

---

Санкт-Петербургский государственный университет

Физический факультет

**Е. И. Бутиков**

**Релятивистские представления  
в курсе общей физики**

**Учебное пособие**

Санкт-Петербург

2006

---

---

# Предисловие

Теория относительности принадлежит к числу величайших достижений человеческой мысли, которые радикально преобразовали современное научное мировоззрение. Глубокое знание частной теории относительности совершенно необходимо, по существу, для понимания всей современной физики. Университетская программа курса общей физики предусматривает достаточно подробное ознакомление с физической стороной частной теории относительности уже при изучении механики — первого из разделов курса. Предлагаемая действующей программой последовательность изучения материала опирается не на исторический ход развития теории, а на внутреннюю логику ее построения. Сведения исторического характера составляют лишь фон, необходимый для понимания места теории относительности в научной картине и ее взаимосвязей с другими разделами физики. Такой подход должен способствовать облегчению понимания теории.

Окружающий нас ньютоновский мир сравнительно медленных движений, повседневно доступных непосредственному наблюдению, настолько глубоко вошел в наши представления, что почти каждый испытывает немалые трудности в понимании противоречащих здравому смыслу идей Эйнштейна о пространстве и времени при первом знакомстве с ними. Эйнштейн, по-видимому, довольно точно указал на происхождение этих трудностей следующими словами: «Здравый смысл — это пласт предрассудков, заложенных в сознании в возрасте до восемнадцати лет». Несомненно, что при традиционном изложении теории относительности, использующем сначала представления о светоносном эфире, возможность существования которого затем подвергается критике, трудности, испытываемые учащимися, в большинстве случаев имеют чисто психологическую природу и связаны с тем, что изучение теории относительности начинается лишь после сравнительно полного ознакомления с классической физикой. Такой подход требует болезненной ломки сложившихся представлений. Поэтому очень важно, чтобы будущие физики познакомились с основами теории относительности как можно раньше и с самого начала научились думать на ее языке. С таких позиций и предлагается походить к изучению теории относительности в данном пособии. Краткое систематическое изложение материала сопровождается здесь точными указаниями литературы по каждому из обсуждаемых вопросов. Такие указания необходимы главным образом потому, что в распространенных у нас пособиях по общей физике сведения по теории относительности приводятся главным образом в качестве дополнений и как правило имеют отрывочный характер. В ссылки включены также книги акад. В. А. Фока [7] и акад. Л. И. Мандельштама [8], которые в полном объеме недоступны студентам младших курсов, но изучение отдельных мест, указанных в пособии, несомненно принесет им большую пользу.

# Глава 1

## Основные положения теории относительности и релятивистская кинематика

При изложении основ теории относительности и релятивистской кинематики в данном учебном пособии предлагается следующая последовательность изучения материала. После напоминания принципа относительности классической механики и выражающих его преобразований Галилея обсуждается ограниченный характер классических представлений о пространстве и времени и необходимость отказа от них в общем случае. Затем формулируются основные положения частной теории относительности. При обсуждении физического содержания постулатов теории относительности основной акцент сделан на их трактовке как обобщения опытных фактов.

На основе постулатов теории относительности обсуждаются вопросы измерения промежутков времени и пространственных расстояний в разных системах отсчета и поясняется относительный характер одновременности пространственно удаленных событий.

Релятивистские формулы преобразования промежутков времени и пространственных расстояний между событиями выводятся в пособии непосредственно из постулатов теории относительности. Приводятся экспериментальные факты, подтверждающие эти релятивистские кинематические законы. Затем на этой основе выводятся формулы преобразований Лоренца.

Далее рассматриваются следствия преобразований Лоренца, в частности, релятивистский закон преобразования скорости при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, приводятся примеры его применения и экспериментальные подтверждения.

Вводится понятие пространственно-временного интервала между событиями и показывается его инвариантность относительно преобразований Лоренца. Обсуждается классификация интервалов и ее связь с возможностью причинной связи между событиями. Затем преобразование от одной инерциальной системы отсчета к другой рассматривается как геометрическое преобразование в четырехмерном пространстве-времени (пространстве Минковского). Вводится представление о четырехмерных векторах и рассматривается закон их преобразования при переходе от одной системы отсчета к другой.

**В первой главе учебного пособия рассматриваются следующие вопросы:**

- Классический принцип относительности и преобразования Галилея
- Ограниченность классических представлений о пространстве и времени
- Постулаты теории относительности и их физическое содержание
- Измерение промежутков времени и пространственных расстояний
- Относительный характер одновременности удаленных событий
- Релятивистские законы преобразования промежутков времени и расстояний
- Преобразования Лоренца и преобразование скорости
- Инвариантный пространственно-временной интервал между событиями
- Псевдоевклидова геометрия четырехмерного пространства-времени (пространства Минковского) и четырехмерные векторы

По каждому из рассматриваемых вопросов в учебном пособии предлагаются задачи и даются подробные указания со ссылками на учебную литературу, содержащую изучаемый материал. Кроме того, приводятся ссылки на отдельные места из монографии акад. В. А. Фока «Теория пространства, времени и тяготения» [7] и «Лекций по теории относительности» акад. Л. И. Мандельштама [8]. В полном объеме эти книги вряд ли доступны студентам младших курсов, но многие принципиальные вопросы изложены в них с исключительной ясностью и глубиной на вполне доступном для студентов уровне.

## **1.1 Принцип относительности в классической механике. Преобразования Галилея**

### **1.1.1 Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности Галилея**

Законы физики должны обладать определенной глубиной и общностью. Одно из проявлений этой общности — независимость физических законов от таких частных обстоятельств, как положение в пространстве и выбор момента времени. Независимость законов физики от положения в пространстве и времени обеспечивает воспроизводимость лабораторных опытов, подтверждающих эти законы. Независимость физических явлений от места и момента времени отражает однородность и изотропность физического пространства и однородность времени. Формирование ясных представлений об этих фундаментальных свойствах симметрии пространства и времени обычно не вызывает затруднений.

Значительно труднее согласовать с нашей интуицией, сформировавшейся на основе повседневного опыта, ограниченную независимость законов физики от состояния движения. Эта независимость заключается в равноправии (эквивалентности) всех инерциальных систем отсчета — законы физики должны быть одинаковы

во всех таких системах. Эквивалентность инерциальных систем отсчета означает, что равномерное прямолинейное движение замкнутой системы материальных тел не влияет на ход процессов, происходящих внутри физической системы. Находясь в закрытой лаборатории, никакими опытами невозможно установить, покоится лаборатория относительно выбранной инерциальной системы отсчета или движется относительно нее с постоянной скоростью. Подчеркнем, что движение лаборатории с ускорением (в частности, вращение) сразу обнаруживает себя по влиянию на многие явления, наблюдаемые в такой лаборатории.

Утверждение о физической эквивалентности всех инерциальных систем отсчета составляет содержание *принципа относительности*. Принцип относительности впервые был сформулирован Галилеем для механических явлений. До создания теории относительности считалось, что принцип относительности справедлив только для механических явлений, и не распространяется на электромагнитные (в частности оптические) явления. Обобщение принципа относительности, сформулированное А. Эйнштейном в 1905 году, заключается в распространении его на любые явления. Эйнштейновский принцип относительности подтверждается всей совокупностью наших знаний о природе.

### 1.1.2 Математическое выражение принципа относительности классической механики

Многие законы физики формулируются при помощи дифференциальных уравнений, вид которых не зависит от начального состояния физической системы. Такими, в частности, являются уравнения движения классической механики (второй закон Ньютона). Из принципа относительности вытекает, что математическая форма таких законов должна быть одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Другими словами, уравнения законов должны сохранять свой вид при переходе от описания явления в одной инерциальной системе отсчета к другой. Об этом требовании говорят как об инвариантности уравнений относительно преобразования к другой системе отсчета.

Рассмотрим описание некоторого явления в двух инерциальных системах отсчета: в системе  $K$  и в системе  $K'$ , движущейся относительно  $K$  с постоянной по величине и направлению скоростью  $\vec{v}$ . Условимся направления одноименных осей координат в системах  $K$  и  $K'$  выбирать совпадающими, а оси  $Ox$  и  $Ox'$  направим вдоль вектора скорости  $\vec{v}$  системы  $K'$  относительно  $K$  (рис. 1.1).

Примем за начало отсчета времени  $t = 0$  тот момент, когда точка  $O'$  совпадает с  $O$ , т. е. когда координатные оси двух систем отсчета совпадают. Положение некоторой материальной точки (частицы) определяется координатами  $x, y, z$  и моментом времени  $t$  в системе отсчета  $K$  и координатами  $x', y', z'$  и временем  $t'$  в системе отсчета  $K'$ . В общем случае совокупность трех пространственных координат  $x, y, z$  и времени  $t$  характеризует некоторое *событие*. В выбранной системе отсчета любое событие, независимо от того в чем именно оно заключается (короткая вспышка света, столкновение двух частиц и т.п.) определяется местом, где это событие произошло, и моментом времени, когда оно произошло. Любое физическое явление представляет собой некоторую совокупность элементарных событий. Поэтому описание отдельного события служит основой для описания любого явления.

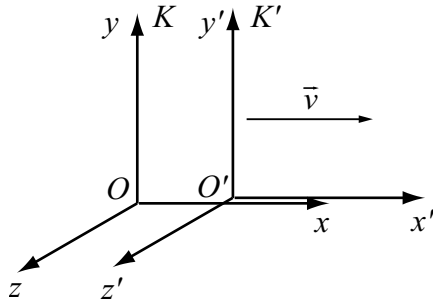


Рис. 1.1: Система отсчета  $K'$  движется относительно  $K$  с постоянной по величине и направлению скоростью  $\vec{v}$  вдоль оси  $Ox$

### Классические представления о пространстве и времени. Преобразования Галилея

Поставим вопрос о том, как связаны между собой координаты и время одного и того же события, определенные в двух разных системах отсчета  $K$  и  $K'$ . В классической дорелятивистской физике принималось как очевидный факт существование единого мирового времени  $t$ , одинакового для всех систем отсчета; поэтому по классическим представлениям для одного и того же события  $t = t'$ . В действительности такая возможность определять время наступления событий во всех системах отсчета по одним и тем же часам неявно связана, как будет показано ниже, с предположением о существовании сигналов, распространяющихся с бесконечно большой скоростью. Принципиальное отрицание такой возможности, т. е. отказ от единого мирового времени — это краеугольный камень в здании теории относительности.

Таким образом, согласно классическим представлениям о времени, если два события происходят одновременно с точки зрения некоторой системы отсчета, то эти события будут одновременными и для наблюдателя в любой другой системе отсчета. Точно так же промежуток времени между двумя событиями, в силу абсолютного характера времени, по классическим представлениям должен быть одинаковым во всех инерциальных системах отсчета. Аналогично, в дорелятивистской физике предполагалось (вернее, считалось очевидным), что пространственное расстояние между двумя точками, измеренное в один и тот же момент времени, во всех системах отсчета должно быть одинаковым, т. е. абсолютным, не зависящим от системы отсчета.

На основе этих классических представлений о пространстве и времени сразу устанавливается вид преобразования, связывающего координаты  $x, y, z$  и время  $t$  некоторого события, зафиксированные в системе отсчета  $K$ , с координатами и временем  $x', y', z', t'$  этого же события, зафиксированными в другой системе отсчета  $K'$ , движущейся относительно  $K$  с постоянной скоростью  $\vec{v}$  в направлении оси  $Ox$ :

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (1.1)$$

Эти простые формулы носят название *преобразований Галилея*. Вводя радиусы-векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$ , указывающие в каждой из систем  $K$  и  $K'$  положение той

точки, в которой произошло рассматриваемое событие, можно записать первые три соотношения преобразований Галилея (1.1) в векторном виде:  $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t$ .

