому положению $\varphi = +\pi$. График $\varphi(t)$ для этого движения показан на рис. 4.

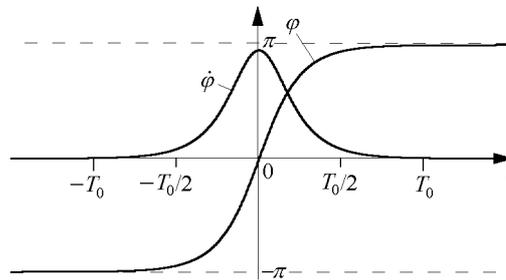


Рис. 4: Графики движения маятника с энергией $E = 2mga = E_{\max} = 4E_0$.

Второе решение, соответствующее вращению маятника по часовой стрелке (т. е. движению вдоль второй ветви сепаратрисы в фазовой плоскости), можно получить

из уравнения (13) преобразованием обращения времени, т. е. заменой $t \rightarrow -t$. Решения, соответствующие другим начальным условиям, можно получить из уравнения (13) простым сдвигом начала отсчета времени (т. е. заменой t на $t - t_0$).

Чтобы получить зависимость угловой скорости от времени $\dot{\varphi}(t)$ для лимитационного движения маятника в отсутствие трения, можно выразить $\cos(\varphi/2)$ в уравнении (13) следующим образом:

$$\cos(\varphi/2) = \frac{1}{\cosh(\omega_0 t)}.$$

После подстановки этого значения в (11) получаем:

$$\dot{\varphi}(t) = \pm \frac{2\omega_0}{\cosh(\omega_0 t)} = \pm \frac{4\omega_0}{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}. \quad (14)$$

Эта зависимость угловой скорости от времени $\dot{\varphi}(t)$ для лимитационного движения также показана на рис. 4. График $\dot{\varphi}(t)$ имеет вид уединенного импульса. Характеристическая ширина его профиля, т. е. продолжительность импульса скорости, по порядку величины равна $1/\omega_0$. Это значит, что время, необходимое маятнику для прохождения почти полного кругового пути в лимитационном движении, из окрестности перевернутого положения через нижнее положение равновесия вновь почти до перевернутого положения, по порядку величины равно периоду малых колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$. В самом деле, для моментов времени $t = T_0/2$ по обе стороны от пика значение угловой скорости, как следует из (14), составляет лишь $0.17\omega_0$. Используя аналитическое выражение (13) для $\varphi(t)$, можно точно рассчитать промежуток времени τ , в течение которого маятник проходит через нижнее положение равновесия от одного горизонтального положения ($\varphi = -\pi/2$) до другого ($\varphi = \pi/2$): $\tau = 0.28 T_0$. На протяжении этого промежутка времени кинетическая энергия маятника больше потенциальной. Поэтому время τ равно полуширине (ширине на половине высоты) одиночного импульса на графике кинетической энергии для лимитационного движения.

На крыльях графика $\dot{\varphi}(t)$, т. е. при $t \rightarrow \pm\infty$, угловая скорость спадает экспоненциально. В самом деле, при больших положительных значениях t в знаменателе выражения (14) можно пренебречь вторым слагаемым $\exp(-\omega_0 t)$, что дает

$$\dot{\varphi}(t) \approx \pm 4\omega_0 e^{-\omega_0 t}. \quad (15)$$

Таким образом, в случае лимитационного движения, когда полная энергия маятника в точности равна высоте потенциального барьера $2mga$, скорость маятника неограниченно уменьшается по мере его приближения к перевернутому положению. Маятник асимптотически движется к неустойчивому равновесию, затрачивая на это движение бесконечно большое время. Значит, при $E = 2mga$ движение консервативного маятника не будет периодическим.

Если энергия маятника близка к значению $2mga$, его движение почти всюду будет очень мало отличаться от лимитационного. Графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ для движений маятника с энергией, немного меньшей и немного большей $2mga$, показаны на рис. 5.