Из преобразований Галилея сразу следует *классический закон преобразования скорости* частицы при переходе от одной системы отсчета к другой. Пусть радиус-вектор  $\vec{r}(t)$  задает положение движущейся частицы в системе  $K$ , а  $\vec{r}'(t')$  — положение той же частицы в системе  $K'$ . Тогда  $\vec{u} = d\vec{r}/dt$  — скорость этой частицы относительно системы  $K$ , а  $\vec{u}' = d\vec{r}'/dt'$  — скорость той же частицы относительно системы отсчета  $K'$ . Так как  $t = t'$ , скорость в системе  $K'$  можно находить дифференцированием соответствующего радиуса-вектора частицы  $\vec{r}'$  по  $t$ , а не по  $t'$ :  $\vec{u}' = d\vec{r}'/dt$ . Поэтому почленным дифференцированием уравнений (1.1), выражающих преобразования Галилея, получаем

$$u_x = u'_x + v, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z. \quad (1.2)$$

Таким образом, преобразование скорости частицы при переходе от одной системы отсчета к другой в классической механике сводится просто к векторному сложению относительной ( $\vec{u}' = d\vec{r}'/dt'$ ) и переносной ( $\vec{v}$ ) скоростей:  $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$ .

### **Инвариантность уравнений движения классической механики относительно преобразований Галилея**

Легко видеть, что уравнения второго закона Ньютона

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z \quad (1.3)$$

не меняют своего вида при переходе от системы отсчета  $K$  к системе  $K'$  по формулам (1.1), т. е. уравнения движения тела в классической механике инвариантны относительно преобразований Галилея. Действительно, дифференцируя по времени почленно уравнения (1.2) закона преобразования скорости, получаем, что ускорение частицы одинаково в системах отсчета  $K$  и  $K'$ :

$$\ddot{x} = \ddot{x}', \quad \ddot{y} = \ddot{y}', \quad \ddot{z} = \ddot{z}', \quad (1.4)$$

т. е. левые части уравнений движения (1.3) не изменяются. Правые части также остаются без изменения при переходе от  $K$  к  $K'$ , так как в классической механике силы, действующие на частицы, — это силы взаимодействия с другими частицами, и они зависят лишь от относительного расположения частиц и от их относительных скоростей. Но относительные положения частиц и их относительные скорости, по классическим представлениям о пространстве и времени, остаются неизменными при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Таким образом, уравнения классической механики инвариантны относительно преобразований Галилея. Иначе говоря, законы классической механики удовлетворяют принципу относительности, если переход от одной инерциальной системы отсчета к другой математически производится с помощью преобразований Галилея (1.1), которые соответствуют классическим представлениям об абсолютном характере времени и пространственных расстояний.

*Рекомендуемая литература:* [1], стр. 88–94, [2], стр. 511–514, [3], стр. 28–36, [7], стр. 32–34.

### 1.1.3 Принцип относительности и электродинамика. Опыт Майкельсона и Морли

Во второй половине 19 столетия Максвеллом были сформулированы законы электродинамики, т. е. законы взаимодействия заряженных частиц и законы распространения электромагнитных волн. Из уравнений Максвелла следовало, в частности, возможность существования электромагнитных волн, для распространения которых никакая среда не нужна. Электромагнитные волны в вакууме распространяются с конечной скоростью  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ , где  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — соответственно электрическая и магнитная постоянные, входящие в уравнения Максвелла в качестве коэффициентов. Эта скорость приблизительно равна  $3 \cdot 10^8$  м/с и одинакова по всем направлениям. Совпадение теоретического значения  $c$  с измеренной ранее скоростью света навело Максвелла на мысль, что свет представляет собой разновидность электромагнитных волн. Таким образом было найдено решение центральной для оптики задачи о природе света.

Возникает вопрос: совместим ли принцип относительности, т. е. равноправие всех инерциальных систем отсчета, с законами электродинамики?

Следует различать два аспекта поставленного вопроса.

1) Что говорит *опыт* о распространении принципа относительности на электромагнитные явления? Протекают ли электромагнитные и оптические процессы (т. е. взаимодействие зарядов и токов, распространение света) одинаково во всех инерциальных системах отсчета, или же равномерное прямолинейное движение лаборатории, не оказывая влияния на механические явления, сказывается на электромагнитных и оптических явлениях?

Вся совокупность известных экспериментальных данных говорит о том, что принцип относительности распространяется *на все физические явления*: как механические, так и электромагнитные, и оптические процессы протекают совершенно одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Исторически наиболее важные опыты, подтверждающие универсальный характер принципа относительности, — это оптический опыт Майкельсона и Морли с интерферометром специальной конструкции (см. [1], [4]) и электродинамический опыт Трутона и Нобля с заряженным конденсатором, подвешенным на упругой нити (конец 19 века). Не углубляясь здесь в детали, отметим, что эти опыты были поставлены специально для обнаружения влияния движения находящейся на Земле лаборатории относительно «неподвижного эфира» (т. е. относительно физически выделенной инерциальной системы отсчета) на распространение света и на взаимодействие электрических зарядов. Во всех этих опытах был получен *отрицательный результат*, т. е. никакого влияния движения системы на оптические и электромагнитные явления обнаружено не было.

2) Удовлетворяют ли принципу относительности *уравнения электродинамики*, т. е. остаются ли они неизменными при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой подобно тому, как ведут себя уравнения динамики Ньютона?

Простые соображения показывают, что уравнения электродинамики не удовлетворяют принципу относительности, если переход от одной системы отсчета к другой производить по формулам преобразований Галилея (1.1). В самом деле, скорость распространения электромагнитных волн (света) в вакууме согласно уравнениям Максвелла одинакова по всем направлениям и равна электродинамиче-



ской постоянной  $c$ . Но, с другой стороны, в соответствии с классическим законом преобразования скорости (1.2), вытекающим из преобразований Галилея, скорость света по всем направлениям может быть равна  $c$  только в одной инерциальной системе отсчета (системе «неподвижного эфира»). Например, если скорость света равна  $c$  в системе отсчета  $K$ , то в системе отсчета  $K'$  свет должен распространяться в положительном направлении оси  $Ox$  со скоростью  $c - v$ , а в отрицательном — со скоростью  $c + v$ .

Таким образом, между электродинамикой и классической механикой имеют место определенные противоречия: уравнения ньютоновской механики удовлетворяют принципу относительности при переходе от одной системы отсчета к другой по преобразованиям Галилея (1.1), а уравнения электродинамики и оптики — не удовлетворяют, хотя опыт говорит о том, что принцип относительности выполняется для любых явлений. На рубеже 19 и 20 столетий физика переживала глубокий кризис. Многочисленные попытки «подправить» уравнения сравнительно молодой в те дни электродинамики Максвелла с тем, чтобы обеспечить их инвариантность относительно преобразований Галилея, успехом не увенчались, ибо все такие попытки приводили к предсказанию явлений, которые на опыте не наблюдались. Борьба идей в поисках выхода из тупика оставила наиболее глубокий след в оптике, поэтому знакомство с историей вопроса разумно отложить до изучения курса оптики.

Единственно возможный выход из создавшегося в физике противоречивого положения был найден в 1905 г. А. Эйнштейном. Разрешить возникшие противоречия удалось только ценой отказа от казавшихся незыблемыми классических представлений о пространстве и времени, сложившихся на основе многолетнего опыта наблюдений за сравнительно медленными движениями. Отказ от преобразований Галилея и введение вместо них новых преобразований — преобразований Лоренца, оставляющих неизменными при переходе от одной системы отсчета к другой уравнения электродинамики, а не уравнения механики, потребовал пересмотра и уточнения законов классической механики, а главное — потребовал коренной ломки сложившихся представлений о свойствах пространства и времени.

*Рекомендуемая литература:* [1], стр. 353–360, [3], стр. 26–29, [4], стр. 9–12, [7], стр. 29–32.

## 1.2 Постулаты теории относительности

Частная теория относительности базируется не на гипотезах, а на твердо установленных на опыте принципах. В ее основе лежат два принципа, или постулата, которые нужно рассматривать как обобщение большого числа экспериментальных фактов:

- принцип относительности, распространенный на все явления;
- принцип существования предельной скорости распространения взаимодействий.

Эти принципы содержат настолько сильные и общие утверждения, что едва ли можно говорить о каких-либо «решающих» опытах, доказывающих их спра-

ведливость. Убеждение в справедливости этих принципов зиждется на бесчисленных опытных проверках следствий из основанной на них теории относительности. Большую роль в становлении принципов сыграли уже упоминавшиеся выше оптические опыты с движущимися телами и попытки теоретической интерпретации их результатов. Но наиболее убедительны в этом отношении опыты, относящиеся к физике высоких энергий, в частности, опыты по изучению движения быстрых заряженных частиц в ускорителях, ядерные реакции и превращения элементарных частиц. В таких явлениях эффекты теории относительности проявляются как основные, а не как малые поправки, наблюдаемые на пределе экспериментальных возможностей. В дальнейшем будет рассмотрен ряд подобных примеров.

Первый постулат — принцип относительности — представляет собой, как уже отмечалось выше, утверждение об эквивалентности всех инерциальных систем отсчета. Равноправие инерциальных систем распространяется на все явления, на всю физику. Напомним, что во второй половине 19 столетия считалось, что принцип относительности справедлив только для механических явлений, а в электродинамике и оптике никакого равноправия между инерциальными системами отсчета нет, так как согласно господствовавшей в то время точке зрения скорость света равна  $c$  только относительно «светоносного эфира», т. е. относительно некоторой выделенной инерциальной системы отсчета. Такими представлениями руководствовались при постановке экспериментов для обнаружения «эфирного ветра» (т. е. движения земной лаборатории относительно «эфира»), которые неизменно давали отрицательный результат. С современной точки зрения сам такой ограниченный подход к трактовке принципа относительности представляется неудовлетворительным, так как противоречит концепции единства физики: в любом физическом явлении присутствуют элементы из разных «разделов» физики; никаких «чисто механических» явлений не существует. И если принцип относительности не распространить на всю физику, то он оказывается лишенным содержания.

Распространение принципа относительности на электромагнитные и оптические явления приводит к выводу о том, что скорость света (электромагнитных волн) в вакууме во всех инерциальных системах отсчета одинакова. Отсюда сразу видна необходимость радикального пересмотра классических представлений о пространстве и времени, так как основанный на них классический закон преобразования скорости (1.2) находится в противоречии с неизменностью скорости света.

Второй постулат, логически связанный с принципом относительности, утверждает, что любые взаимодействия между телами распространяются в пустоте с универсальной конечной скоростью, не зависящей от движения тел и равной скорости света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. В соответствии с первым постулатом эта скорость одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Она определяет тот минимальный промежуток времени, по истечении которого до тела может прийти первый сигнал, дающий знать об изменении, которое произошло с другим телом. Значение второго постулата связано с тем, что в определении релятивистских понятий, относящихся к пространству и времени, фундаментальную роль играет передача сигналов с предельной скоростью.

Передача сигналов в принципе возможна при помощи не только электромагнитных волн (света), но и волн другой природы. Теоретически мыслимо, хотя и практически неосуществимо, использование с этой целью гравитационных волн. В принципе не исключено открытие каких-либо новых полей, способных переда-

вать сигналы. Можно, наконец, представить себе передачу сигналов при помощи предельно быстрых частиц. Содержащийся во втором постулате принцип существования универсальной предельной скорости распространения взаимодействий утверждает наличие общего предела для скорости передачи каких-либо действий и сигналов, любых силовых полей независимо от их физической природы. Он придает скорости света в вакууме *универсальное значение*, не связанное с конкретным видом носителя сигнала — электромагнитными волнами, а отражающее некоторое общее, фундаментальное свойство пространства и времени. Очевидно, что второй постулат утверждает также, что невозможно движение тел со скоростью, превышающей предельную универсальную скорость  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

На первый взгляд может показаться, что утверждаемое вторым постулатом существование универсальной предельной скорости противоречит первому постулату о равноправии всех инерциальных систем. Действительно, скорости изменяются при переходе к другой системе отсчета. Поэтому скорость передачи взаимодействий, казалось бы, не может иметь одно и то же значение во всех системах отсчета. Изменение этой скорости при переходе в другую систему отсчета нарушало бы декларируемую первым постулатом эквивалентность всех инерциальных систем. Однако дело здесь не в несовместимости первого и второго постулатов друг с другом, а в их несовместимости с классическими представлениями об абсолютном характере времени и пространственных расстояний. Поэтому объединение этих постулатов в теории относительности потребовало коренного пересмотра основных классических понятий, относящихся к пространству и времени.

Отметим, что второй постулат находится в противоречии с принятым в классической механике способом описания взаимодействия материальных частиц, который неявно включает предположение о мгновенности распространения взаимодействий. В самом деле, в классической механике считается, что силы, действующие на каждую частицу со стороны остальных, зависят от положения частиц в этот же момент времени. Изменение положения какой-либо из частиц мгновенно отражается на остальных. Поэтому второй постулат теории относительности неизбежно требует пересмотра и уточнения законов механики.

Механика теории относительности переходит в классическую механику, основанную на мгновенности распространения взаимодействий, в предельном случае, когда скорости тел малы по сравнению со скоростью света  $c$ . В этом отношении новая — релятивистская — механика удовлетворяет *принципу соответствия*, согласно которому новая теория, приходящая на смену старой, должна сводиться к старой теории в той области явлений, где старая теория выдержала серьезную проверку на опыте. Только большой величиной скорости распространения взаимодействий объясняется тот факт, что для макроскопических тел часто достаточно точной оказывается классическая механика. В то время, когда создавалась теория относительности, ее экспериментальное подтверждение можно было найти лишь в исключительно тонких оптических и электродинамических опытах. В настоящее время в больших ускорителях заряженные частицы нередко разгоняются до скоростей, составляющих 99% и более от скорости света. Для расчета траекторий столь быстрых частиц пользоваться механикой Ньютона уже нельзя. В этом смысле можно сказать, что в наши дни теория относительности стала инженерной наукой.

*Рекомендуемая литература:* [7], стр. 29–32, [1], стр. 358–360.

## 1.3 Релятивистская кинематика. Измерение промежутков времени и расстояний.

### Синхронизация часов

Постулаты теории относительности требуют внесения радикальных изменений в основные физические понятия, относящиеся к пространству и времени. Прежде всего необходим глубокий *анализ основных измерительных операций*, определяющих пространственно-временные соотношения между событиями. Здесь мы лишь кратко остановимся на этом вопросе. Подробное и очень ясное обсуждение можно найти в книге акад. Л. И. Мандельштама «Лекции по теории относительности» [8], стр. 164–195.

Главное изменение, внесенное теорией относительности в постановку вопроса об измерительных операциях, состоит в том, что любое физическое понятие, относящееся к пространству и времени (например, одновременность событий) и любая измерительная операция (например, измерение промежутков времени и расстояний) *нуждается в определении*.

#### 1.3.1 Одновременность событий и измерение времени

Измерение времени может быть, в принципе, произведено при помощи любого периодического процесса. Наибольшей точностью в настоящее время обладают часы, основанные на использовании собственных колебаний молекул аммиака (молекулярные часы) или атомов цезия (атомные часы). Измерение времени, основанное на внутримолекулярных или атомных процессах, особенно удобно тем, что здесь природа предоставила нам, в силу тождественности атомов одного и того же изотопа, возможность иметь набор совершенно идентичных часов.

Измерение промежутка времени между событиями означает сравнение между собой показаний выбранных в качестве эталона часов в моменты наступления этих событий. Для этого прежде всего нужно установить *одновременность* рассматриваемого события с другим событием — прохождением стрелки часов через определенное деление. Таким образом, все наши суждения, в которых время играет какую-либо роль, по сути дела всегда есть суждения об одновременных событиях.

Но что значит, что два события одновременны? Понятие одновременности событий, происходящих в одном и том же месте, «рядом», по-видимому не нуждается в определении. Поэтому для измерения промежутка времени между двумя событиями, происходящими в одном месте, достаточно иметь в этом же месте часы. Но как быть с удаленными событиями, происходящими в разных местах? Для измерения промежутка времени между такими событиями нужно иметь в тех точках, где они происходят, синхронно идущие идентичные часы.

Как узнать, что находящиеся в разных точках  $A$  и  $B$  часы идут синхронно, или, что то же самое, что два определенных события в точках  $A$  и  $B$  происходят одновременно? «Узнать» это нельзя, нужно сначала дать *определение*, что такое одновременность для событий, происходящих в пространственно удаленных точках. Без такого определения невозможно сравнивать по времени события, происходящие в различных точках.

Эйнштейновское определение одновременности событий основано на независимости скорости сигнала от направления. Пусть из точки  $A$  в момент времени  $t_1$  по часам в  $A$  отправляется сигнал (рис. 1.2). Пусть момент прихода сигнала в точку  $B$  и его отражения назад есть  $t'$  по часам в точке  $B$ . Наконец, пусть отраженный сигнал приходит в точку  $A$  в момент  $t_2$  по часам в  $A$ . Тогда *по определению* часы в точках  $A$  и  $B$  идут синхронно, если  $t' = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ .

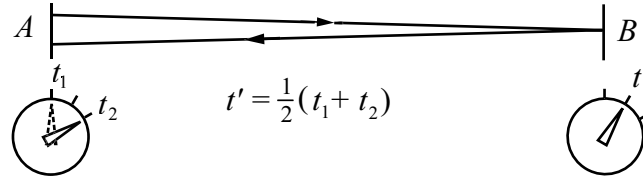


Рис. 1.2: К определению понятия одновременности событий

Подчеркнем, что в нерелятивистской физике принималось как нечто само собой разумеющееся существование единого мирового времени, не зависящего от системы отсчета, и потому неявно допускалось, что понятие одновременности событий, происходящих в разных точках пространства, не нуждается в определении, и любой способ синхронизации часов (путем световых сигналов или путем перевозки хронометров) должен дать одно и то же. Мы увидим, что на самом деле это не так. Если часы в точках  $A$  и  $B$  синхронизированы путем световых сигналов, как было описано выше, и хронометр, сверенный с часами в  $A$ , перевозится в точку  $B$ , то его показания, вообще говоря, не совпадут с показаниями находящихся там часов, а будут зависеть от скорости перевозки. Совпадение будет лишь при бесконечно малой скорости перевозки хронометра.

Вводимая по определению процедура синхронизации часов должна удовлетворять ряду требований, в частности, должно выполняться свойство транзитивности: если выполнена синхронизация часов, находящихся в точках  $A$  и  $B$ , и также часов в точках  $A$  и  $C$ , то часы в точках  $B$  и  $C$  автоматически должны оказаться синхронизированными между собой.

### 1.3.2 Измерение пространственных расстояний

Как в теории относительности ввести процедуру измерения расстояний между точками пространства? С точки зрения релятивистских постулатов операцию измерения расстояний разумно по определению выбрать на основе «радиолокационного» способа: из некоторого пункта посылаются световые или радиосигналы, которые после отражения от наблюдаемого предмета возвращаются в точку отправления. При этом измеряется время прохождения сигнала туда и обратно по часам, связанным с радиолокатором. Расстояние  $l$  до предмета получают, умножая одинаковую по всем направлениям (универсальную) скорость  $c$  на половину времени прохождения сигнала туда и обратно:  $l = \frac{1}{2}c(t_2 - t_1)$ .

Если речь идет об измерении расстояния до движущегося относительно радиолокатора объекта, т. е. измеряемое расстояние  $l(t)$  изменяется со временем, то возникает вопрос: к какому моменту времени относится полученное радиолокационным методом значение расстояния? Здесь, так же как и в вопросе синхронизации

неподвижных часов, следует принять, что измеренные значения координат и расстояния  $l = \frac{1}{2}c(t_2 - t_1)$  относятся к моменту времени  $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$  по часам радиолокатора, где  $t_1$  есть момент отправления сигнала,  $t_2$  — момент возвращения отраженного сигнала. Это определение также основывается на независимости скорости сигнала от направления.

В принципиальном отношении такой способ важен потому, что в нем измерение расстояний сводится к измерению времени, и отпадает необходимость в отдельном эталоне длины. На этой основе в метрологии в конце 1980-х годов перешли от существовавших ранее независимых эталонов длины и времени к единому эталону. При переходе к единому эталону длины и времени интерференционные методы измерения расстояний, используемые в метрологии, принципиально перестали отличаться от описанного выше «радиолокационного» метода. Длина волны излучения эталонного источника лежит в основе единицы длины, а его частота (период) — в основе определения единицы времени. Подчеркнем, что при переходе к единому эталону числовое значение скорости света  $c$  получается не как результат измерений (неизбежно содержащий некоторую погрешность), а вводится по определению (т. е. *точно*) на основе международного соглашения. Разумеется, это значение выбрано так, чтобы обеспечивалась преемственность с прежними эталонами длины и времени.

*Рекомендуемая литература:* [8], стр. 164–195.

## 1.4 Преобразование промежутков времени и расстояний

До сих пор все рассуждения, касающиеся одновременности событий, измерения промежутков времени и расстояний, относились к какой-либо одной инерциальной системе отсчета. Далее события, промежутки времени и расстояния будут рассмотрены с точки зрения разных систем отсчета.

### 1.4.1 Относительность одновременности

В нерелятивистской физике понятие одновременности событий, в соответствии с классическими представлениями о пространстве и времени, предполагалось абсолютным, не зависящим от системы отсчета: если два события происходят одновременно для какого-нибудь наблюдателя, то они будут одновременными и для любого другого. Однако это утверждение об абсолютном характере одновременности основано на предположении о существовании сигналов, распространяющихся мгновенно, с бесконечно большой скоростью.

Второй постулат теории относительности, утверждающий существование конечной предельной скорости сигналов, приводит к тому, что в релятивистской кинематике понятие одновременности событий принимает относительный характер. Утверждение, что два пространственно удаленных события происходят одновременно, имеет смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится.

В том, что одновременные в некоторой системе отсчета пространственно удаленные события уже не являются одновременными с точки зрения другой системы отсчета, можно убедиться с помощью следующего мысленного эксперимента.

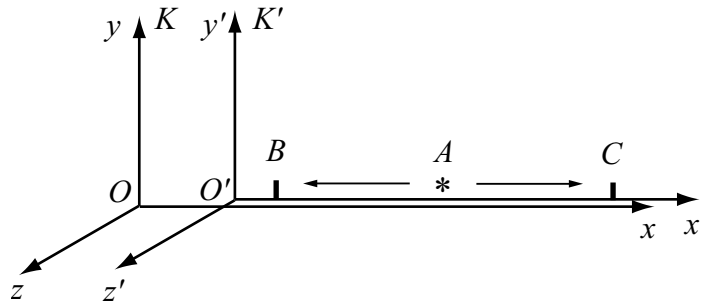


Рис. 1.3: Относительный характер одновременности событий

Рассмотрим опять две инерциальные системы отсчета  $K$  и  $K'$ , причем  $K'$  движется относительно  $K$  в положительном направлении оси  $Ox$ . Пусть из некоторой точки  $A$  на оси  $Ox'$  одновременно отправляются сигналы во взаимно противоположных направлениях (рис. 1.3). Рассмотрим с точки зрения системы  $K'$  приход этих сигналов в точки  $B$  и  $C$  системы  $K'$ , равноудаленные от точки  $A$  (можно считать, что в этих точках системы  $K'$  находятся приемники сигналов). Очевидно, что сигналы достигнут точек  $B$  и  $C$  одновременно по часам системы  $K'$ , так как преодолевают на пути к  $B$  и  $C$  одинаковые расстояния. Легко видеть, однако, что эти же два события, а именно достижение сигналами приемников в точках  $B$  и  $C$ , одновременные в  $K'$ , отнюдь не будут одновременными для наблюдателя в системе  $K$ . В самом деле, согласно принципу относительности, скорость сигналов в  $K$  также не зависит от направления, но точка  $B$  движется относительно  $K$  вправо, навстречу посланному в нее сигналу, а точка  $C$  движется по направлению от посланного в нее сигнала. Поэтому с точки зрения наблюдателя в системе  $K$  сигналу, распространяющемуся с одной и той же конечной скоростью, придется на пути в  $B$  преодолевать меньшее расстояние, нежели на пути в  $C$ . Следовательно, в системе  $K$  сигнал в точку  $B$  приходит раньше, чем в  $C$ . Эти события, будучи одновременными в  $K'$ , не одновременны в  $K$ , что свидетельствует об *относительном характере* понятия одновременности событий.