Заметные отличия в характере движения проявляются лишь в непосредственной близости перевернутого положения, для достижения которого при $E = 2mga$

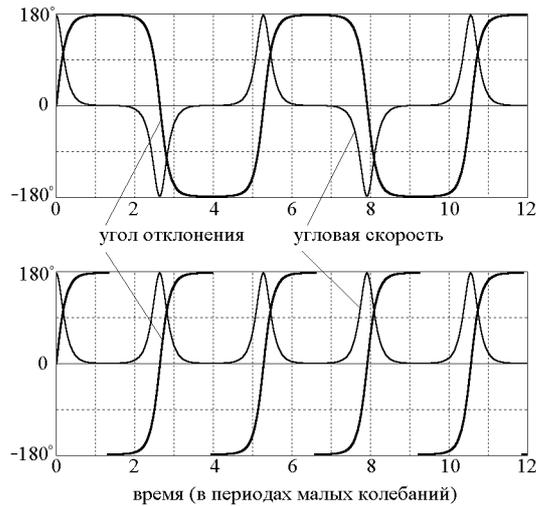


Рис. 5: Графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ при колебаниях и переворотах консервативного маятника с энергией, близкой к значению $2mga$.

потребовалось бы бесконечно большое время. Если энергия превышает $2mga$ на сколь угодно малую величину, маятник достигнет перевернутого положения за конечное время и будет продолжать движение далее в прежнем направлении, набирая скорость по мере приближения к нижнему положению. Если же энергия меньше, чем $2mga$, маятник за конечное время достигнет точки своего максимального отклонения, и затем начнет двигаться обратно. И в том, и в другом случае движение маятника периодическое, причем его период неограниченно возрастает при $E \rightarrow 2mga$. Рис. 6 показывает зависимость периода колебаний и вращений от полной энергии $T(E)$, полученную с помощью компьютерного моделирования.

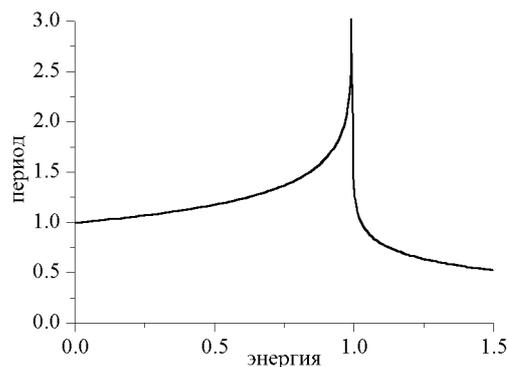


Рис. 6: Период как функция полной энергии E для колебаний и переворотов маятника в отсутствие трения.

Начальный участок графика показывает почти линейный рост периода с энергией, что соответствует приближенной формуле 10, так как при малых колебаниях полная энергия маятника приблизительно пропорциональна квадрату амплитуды: $E \sim \varphi_m^2$.

Рассмотренные выше математические соотношения, относящиеся к лимитационному движению маятника, играют важную роль в современной физике, в частности, в теории солитонов (уединенных волновых импульсов, распространяющихся в нелинейной среде с дисперсией).

Средние значения потенциальной и кинетической энергий

Малые колебания маятника почти синусоидальны, и средние за период значения потенциальной и кинетической энергий маятника равны. При колебаниях большого размаха, как уже отмечалось, маятник больше времени проводит на пологих склонах потенциальной ямы, поэтому в среднем потенциальная энергия преобладает над кинетической. В случае движения с энергией $E \approx 2mga$, рассмотренного в предыдущем разделе, большую часть периода маятник медленно движется в окрестности перевернутого положения, где потенциальная энергия имеет почти максимальное значение $2mga = 2J\omega_0^2$, и только на сравнительно короткое время, пока маятник быстро проходит нижнюю часть своего кругового пути, потенциальная энергия превращается в кинетическую.