## 1.4.2 Преобразование промежутков времени

Пусть два события происходят с точки зрения некоторой системы отсчета, скажем, системы  $K'$ , в одном и том же месте, и промежуток времени между ними равен  $\tau_0$  по часам системы отсчета  $K'$ . Этот промежуток времени  $\tau_0$  называется *собственным* временем между данными событиями.<sup>1</sup> Поставим вопрос: каким будет промежуток времени между этими же событиями, если его измерять в системе отсчета  $K$ , относительно которой  $K'$  движется со скоростью  $v$ ?

<sup>1</sup>В общем случае собственным временем для некоторой пары событий будем называть промежуток времени, измеренный в той системе отсчета, где эти события происходят в одном месте. Отметим, что не для любой пары событий можно найти такую систему отсчета.

Отметим, что собственный промежуток времени  $\tau_0$  измеряется по одним и тем же часам (в системе  $K'$  оба события происходят в одной и том же месте), но в системе  $K$  эти события происходят в разных местах, и для измерения промежутка времени между ними в этой системе отсчета необходимо пользоваться показаниями разных часов, находящихся в тех точках, где происходят эти события (часы, разумеется, должны быть предварительно синхронизированы).

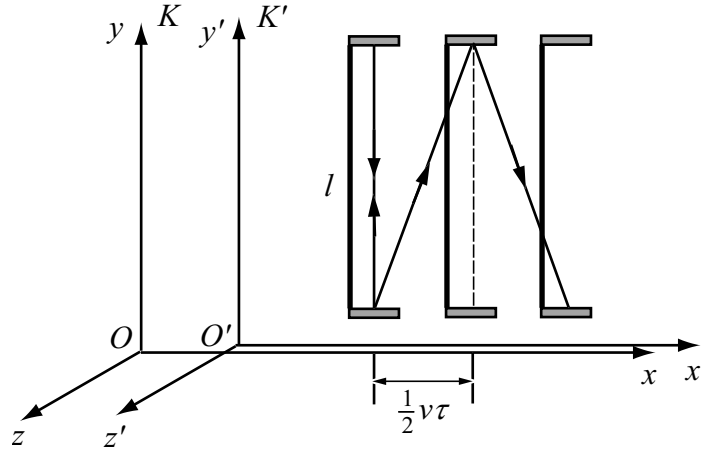


Рис. 1.4: К выводу преобразования промежутков времени

Ответ на поставленный выше вопрос о преобразовании промежутков времени можно получить, исходя непосредственно из постулатов теории относительности. Рассмотрим следующий мысленный опыт со «световыми часами», устроенными следующим образом (рис. 1.4). На концах стержня длиной  $l$  закреплены два параллельных зеркала. Между зеркалами движется короткий световой импульс, поочередно отражаясь от каждого из зеркал. Пусть этот прибор неподвижен в системе  $K'$ , а его стержень расположен перпендикулярно скорости  $\vec{v}$  системы  $K'$  относительно  $K$ . Рассмотрим один цикл таких часов, т. е. выход светового импульса от нижнего зеркала и его возвращение после отражения от верхнего зеркала, с точки зрения каждой из систем отсчета. В системе  $K'$  оба рассматриваемые события происходят в одной и том же месте, поэтому промежуток времени между ними в  $K'$  равен собственному времени  $\tau_0$ . Так как скорость сигнала равна  $c$ , то  $\tau_0 = 2l/c$ . С точки зрения системы  $K$  часы находятся в движении, и световой импульс движется между зеркалами зигзагообразно (см. рис. 1.4). Свет при этом проходит больший путь за один цикл, и, следовательно, промежуток времени  $\tau$  между теми же событиями, измеренный в системе  $K$ , больше, чем в  $K'$ :  $\tau > \tau_0$ . В этом рассуждении мы опираемся на то, что, согласно второму постулату, скорость света  $c$  одинакова в системах отсчета  $K'$  и  $K$ .

Найдем количественную связь  $\tau$  и  $\tau_0$ . Как видно из рис. 1.4, пройденный светом за половину одного цикла путь равен  $\sqrt{l^2 + (v\tau/2)^2}$ , и для определения  $\tau$  можно написать следующее уравнение:

$$c\tau = 2\sqrt{l^2 + (v\tau/2)^2}, \quad \text{откуда} \quad \tau = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.5)$$



Но, как было отмечено выше,  $2l/c = \tau_0$ . Поэтому из (1.5) получаем искомую связь между  $\tau$  и  $\tau_0$ :

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.6)$$

Таким образом, величина промежутка времени между событиями зависит от системы отсчета, в которой она измеряется, т. е. представляет собой величину относительную. Так как  $\tau > \tau_0$  при любой  $v \neq 0$ , то собственное время всегда меньше, чем промежуток времени между этими же событиями, измеренный в любой другой системе отсчета. Этот кинематический релятивистский эффект называют замедлением, или «растяжением», времени. С точки зрения наблюдателя  $K$  идентичные по устройству движущиеся часы (т. е. часы в  $K'$ ) идут медленнее, чем его собственные. Речь здесь идет о сравнении показаний одних и тех же движущихся часов с показаниями идентичных, но разных (находящихся в разных точках) неподвижных часов. Синхронизированные для неподвижного в  $K$  наблюдателя, эти часы уже не будут синхронизированы для движущегося (т. е. находящегося в  $K'$ ) наблюдателя. Это отсутствие синхронизации между часами, находящимися в разных системах отсчета, отражает относительный характер одновременности событий.

Подчеркнем, что выражаемый формулой (1.6) эффект замедления времени связан с тем, что скорость света имеет одно и то же значение во всех системах отсчета.

Рассмотренный релятивистский эффект замедления времени является *взаимным*, как того требует принцип относительности, т. е. постулат о равноправии инерциальных систем отсчета  $K$  и  $K'$ : с точки зрения наблюдателя в системе  $K'$  медленнее идут часы, связанные с системой  $K$ .

Отметим, что в приведенных выше рассуждениях длину  $l$  соединяющего зеркала стержня, ориентированного перпендикулярно относительной скорости двух систем отсчета  $K$  и  $K'$ , мы считали одинаковой в обеих системах отсчета. Если предположить, что это не так, то можно сразу прийти к противоречию с равноправием систем  $K$  и  $K'$ . В самом деле, рассмотрим следующий мысленный опыт. Расположим вдоль оси  $Oy'$  системы  $K'$  жесткий стержень, длина которого в этой системе равна  $l$ , и вдоль оси  $Oy$  системы  $K$  расположим точно такой же стержень, т. е. длина этого стержня равна  $l$  в системе  $K$ . В некоторый момент ( $t = 0$ ) эти стержни оказываются рядом, и представляется возможность сравнить их длины непосредственно — конец одного из стержней может сделать метку на другом стержне. Совпадет ли эта метка с концом стержня? Принцип относительности дает положительный ответ на этот вопрос: метка совпадет с концом стержня, т. е. длина стержня в направлении, перпендикулярном относительной скорости двух систем отсчета  $K'$  и  $K$ , одинакова в обеих системах. Если бы такого совпадения не было, то один из стержней оказался бы длиннее другого с точки зрения обеих систем отсчета, что противоречит принципу относительности.

### 1.4.3 Преобразование пространственных расстояний

Покажем теперь, что длина твердого стержня, расположенного вдоль относительной скорости систем отсчета  $K$  и  $K'$ , будет разной в этих системах отсчета. Рассмотрим следующий мысленный опыт, схема которого показана на рис. 1.5.

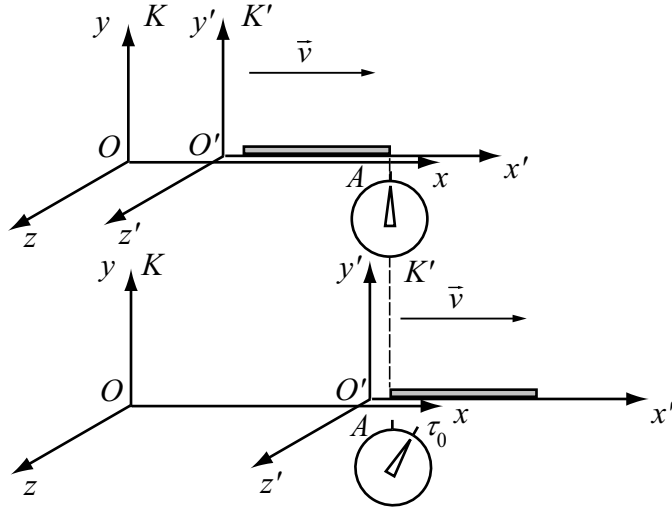


Рис. 1.5: К выводу преобразования пространственных расстояний

Пусть жесткий стержень покоится в системе отсчета  $K'$ . Его длину, измеренную в этой системе отсчета, называют *собственной длиной*, или длиной покоя. Обозначим ее  $l_0$ , а длину в системе  $K$ , относительно которой стержень движется параллельно самому себе со скоростью  $v$ , обозначим  $l$ . Найдем связь между  $l$  и  $l_0$ . Для этого рассмотрим два события: а) прохождение начала стержня мимо точки  $A$  на оси  $Ox$  системы  $K$ , в которой находятся часы, и б) прохождение конца стержня мимо этой же точки. В системе отсчета  $K$  эти события происходят в одном месте — в точке  $A$ . Поэтому промежуток времени между ними в этой системе отсчета  $K$  является собственным временем  $\tau_0$  и измеряется по одним и тем же часам, находящимся в точке  $A$ . Относительно системы отсчета  $K$  стержень движется со скоростью  $v$ . Умножив эту скорость на промежуток времени  $\tau_0$ , получим длину стержня  $l$  в системе  $K$ :  $l = v\tau_0$ .

Но с точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K'$  точка  $A$  движется вдоль неподвижного стержня влево с такой же по модулю скоростью  $v$ . Поэтому для длины стержня  $l_0$  в системе  $K'$  можно написать соотношение  $l_0 = v\tau$ , где  $\tau$  есть промежуток времени между теми же событиями а) и б), измеренный по часам в системе отсчета  $K'$ . Согласно формуле (1.6) промежуток времени  $\tau$  связан с собственным временем  $\tau_0$  между теми же событиями соотношением  $\tau = \tau_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Тогда, разделив почленно соотношение  $l = v\tau_0$  на  $l_0 = v\tau$ , находим

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (1.7)$$

Мы приходим к выводу, что в общем случае длина стержня, а тем самым и пространственное расстояние между точками, зависит от системы отсчета, в которой производится измерение, т. е. расстояние в релятивистской механике представляет собой величину относительную.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Для наглядности описанный здесь мысленный эксперимент можно представить себе как измерение длины поезда  $l$  наблюдателем с часами, который находится на платформе в точке  $A$ , и двумя наблюдателями в поезде. Наблюдатель на платформе находит длину поезда, умножая скорость поезда на промежуток времени  $\tau_0$ , в течение которого поезд проходит мимо него. Это время он из-

Длина стержня будет наибольшей при измерении в той системе отсчета, где стержень покоится (собственная длина). Движущиеся относительно наблюдателя тела сокращаются в направлении своего движения. Этот кинематический релятивистский эффект называют «лоренцевым сокращением» (сокращением Лоренца — Фитцджеральда). Лоренцево сокращение движущихся тел отражает относительный характер расстояния между пространственными точками в теории относительности, т. е. зависимость результатов измерения расстояния от системы отсчета, в которой это измерение производится. Подчеркнем, что лоренцево сокращение представляет собой чисто кинематический эффект зависимости результатов измерений от системы отсчета: оно не связано с какими-либо явлениями или процессами в самом стержне (вроде появления каких-либо внутренних напряжений) при переходе в движущуюся систему отсчета.

В полном соответствии с принципом относительности эффект сокращения длины стержня является взаимным: если такой же стержень покоится в системе отсчета  $K$ , то длина стержня в этой системе равна собственной длине  $l_0$ , а его длина  $l$  с точки зрения движущейся относительно стержня системы отсчета  $K'$  будет меньше в соответствии с формулой (1.7).

Ввиду важности закона преобразования длины для дальнейшего изложения, приведем еще один простой вывод формулы (1.7) лоренцева сокращения из постулатов теории относительности. Возможно, некоторым читателям он представится менее искусственным по сравнению с приведенным выше. Рассмотрим опять мысленный эксперимент с такими же «световыми часами», как и при выводе закона преобразования промежутков времени, но теперь расположим стержень часов вдоль направления скорости системы  $K'$  относительно системы  $K$ , т. е. вдоль оси  $Ox'$ . Соединяющий зеркала стержень покоится в  $K'$ , и его длина в этой системе отсчета (собственная длина) равна  $l_0$ . Пусть  $\tau_0$  — промежуток времени по часам системы  $K'$  между выходом светового импульса из начала стержня и возвращением его после отражения от зеркала на другом конце. Оба рассматриваемые события происходят в  $K'$  в одном месте, поэтому  $\tau_0$  — это собственное время. Легко видеть, что  $c\tau_0 = 2l_0$ . Обозначим через  $\tau$  промежуток времени между этими же событиями, измеренный по часам системы  $K$ , относительно которой стержень часов движется. Он связан с собственным временем  $\tau_0$  соотношением (1.6). Искомую длину стержня в системе  $K$  обозначим через  $l$ .

Промежуток времени  $\tau$  можно представить как  $\tau_1 + \tau_2$ , где  $\tau_1$  — время движения светового импульса вперед (от начала стержня к зеркалу на конце), а  $\tau_2$  — назад. За время  $\tau_1$  относительно системы  $K$  стержень пройдет расстояние  $v\tau_1$ , так что на пути вперед до правого конца стержня свет должен преодолеть в системе  $K$  расстояние  $l + v\tau_1$ , где  $l$  — длина стержня в системе  $K$ . Так как свет проходит это расстояние за время  $\tau_1$ , а скорость света в  $K$  (как и в любой другой системе) равна  $c$ , то можно написать

$$l + v\tau_1 = c\tau_1, \quad \text{откуда} \quad \tau_1 = \frac{l}{c - v}. \quad (1.8)$$

Аналогичное рассуждение для времени движения импульса назад дает следующее соотношение:

$$l - v\tau_2 = c\tau_2, \quad \text{откуда} \quad \tau_2 = \frac{l}{c + v}. \quad (1.9)$$

---

меряет по одним часам. Для нахождения длины поезда  $l_0$  в системе отсчета, связанной с поездом, нужно скорость  $v$  умножить на промежуток времени  $\tau$  между прохождением головы и хвоста поезда мимо находящейся на платформе точки  $A$ . Ясно, что для измерения  $\tau$  нужны часы и в голове, и в хвосте поезда, синхронизированные друг с другом.

Таким образом,

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = l \left( \frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) = \frac{2l}{c} \frac{1}{(1-v^2/c^2)}. \quad (1.10)$$

Но, с другой стороны, в соответствии с релятивистским замедлением времени,

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2l_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (1.11)$$

Приравняв правые части выражений (1.10) и (1.11), еще раз получаем релятивистскую формулу сокращения длины (1.7):

$$l = l_0 \sqrt{1-v^2/c^2}.$$

#### 1.4.4 Экспериментальные подтверждения релятивистских кинематических эффектов

В качестве непосредственного экспериментального подтверждения рассмотренных выше релятивистских кинематических эффектов замедления времени и сокращения длины можно привести, например, опыты Дарбина, Лоара и Хевенса (США, 1952 г.), в которых изучался распад движущихся  $\pi^+$ -мезонов (пионов). Среднее время жизни покоящегося пиона  $\tau_0$  равно  $2,5 \cdot 10^{-8}$  с. Если бы замедления времени не было, то движущийся мезон при скорости  $v$ , даже близкой к предельной скорости  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, проходил бы до распада в среднем расстояние всего  $v\tau_0 \approx c\tau_0 = 7,5$  м. В описываемых опытах приемник  $\pi^+$ -мезонов находился на расстоянии около 100 м от источника, в котором пионы образовывались при бомбардировке мишени пучком протонов высокой энергии, выходящим из ускорителя. Получаемые таким способом  $\pi^+$ -мезоны движутся со скоростью  $v$ , очень близкой к скорости света: для них  $v/c = 1 - 5 \cdot 10^{-5}$ . Благодаря релятивистскому замедлению времени среднее время жизни такого быстрого пиона в лабораторной системе отсчета

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{10^{-2}} = 100 \tau_0$$

оказывается в 100 раз больше, чем время жизни покоящегося пиона. Поэтому расстояние, проходимое пионами до распада, по лабораторным масштабам составляет  $v\tau \approx c\tau = 100 \tau_0 = 750$  м. Измерение этого расстояния в упоминаемых опытах дало хорошее согласие с предсказаниями теории относительности. Замечательно, что теория позволяет сделать такое предсказание несмотря на то, что нам ничего не известно о причинах распада пиона. Универсальность предсказаний теории относительности связана с тем, что она выражает наиболее общие свойства пространства и времени.

Эти же опыты по распаду пионов можно рассматривать и как экспериментальное подтверждение релятивистского эффекта сокращения расстояний. Для этого нужно интерпретировать результаты опытов с точки зрения системы отсчета, связанной с движущимся пионом. В этой системе отсчета среднее время жизни пиона есть собственное время  $\tau_0 = 2,5 \cdot 10^{-8}$  с, но лаборатория движется относительно

пиона с ультрарелятивистской скоростью  $v$ . Поэтому расстояние между источником и приемником в системе отсчета, связанной с пионом, вследствие релятивистского сокращения длины оказывается меньше, чем собственное расстояние, т. е. чем расстояние в лабораторной системе отсчета. При  $v/c = 1 - 5 \cdot 10^{-5}$  значение  $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 0,01$ , т. е. расстояние сокращается в 100 раз.

### 1.4.5 Релятивистский эффект Доплера

Еще одно экспериментальное подтверждение кинематических эффектов теории относительности дает эффект Доплера, который заключается в зависимости частоты принимаемых периодических сигналов от относительной скорости источника и приемника.

Рассмотрим сначала *продольный эффект Доплера*, считая, что относительная скорость источника и приемника направлена вдоль линии, их соединяющей. Пусть, например, источник находится в начале координат системы отсчета  $K'$ , так что его координата  $x' = 0$ . Пусть приемник находится в начале координат системы  $K$ , так что его координата  $x = 0$ . Источник посылает сигналы через одинаковые промежутки времени, которые равны  $\tau_0$  по часам, связанным с источником. Чему равны промежутки времени  $T$  между последовательными принимаемыми сигналами по часам, связанным с приемником?

Будем для определенности считать, что первый из сигналов, например кратковременная вспышка света, посылается источником в момент времени  $t = 0$ , когда начала координат систем  $K$  и  $K'$  совпадают. Этот сигнал достигнет находящегося рядом приемника в тот же момент времени  $t = 0$ . Второй сигнал посылается из точки  $x' = 0$  спустя промежуток времени  $\tau_0$  по часам в  $K'$ , связанным с источником, т. е. в момент времени  $\tau = \tau_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  по часам в системе  $K$ . Этот сигнал на пути к приемнику должен преодолеть расстояние  $x$ , где  $x = v\tau$  — координата источника в системе  $K$  в момент отправления второго сигнала. Поэтому он достигнет приемника в момент времени  $T$  (по часам в  $K$ ), равный  $\tau + x/c$ . Таким образом, промежуток времени между двумя последовательными сигналами, приходящими к приемнику, измеренный по часам в системе приемника  $K$ , оказывается равным

$$T = \tau \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \tau_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}.$$

Отсюда следует, что при относительном движении источника и приемника частота принимаемых сигналов  $\nu = 1/T$  связана с собственной частотой  $\nu_0 = 1/\tau_0$  (т. е. частотой в системе отсчета, в которой приемник покоится относительно источника) соотношением:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} = \nu_0 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}. \quad (1.12)$$

В формуле (1.12) нужно относительную скорость  $v$  источника и приемника считать положительной, если они удаляются друг от друга, и отрицательной, если источник и приемник сближаются.

При малых по сравнению со скоростью света значениях относительной скорости (при  $v/c \ll 1$ ) формулу (1.12) можно упростить, ограничившись членами первого порядка по  $v/c$ :

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad \text{или} \quad \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\frac{v}{c}, \quad (1.13)$$

где  $\Delta\nu = \nu - \nu_0$  — сдвиг частоты, т. е. разность частот принимаемых и посылаемых сигналов. Формула (1.13) соответствует результату нерелятивистской теории эффекта Доплера, в которой время рассматривается как абсолютное.

Правильность слагаемого порядка  $(v/c)^2$  при разложении релятивистской формулы (1.12) в степенной ряд была экспериментально подтверждена Айвсом и Стилуэллом в 1938–1941 гг. В этих опытах изучалось изменение частоты света определенной спектральной линии, излучавшегося быстро движущимися атомами водорода ( $v/c \sim 5 \cdot 10^{-3}$ ) в пучке каналовых лучей. Для выделения эффекта второго порядка по  $v/c$  лучи света, испускаемые вдоль и против направления движения атомов, совмещались с помощью зеркал и направлялись в спектрограф. Измерялось смещение средней частоты этих лучей относительно частоты света, излучаемого неподвижными атомами. Согласно релятивистской формуле эффекта Доплера (1.12), средняя частота равна

$$\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) = \frac{1}{2}\nu_0 \left( \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} + \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \right) = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx \nu_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right)$$

(нерелятивистский результат дал бы для средней частоты  $\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) = \nu_0$ ). Согласие экспериментальных результатов с вычислениями по релятивистской формуле было очень хорошим. Эти опыты явились исторически первым экспериментальным подтверждением релятивистского закона преобразования промежутков времени.

Продольный эффект Доплера играет большую роль в оптике. По вызываемому им сдвигу частот спектральных линий можно определить относительную скорость источника и приемника излучения. В астрофизике вызываемое эффектом Доплера красное смещение спектральных линий в спектрах удаленных галактик привело к экспериментальному открытию Хабблом закона расширения Вселенной. Расщепление спектральных линий некоторых звезд на две компоненты позволяет сделать вывод о том, что наблюдается система двух звезд, обращающихся вокруг центра масс. Если обычными оптическими или интерференционными методами эти звезды разрешить не удастся, то систему называют спектрально-двойной звездой. В спектроскопии проявление эффекта Доплера состоит в том, что хаотическое тепловое движение излучающих свет атомов или ионов в источнике приводит к наблюдаемому уширению спектральных линий.

Теория относительности предсказывает наряду с продольным эффектом также существование *поперечного эффекта Доплера*, состоящего в изменении частоты света, излучаемого движущимся источником, при наблюдении света под прямым углом к направлению перемещения источника. Если наблюдатель видит источник под прямым углом к направлению относительного движения (угол должен быть прямым в системе отсчета, связанной с приемником), то частота принимаемых сигналов будет меньше собственной частоты источника.

Поперечный эффект Доплера есть прямое следствие релятивистского замедления времени. Рассматривая посылающий сигналы движущийся источник как часы, можно объяснить уменьшение частоты принимаемых сигналов тем, что неподвижному наблюдателю движущиеся относительно него часы представляются идущими медленнее, чем точно такие же неподвижные часы. Так как наблюдаемый промежуток времени  $\tau$  между двумя событиями связан с собственным промежутком времени  $\tau_0$  между этими же событиями соотношением (1.6), для наблюдаемой частоты имеем:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (1.14)$$

Поперечный эффект Доплера представляет собой эффект второго порядка по  $v/c$  и, в отличие от продольного эффекта Доплера, вообще отсутствует в нерелятивистской теории.