Для теоретической оценки отношения средних за период значений потенциальной и кинетической энергий маятника при $E \approx 2mga$ можно принять, что большую часть времени угловая скорость маятника практически равна нулю, а на протяжении сравнительно короткого времени движения угловая скорость $\dot{\varphi}(t)$ зависит от времени почти так же, как и при лимитационном движении, т. е. в соответствии с (14). Поэтому для острого импульса кинетической энергии на графике $E_{\text{kin}}(t)$ можно взять аналитическую зависимость от времени, характерную для лимитационного движения. Так как крылья этого импульса спадают экспоненциально, среднее за период значение кинетической энергии можно вычислять, распространяя пределы интегрирования до $\pm\infty$:

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{J}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{\varphi}^2(t) dt \approx \frac{J}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}^2(t) dt = \frac{J}{T} \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\varphi}(\varphi) d\varphi. \quad (16)$$

Здесь учтено, что на период колебаний T приходятся два импульса кинетической энергии. Интегрирование по времени в (16) заменено интегрированием по углу отклонения. Из (16) следует, что средняя кинетическая энергия $\langle E_{\text{kin}} \rangle$ в этом движении пропорциональна площади S фазовой плоскости, ограниченной сепаратрисой: $2\langle E_{\text{kin}} \rangle = JS/T$. Для $\dot{\varphi}(\varphi)$ можно воспользоваться выражением (11), справедливым для движения по сепаратрисе:

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{J}{T} 2\omega_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{4}{\pi} J\omega_0^2 \frac{T_0}{T}. \quad (17)$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемом движении полная энергия E приблизительно равна $2mga = 2J\omega_0^2$ и что $E_{\text{pot}} = E - E_{\text{kin}}$, для отношения средних энергий получаем:

$$\frac{\langle E_{\text{pot}} \rangle}{\langle E_{\text{kin}} \rangle} = \frac{2J\omega_0^2}{\langle E_{\text{kin}} \rangle} - 1 = \frac{\pi}{2} \frac{T}{T_0} - 1. \quad (18)$$

В случае $\varphi_m = 179.99^\circ$ период колебаний равен $6.83 T_0$. Из (16) находим, что при колебаниях с такой амплитудой отношение средней потенциальной энергии маятника к средней кинетической энергии равно 9.7.

Влияние трения на фазовый портрет маятника

При наличии вязкого трения фазовый портрет маятника претерпевает качественные изменения. Становится другой топология фазовых траекторий — сравните рисунки 7 и 2.

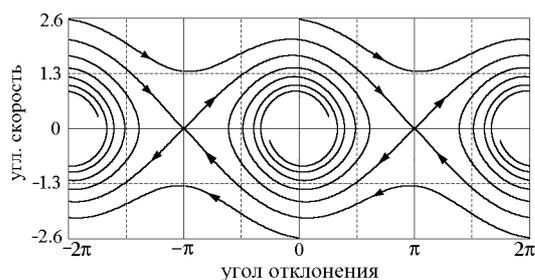


Рис. 7: Фазовый портрет маятника с трением.

Проходящая выше сепаратрисы фазовая траектория, соответствующая вращению маятника против часовой стрелки, с каждым проходом (с каждым оборотом маятника) снижается и приближается к сепаратрисе. Траектория, которая у консервативного маятника проходила вдоль верхней ветви сепаратрисы, теперь не достигает седловой точки $(\pi, 0)$, и превращается в спираль, навивающуюся на фокус, расположенный в начале координат. Внутренняя часть этой спирали, соответствующая малым затухающим колебаниям, подобна фазовой траектории линейного осциллятора с вязким трением.

Рекомендуемая литература:

- [1], стр. 220–227, стр. 251–252.
- [2], стр. 40–61.

Список литературы

- [1] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971.
- [2] Бутиков Е. И. Физика колебаний. Лаборатория компьютерного моделирования. Спб, 2005.