\* \* \*

Подчеркнем, что релятивистские эффекты замедления времени и сокращения длины означают лишь, что *измеряемый* на опыте промежуток времени между событиями и *измеряемое* расстояние зависят от относительного движения. Теория относительности рассматривает результаты временных и пространственных измерений, а движение наблюдателя влияет на *результаты измерений*. Собственное время и собственная длина — по определению понятия абсолютные. Для объяснения замедления времени и сокращения длины нет необходимости искать какие-то процессы или изменения в движущихся часах и в движущемся стержне: эти чисто кинематические эффекты непосредственно следуют из анализа самого процесса измерения.

Иногда задают вопрос: реальными или кажущимися являются замедление времени и сокращение длины? Ответ зависит от того, какой смысл вкладывается в понятие «реальный эффект». Аналогично можно спросить, реальным или кажущимся является сдвиг частоты в эффекте Доплера. Относительное движение источника и наблюдателя, безусловно, никак не сказывается на собственной частоте источника. Но наблюдатель при измерении частоты совершенно определенно обнаружит сдвиг частоты в случае относительного движения источника и приемника.

Так же обстоит дело с замедлением времени и сокращением длины. Собственное время и собственная длина отнюдь не меняются из-за движения с постоянной скоростью, несмотря на то, что такое движение сказывается на результатах измерений промежутков времени и расстояний. Эти эффекты можно назвать *кажущимися* в том смысле, что соответствующие собственные величины остаются неизменными. Но эти эффекты являются *реальными* в таком же смысле, в каком реальными являются результаты измерений. Отличие замедления времени и сокращения длины от эффекта Доплера в этом отношении заключается только в том, что движение сказывается на результатах измерения частоты уже и в классической физике, а на результатах измерения промежутков времени и расстояний — только в релятивистской физике.

Теория относительности перевела эти величины — промежутки времени между событиями и расстояния между точками — из абсолютных в относительные. Но в чем теория относительности безусловно более «абсолютна», нежели классическая

физика, так это в самом принципе относительности: согласно принципу относительности *законы физики абсолютны*, т. е. выполняются во всех инерциальных системах отсчета.

По материалу данного раздела рекомендуется решить следующие задачи из [6]: 723, 724, 726, 728, 729, 731, 733, 736.

*Рекомендуемая литература:* [1], стр. 376–383, [8], стр. 12–16.

## 1.5 Преобразования Лоренца

Релятивистский закон преобразования координат и времени произвольного события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой можно получить из формул преобразования промежутков времени (1.6) и пространственных расстояний (1.7), которые были выведены выше непосредственно из постулатов теории относительности с помощью простых мысленных опытов. Релятивистские преобразования координат и времени события должны заменить теперь преобразования Галилея (1.1), которые были основаны на классических представлениях об абсолютном характере промежутков времени и пространственных расстояний.

### 1.5.1 Вывод преобразований Лоренца

Рассмотрим описание некоторого события  $A$  в двух инерциальных системах отсчета  $K$  и  $K'$ , считая, как и прежде, что система  $K'$  движется относительно  $K$  в положительном направлении оси  $Ox$  со скоростью  $v$ , и что в момент времени  $t = 0$  начала координат систем отсчета  $K$  и  $K'$  совпадают. Пусть координаты и время события  $A$  в системе  $K$  есть  $x, y, z$  и  $t$ , а в системе  $K'$  — соответственно  $x', y', z'$  и  $t'$  (рис. 1.6).

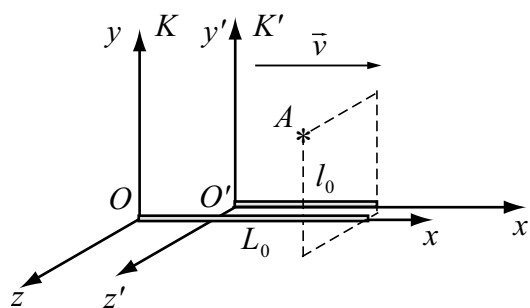


Рис. 1.6: К выводу преобразований Лоренца

Расстояния в направлениях, перпендикулярных к относительной скорости  $\vec{v}$  систем отсчета, как уже было показано выше (см. стр. 17), одинаковы в  $K$  и в  $K'$ , поэтому  $y = y'$  и  $z = z'$ . Чтобы выразить координату  $x$  события  $A$  через  $x'$  и  $t'$ , расположим мысленно жесткий стержень вдоль оси  $Ox$  от начала координат до точки  $x$ . Очевидно, что координата  $x$  события  $A$  есть просто собственная длина этого стержня. Обозначим ее через  $L_0$ . Длина  $L$  этого же стержня в системе



отсчета  $K'$ , относительно которой стержень движется со скоростью  $-v$ , в соответствии с релятивистской формулой (1.7) преобразования длины, дается выражением  $L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . С точки зрения наблюдателя в  $K'$ , длину стержня  $L$  можно представить как сумму расстояния  $vt'$  между точками  $O$  и  $O'$  в момент времени  $t'$ , когда по его часам происходит событие  $A$ , и координаты  $x'$  события  $A$  (см. рис. 1.6). Таким образом,  $L_0\sqrt{1 - v^2/c^2} = x' + vt'$ . Учитывая, что  $L_0 = x$ , получаем отсюда следующую формулу, выражающую координату  $x$  события  $A$  в системе  $K$  через координату  $x'$  и время  $t'$  этого же события в системе отсчета  $K'$ :

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.15)$$

Чтобы получить недостающую формулу для момента времени  $t$  через  $x'$  и  $t'$ , мысленно расположим теперь жесткий стержень в системе  $K'$  протяженностью от начала координат  $O'$  до точки  $x'$ . Очевидно, что координата  $x'$  события  $A$  есть как раз собственная длина этого стержня. Обозначим ее  $l_0$ . Относительно системы  $K$  этот стержень движется (вместе с системой  $K'$ ) со скоростью  $v$ , и его длина  $l$  в  $K$ , согласно (1.7), равна  $l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , т. е.  $x'\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Теперь наблюдатель в  $K$  может представить координату  $x$  события  $A$  как сумму расстояния  $OO' = vt$  между точками  $O$  и  $O'$  в момент времени  $t$ , когда по его часам происходит событие  $A$ , и длины стержня  $l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Так как  $l_0 = x'$ , получаем  $x = vt + x'\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Выразим здесь  $x$  через  $x'$  и  $t'$  с помощью (1.15). В результате после простых преобразований получаем окончательное выражение для  $t$  через  $x'$  и  $t'$ :

$$t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.16)$$

Формулы (1.15) и (1.16) дают искомый закон преобразования координат и времени произвольного события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Они носят название *преобразований Лоренца*. Выпишем их еще раз вместе:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.17)$$

Обратные преобразования от системы  $K$  к  $K'$  можно получить, разрешая уравнения (1.17) относительно  $x'$  и  $t'$ :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.18)$$

Разумеется, обратные преобразования Лоренца (1.18) отличаются от прямых (1.17) лишь заменой  $v \rightarrow -v$  в полном соответствии с принципом относительности, утверждающим равноправие систем отсчета  $K$  и  $K'$ .

Если относительная скорость  $v$  систем отсчета  $K$  и  $K'$  много меньше скорости света  $c$ , преобразования Лоренца (1.17), как легко проверить, переходят в преобразования Галилея (1.1). Это означает, что теория относительности не отвергает преобразования Галилея как неправильные, а включает их в правильные преобразования — преобразования Лоренца — как *предельный случай*, справедливый

при относительных скоростях систем отсчета  $K$  и  $K'$ , малых по сравнению со скоростью света (при  $v \ll c$ ). Иными словами, теория относительности не отвергает классические представления о пространстве и времени и опирающуюся на эти представления классическую (нерелятивистскую) физику, а устанавливает *границы применимости* нерелятивистских представлений. В этом можно видеть проявление общенаучного *принципа соответствия*, согласно которому новая теория, приходящая на смену старой, должна сводиться к старой в той области явлений, где старая теория получила убедительное подтверждение на опыте. При этом новая теория устанавливает границы применимости старой теории.

## 1.5.2 Следствия преобразований Лоренца

Покажем, как из формул преобразований Лоренца можно получить основные релятивистские кинематические эффекты, исследованные выше непосредственно на основе постулатов теории относительности.

- **Относительность одновременности событий** (т. е. относительный характер синхронизации часов). Рассмотрим совокупность событий, одновременных с точки зрения системы отсчета  $K$ , но происходящих в разных точках оси  $x$ . Пусть, например, эти события заключаются в прохождении через нулевое деление стрелок разных часов, неподвижных и предварительно синхронизированных в системе отсчета  $K$  (рис. 1.7, *a*).

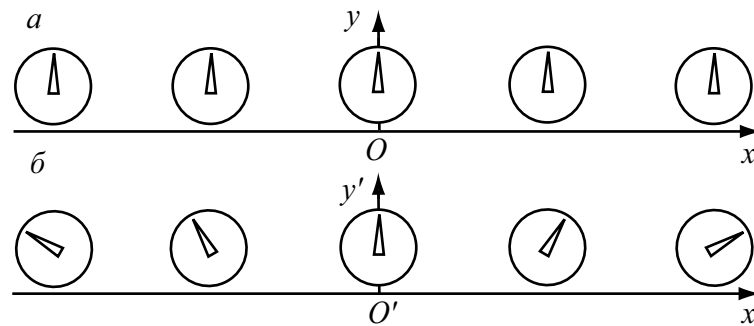


Рис. 1.7: Относительность синхронизации часов

Поставим вопрос: какими будут показания этих часов с точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K'$  в один и тот же момент времени  $t' = 0$ ? Подчеркнем, что речь теперь идет о событиях, одновременных в системе отсчета  $K'$ . Подставляя  $t' = 0$  в последнюю из формул (1.17) преобразований Лоренца, находим, что одновременным с точки зрения системы  $K'$  событиям, происходящим в разных точках оси  $x'$ , соответствуют не совпадающие моменты времени в системе отсчета  $K$ :

$$t = \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} x'. \quad (1.19)$$

С точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K'$  стрелки только тех часов (неподвижных в системе отсчета  $K$ ), что находятся в начале координат (т. е. при  $x' = 0$ ), показывают в момент  $t' = 0$  на нулевое деление  $t = 0$ . Показания всех остальных

часов, в соответствии с (1.19), будут различаться в зависимости от координаты  $x'$ , указывающей их положение на оси  $x'$  в этот момент времени  $t' = 0$  (см. рис. 1.7, б). В этом проявляется относительный характер одновременности событий и синхронизации часов: неподвижные и синхронизированные в системе отсчета  $K$  часы с точки зрения наблюдателя в другой системе отсчета  $K'$  (относительно которого все эти часы движутся) уже не будут синхронизированными.

• **Относительность промежутков времени** между событиями. Пусть два события происходят в одном и том же месте оси  $Ox'$  с точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K'$  (т. е.  $x'_1 = x'_2$ ), но в разные моменты времени  $t'_1$  и  $t'_2$ . Эти моменты времени измеряются в системе отсчета  $K'$  по одним и тем же часам, поэтому разность  $t'_2 - t'_1$  равна собственному времени  $\tau_0$  для данной пары событий. Какой промежуток времени  $\tau = t_2 - t_1$  прошел между этими же событиями с точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K$ ? В системе отсчета  $K$  эти события происходят в разных местах, и моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  измеряются с помощью разных (синхронизированных между собой) часов. Согласно преобразованиям Лоренца (1.17)

$$t_1 = \frac{t'_1 + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Здесь мы учли, что  $x'_1 = x'_2 = x'$ . Отсюда для разности  $\tau = t_2 - t_1$  получаем

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

что совпадает с формулой (1.6), полученной выше непосредственно из постулатов теории относительности при анализе мысленного опыта со «световыми часами».

• **Относительность пространственных расстояний** (сокращение Лоренца – Фитцджеральда). Предположим, что жесткий стержень, ориентированный вдоль оси  $Ox'$ , покоится в системе отсчета  $K'$ . Его длина покоя  $l_0$  (собственная длина) равна разности координат конца стержня и его начала:  $l_0 = x'_2 - x'_1$ . Наблюдатель в системе отсчета  $K$ , относительно которого стержень движется, при измерении длины стержня  $l$  тоже должен взять разность координат конца стержня и его начала:  $l = x_2 - x_1$ , но здесь важно, чтобы координаты  $x_1$  и  $x_2$  были измерены в один и тот же момент времени  $t$  по часам в системе отсчета  $K$ . Согласно формулам (1.18) преобразований Лоренца

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

откуда

$$x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1)\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

что совпадает с формулой (1.7) сокращения Лоренца – Фитцджеральда, полученной выше при анализе мысленных опытов на основе постулатов теории относительности.

По материалу данного раздела рекомендуется решить следующие задачи из [6]: 730, 733, 734, 737.

*Рекомендуемая литература:* [1], стр. 366–376, [2], стр. 519–526.

## 1.6 Релятивистский закон преобразования скорости

Из преобразований Лоренца (1.17) для координат и времени события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой можно получить закон преобразования скорости частицы. Пусть радиус-вектор  $\vec{r}(t)$  задает положение движущейся частицы в момент времени  $t$  в системе  $K$ , а  $\vec{r}'(t')$  — положение той же частицы в системе  $K'$  в момент времени  $t'$ . Тогда  $\vec{u} = d\vec{r}/dt$  — скорость этой частицы относительно системы  $K$ , а  $\vec{u}' = d\vec{r}'/dt'$  — скорость той же частицы относительно системы отсчета  $K'$ . Рассматривая движение частицы как непрерывную последовательность событий, можно найти связь между проекциями вектора скорости  $\vec{u}$  и  $\vec{u}'$  в двух системах отсчета следующим образом:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt'} \frac{1}{(dt/dt')}. \quad (1.20)$$

Производные  $d\vec{r}/dt'$  и  $dt/dt'$  в правой части (1.20) найдем с помощью преобразований Лоренца (1.17). При дифференцировании нужно принимать во внимание то, что  $\vec{r}(t)$  и  $t$  зависят от  $t'$  не только явно, но и через  $\vec{r}'(t')$ . В результате получаем:

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left( \frac{dx'}{dt'} + v \right), \quad \frac{dy}{dt'} = \frac{dy'}{dt'}, \quad \frac{dz}{dt'} = \frac{dz'}{dt'}, \quad (1.21)$$

и, наконец,

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left( 1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right). \quad (1.22)$$

Подставляя выражения (1.21) и (1.22) в (1.20), получаем искомый релятивистский закон преобразования скорости частицы:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}, \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}. \quad (1.23)$$

В предельном случае медленных движений, когда и скорость частицы, и относительная скорость двух систем отсчета много меньше скорости света (т. е. при  $v \ll c$ ,  $|u'_x| \ll c$ ) выражения (1.23) переходят в классические формулы преобразования скорости (1.2), вытекающие из преобразований Галилея (1.1). Отметим, что релятивистский закон преобразования скорости частицы (1.23) при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой отнюдь не сводится к векторному сложению относительной ( $\vec{u}'$ ) и переносной ( $\vec{v}$ ) скоростей. Впрочем, это не означает, что в релятивистской механике скорость частицы вообще нельзя рассматривать как векторную величину: при разложении на составляющие в рамках какой-либо одной системы отсчета скорость ведет себя как обычный вектор, т. е. полная скорость равна векторной сумме скоростей отдельных движений, на которые мы разлагаем движение частицы.

Формулы для обратного преобразования скорости при переходе от системы отсчета  $K$  к  $K'$  можно получить из (1.23) изменением знака скорости  $v$  одной системы отсчета относительно другой:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}. \quad (1.24)$$

### 1.6.1 Преобразование скорости и предельная скорость

Релятивистский закон преобразования скорости согласуется, разумеется, с исходным постулатом об абсолютном характере предельной скорости (скорости света  $c$ ). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, например, световой импульс, распространяющийся вдоль оси  $Ox'$  со скоростью  $c$  относительно системы отсчета  $K'$ . Чтобы найти его скорость относительно системы отсчета  $K$ , в формулах (1.23) положим  $u'_x = c$ . При этом первая из формул (1.23) дает

$$u_x = \frac{c + v}{1 + v/c} = c,$$

т. е. световой импульс и относительно системы отсчета  $K$  распространяется с той же предельной скоростью  $c$ .

Закон преобразования скорости (1.23) находится также в полном соответствии с тем, что скорость  $c$  ставит предел достижимым скоростям движения материальных тел: никакая материальная частица ни в какой системе отсчета не может иметь скорость, превышающую скорость света  $c$ . Покажем это. Рассмотрим для определенности частицу, движущуюся вдоль оси  $Ox'$ . Ее скорость  $u'$  относительно системы отсчета  $K'$  меньше скорости света:  $u' < c$ . Тогда из формул (1.23) следует, что и в системе отсчета  $K$ , относительно которой  $K'$  движется со скоростью  $v$ , сколь угодно близкой к скорости света (но, разумеется,  $v < c$ ), скорость частицы всегда будет меньше скорости света:  $u < c$ . В самом деле, в этом случае (1.23) сводится в выражению

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}, \quad (1.25)$$

из которого в результате простых преобразований получаем:

$$u - c = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} - c = \frac{(u' - c)(1 - v/c)}{1 + u'v/c^2} < 0.$$

Отсюда следует, что даже при сколь угодно большой относительной скорости  $v$  (но  $v < c$ ) скорость частицы в системе отсчета  $K$  будет меньше скорости света:  $u < c$  (так как  $u' < c$ ). Например, если частица движется относительно системы отсчета  $K'$  со скоростью  $u' = \frac{3}{4}c$ , а система отсчета  $K'$  с такой же скоростью  $v = \frac{3}{4}c$  относительно системы отсчета  $K$ , то, в соответствии с (1.25), эта частица движется относительно системы отсчета  $K$  со скоростью  $u = \frac{3}{2}c / (1 + \frac{9}{16}) = \frac{24}{25}c$ .

### 1.6.2 Относительная скорость и скорость разлета

Рассмотрим мысленный опыт, в котором покоящаяся радиоактивная частица распадается на два одинаковых осколка, разлетающихся с большими скоростями. Из сохранения импульса следует, что относительно лаборатории скорости осколков

одинаковы по модулю и направлены в противоположные стороны (рис. 1.8). Пусть, например, эти скорости равны  $3/4$  скорости света. С какой скоростью разлетаются осколки?

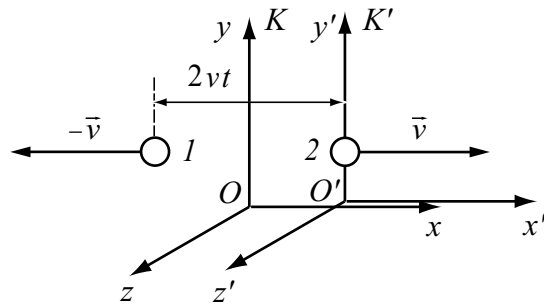


Рис. 1.8: Движение одинаковых осколков относительно лаборатории.

Чтобы дать определенный ответ на поставленный вопрос, необходимо уточнить саму постановку вопроса. Какую именно величину мы имеем в виду, когда говорим про скорость разлета осколков? Если рассматривать расстояние  $l(t)$  между осколками, измеренное в лабораторной системе отсчета, то можно говорить о скорости, с которой это расстояние возрастает со временем. Если именно эту величину  $u = dl/dt$  называть *скоростью разлета* осколков относительно лабораторной системы отсчета, то при скоростях самих осколков  $v = \frac{3}{4}c$  для скорости разлета получим значение  $u = 2v = \frac{3}{2}c$ , в полтора раза превышающее скорость света. Противоречит ли такое заключение постулату теории относительности о существовании конечного предела  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с для скоростей любых движений?

В литературе часто упоминаются явления, для которых можно ввести понятие скорости, причем такого рода скорость может иметь сколь угодно большую величину. Иногда существование таких явлений приводится в качестве аргумента, опровергающего теорию относительности. Но в действительности постулат теории относительности утверждает лишь невозможность передачи *сигнала*, какого бы то ни было *воздействия*, какой-либо *информации* со скоростью, превышающей скорость света. Анализ всех подобных примеров с полной определенностью показывает, что упоминаемые в них движения со скоростями, превышающими скорость света, не могут быть использованы для передачи сигналов. Такое заключение относится и к введенной выше скорости разлета осколков, измеряемой в лабораторной системе отсчета.

Но совсем другое дело, если мы будем говорить о скорости, с которой любой из осколков движется относительно другого, т. е. о величине, которую можно назвать *относительной скоростью* разлетающихся осколков. Скорость одной частицы относительно другой должна удовлетворять релятивистским постулатам и поэтому не может превышать скорость света. Чтобы найти относительную скорость, нужно перейти из лабораторной системы отсчета (пусть это будет система  $K$ ), где скорости осколков 1 и 2 равны  $-\vec{v}$  и  $\vec{v}$  соответственно, в систему отсчета, связанную с одним из осколков, например, в систему отсчета  $K'$ , связанную с осколком 2 (см. рис. 1.8). Относительно  $K'$  скорость второго осколка  $v'_2 = 0$ , а для нахождения скорости осколка 1 (т. е. величины  $v'_1$ ) нужно обратиться к первой из формул (1.24),

подставив в нее  $u_x = -v$  (скорость осколка  $l$  относительно  $K$ ). В результате получаем  $v'_1 = -2v/(1 + v^2/c^2) = -\frac{24}{25}c$  (при  $v = \frac{3}{4}c$ ) — относительная скорость разлетающихся частиц меньше скорости света, в полном согласии с постулатами теории относительности.

Для нахождения относительной скорости можно перейти и в систему отсчета, связанную с осколком  $l$ . Так как эта система движется относительно лабораторной со скоростью  $v$  в отрицательном направлении оси  $Ox$ , в формулах (1.24) нужно заменить  $v$  на  $-v$ . Подставляя в первую из формул (1.24) скорость осколка  $2$  в лабораторной системе  $u_x = v$ , получаем такую же (по модулю) относительную скорость осколков  $v'_2 = 2v/(1 + v^2/c^2) = \frac{24}{25}c$ .

Понятие относительной скорости можно, разумеется, применять не только к частицам, но и к системам отсчета. Введем кроме системы  $K'$ , движущейся относительно  $K$  со скоростью  $v_1$ , еще одну систему отсчета  $K''$ , которая движется относительно  $K'$  со скоростью  $v_2$ . Можно показать (см., например, задачу 737 в [6]), что результат последовательно выполненных преобразований Лоренца (1.17) для координат и времени некоторого события сначала от  $K$  к  $K'$ , а затем от  $K'$  к  $K''$  эквивалентен одному преобразованию Лоренца непосредственно от системы  $K$  к  $K''$ , причем относительная скорость  $v$  систем  $K''$  и  $K$  выражается через  $v_1$  и  $v_2$  следующим соотношением, соответствующим релятивистскому закону преобразования скорости (1.23):

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}. \quad (1.26)$$

Результат такого сложения относительных скоростей никогда не превышает скорости света  $c$ .

### 1.6.3 Движущийся изотропный источник света

В качестве примера применения релятивистского преобразования скорости, затрагивающего составляющие скорости, поперечные к относительному движению систем отсчета, рассмотрим мысленный опыт с точечным источником света, покоящимся в системе отсчета  $K'$  и равномерно излучающим свет по всем направлениям (рис. 1.9, а).

Рассмотрим те 50% светового потока, которые источник излучает в переднюю полусферу в системе отсчета  $K'$ . С точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K$ , относительно которой источник движется со скоростью  $v$ , излучение уже отнюдь не будет изотропным: эти 50% светового потока будут излучаться преимущественно вперед по направлению движения в конус с угловым полураствором  $\delta$  (рис. 1.9, б), причем  $\cos \delta = v/c$ .

В самом деле, в системе отсчета  $K'$  луч света, ограничивающий рассматриваемый поток, направлен вдоль оси  $Oy'$  и для него  $u'_x = 0$ ,  $u'_y = c$ ,  $u'_z = 0$ . Переходя в систему отсчета  $K$  по формулам (1.23), получим для этого луча следующие значения проекций скорости:

$$u_x = v, \quad u_y = c\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad u_z = 0, \quad (1.27)$$

откуда

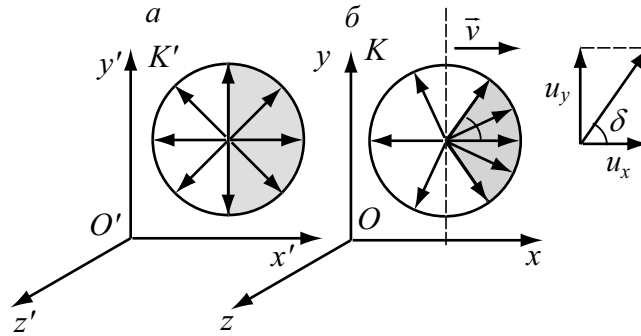


Рис. 1.9: Неподвижный в  $K'$  источник света, излучающий свет равномерно по всем направлениям (а), и распределение светового потока для наблюдателя в системе отсчета  $K$  (б)

$$\cos \delta = \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} = \frac{v}{c}.$$

При скорости источника, близкой к скорости света, 50% излучения источника сконцентрируется в узкий конус, направленный вперед по движению, с осью, совпадающей с направлением движения источника.

### 1.6.4 Аберрация света звезд

Рассмотрим еще один пример применения релятивистского преобразования скорости, анализируя явление *звездной аберрации*, открытое английским астрономом Брэдли еще в 1725 г. Явление звездной аберрации состоит в том, что вследствие орбитального движения Земли видимое направление на удаленную звезду в общем случае не совпадает с истинным. Движущийся вместе с Землей наблюдатель видит искаженную картину звездного неба: для него вселенная «сжата» в направлении движения Земли по сравнению с картиной, которую увидел бы в том же направлении неподвижный относительно звезд наблюдатель. Если наблюдатель будет менять свою скорость, то он обнаружит, что звездное небо «переливается» вокруг него: направления, в которых он видит звезды, будут изменяться, не образуя постоянных углов друг с другом. Именно в таком положении находится наблюдатель на Земле, обращающейся вокруг Солнца: каждые полгода скорость Земли в ее орбитальном движении (30 км/с, т. е.  $10^{-4}c$ ) изменяет свое направление на противоположное. В наблюдаемом явлении звездной аберрации обнаруживается, конечно, не сама скорость Земли, а тот факт, что при движении по орбите эта скорость изменяет направление: в разное время года наблюдаемые положения звезд сдвинуты по-разному.

Сделаем количественный расчет отклонения видимого направления на удаленную звезду от «истинного» направления. Пусть, например, «неподвижный» наблюдатель (связанный с гелиоцентрической системой отсчета  $K$ ) видит удаленную звезду в «зените»  $S$ , т. е. под прямым углом к плоскости орбиты Земли (рис. 1.10). В каком направлении видит эту звезду находящийся на Земле (в системе отсчета  $K'$ ) наблюдатель?



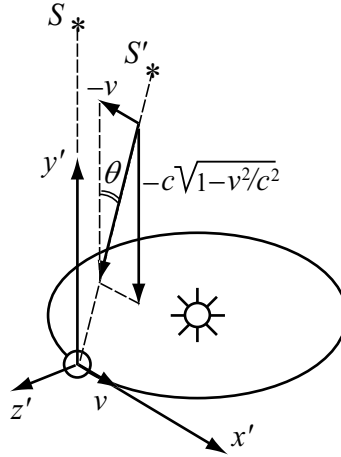


Рис. 1.10: К объяснению явления звездной абберации: движущийся вместе с Землей наблюдатель видит звезду  $S$  в положении  $S'$

Выберем ось  $Ox$  в направлении орбитальной скорости Земли, а ось  $Oy$  перпендикулярно плоскости орбиты. Тогда луч света от звезды в системе отсчета  $K$  имеет следующие проекции:

$$u_x = 0, \quad u_y = -c, \quad u_z = 0.$$

Воспользовавшись законом преобразования скорости (1.23), получим для этого луча следующие значения проекций скорости для наблюдателя на Земле:

$$u'_x = -v, \quad u'_y = -c\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad u'_z = 0.$$

Складывая квадраты проекций скорости, убеждаемся, что в системе отсчета  $K'$ , как и в  $K$ , скорость света имеет величину  $c$ , т. е. релятивистский закон преобразования скорости и в этом примере согласуется с постулатом об универсальном характере предельной скорости. Как видно из (рис. 1.10), для синуса угла абберации  $\theta$  можно написать:

$$\sin \theta = \frac{|u'_x|}{c} = \frac{v}{c}. \quad (1.28)$$

Явление звездной абберации получает объяснение с хорошей точностью и в рамках нерелятивистской физики (что было сделано Брэдли в 1727 г.), если принять во внимание то, что свет распространяется с конечной скоростью. В классическом объяснении абберации кажущееся направление на звезду отличается от истинного по той же причине, по которой отвесно падающий дождь кажется косым наблюдателю в движущемся вагоне. Классическое выражение для угла абберации отличается от релятивистской формулы (1.28) лишь тем, что отношение  $v/c$  вместо синуса угла абберации дает тангенс этого угла. Но так как в случае явления абберации  $v/c = 10^{-4}$ , указанное различие лежит за пределами экспериментальных возможностей.

По материалу данного раздела рекомендуется решить следующие задачи из [6]: 739, 740, 741, 742 (при решении этой задачи следует обратить внимание на то, что

скорость сближения или разлета частиц в некоторой системе отсчета может превосходить скорость света — это не противоречит постулату о предельном характере скорости света; важно понимать, что при этом *относительная скорость* частиц всегда меньше  $c$ ), 743.

*Рекомендуемая литература:* [1], стр. 369–373, [2], стр. 526–529, [4], стр. 28–31.

## 1.7 Пространственно-временной интервал между событиями

Теория относительности опровергла интуитивные представления классической физики об абсолютном характере пространства и времени. Точнее, теория относительности показала приближенный характер этих представлений и установила границы их применимости. Выше было показано (на основе постулатов теории относительности, а также с помощью преобразований Лоренца), что такие величины как расстояние между точками и промежуток времени между событиями, считавшиеся в классической физике абсолютными, не зависящими от системы отсчета, в действительности относительны, т. е. изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Однако наиболее характерная черта теории относительности заключается не в утверждении относительности пространства и времени, а в установлении абсолютных, не зависящих от выбора системы отсчета законов природы.

### 1.7.1 Определение интервала между событиями и инвариантность интервала

Задача нахождения абсолютного, т. е. независимого от точки зрения наблюдателя выражения законов природы тесно связана с нахождением абсолютных, инвариантных величин. Одна из таких величин упоминается уже в основных постулатах теории — это максимальная скорость распространения взаимодействий, равная скорости света в пустоте. Другая инвариантная величина — *пространственно-временной интервал между событиями*, обобщающий понятия расстояния в пространстве и промежутка времени. Интервал для произвольной пары событий определяется следующим образом:

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}, \quad (1.29)$$

где  $t_{12} = t_2 - t_1$  — промежуток времени между рассматриваемыми событиями, измеренный в некоторой системе отсчета, а

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

— пространственное расстояние между точками, в которых произошли эти события, измеренное в той же системе отсчета. В частности, если одно из событий происходит при  $t = 0$  в начале координат  $x = y = z = 0$ , а второе — в момент времени

$t$  в точке  $x, y, z$ , то, в соответствии с определением (1.29), интервал между ними выражается через координаты и время второго события следующим образом:

$$s = \sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2}. \quad (1.30)$$

Пусть, например, первое событие представляет собой вспышку света, происходящую при  $t = t' = 0$  в начале координат (которое в этот момент совпадает для систем отсчета  $K$  и  $K'$ ), а второе событие — приход фронта этой световой волны в некоторую точку. Допустим, что с точки зрения системы отсчета  $K$  второе событие произошло в точке с координатами  $x, y, z$  в момент времени  $t$ . Так как свет распространяется со скоростью  $c$ , интервал  $s$  для такой пары событий, как следует из определения (1.30), равен нулю:  $s = 0$ . В системе отсчета  $K'$  координаты и время второго события  $x', y', z'$  и  $t'$  будут иными, но и для них в силу инвариантности скорости света будет выполняться соотношение  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$ , т. е. и в системе отсчета  $K'$  интервал между рассматриваемыми событиями равен нулю:  $s' = 0$ . Таким образом, если два события связаны между собой световым сигналом, то интервал между ними равен нулю во всех инерциальных системах отсчета. Этот результат можно рассматривать как математическое выражение абсолютного характера скорости света.

Для любой другой пары событий, не связанных световым сигналом, интервал отличен от нуля, но его величина во всех инерциальных системах отсчета одинакова:

$$\sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2} = \sqrt{c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2}. \quad (1.31)$$

В этом легко убедиться с помощью преобразований Лоренца (1.17), выразив в левой части (1.31)  $x, y, z$  и  $t$  через координаты и время  $x', y', z'$  и  $t'$  этого же события в другой системе отсчета  $K'$ .

Понятие инвариантного пространственно-временного интервала между событиями обобщает понятия промежутка времени и пространственного расстояния, которые инвариантны по классическим представлениям, но не являются таковыми в релятивистской теории.

## 1.7.2 Классификация интервалов

В зависимости от того, какая составляющая — временная или пространственная — преобладает в интервале между рассматриваемыми событиями, возникает деление интервалов на времениподобные и пространственноподобные. Для *времениподобного интервала*  $c^2t_{12}^2 > l_{12}^2$  (или  $c^2t^2 > x^2 + y^2 + z^2$ , если одно из пары событий происходит в начале координат в начальный момент времени), т. е. квадрат такого интервала положителен:  $s_{12}^2 > 0$ . В случае времениподобного интервала всегда можно найти такую систему отсчета  $K'$ , в которой пространственная составляющая интервала обращается в нуль:  $l'_{12} = 0$ , т. е. в  $K'$  рассматриваемые события происходят в одном месте. Промежуток времени между ними, измеренный в такой системе отсчета  $K'$ , представляет для данной пары событий собственное время:  $t'_{12} = \tau_0$ . Иначе говоря, для событий, разделенных времениподобным интервалом, всегда существует такая система отсчета, в которой интервал представляет

собой (с точностью до постоянного множителя  $c$ ) просто промежутков времени  $\tau_0$  между этими событиями:

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \sqrt{c^2 t'_{12}{}^2 - l'_{12}{}^2} = \sqrt{c^2 t'_{12}{}^2} = c\tau_0.$$

В случае пары событий, разделенных времениподобным интервалом, понятия «раньше» или «позже» имеют абсолютный характер, не зависящий от системы отсчета. Ясно, что между такими событиями в принципе может иметь место причинно-следственная связь.

Для событий, разделенных пространственноподобным интервалом,  $c^2 t_{12}^2 < l_{12}^2$  (или  $c^2 t^2 < x^2 + y^2 + z^2$ , если одно из пары событий происходит в начале координат в начальный момент времени), т. е. квадрат такого интервала отрицателен:  $s_{12}^2 < 0$ . Сам интервал в этом случае выражается мнимым числом. В случае пространственноподобного интервала всегда можно найти такую систему отсчета  $K'$ , в которой временная составляющая обращается в нуль:  $t'_{12} = 0$ , т. е. в  $K'$  рассматриваемые события происходят одновременно. Это значит, что абсолютная величина пространственноподобного интервала  $|s_{12}|$  в системе отсчета  $K'$  сводится к пространственному расстоянию между точками, в которых произошли рассматриваемые события:

$$|s_{12}| = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = \sqrt{l'_{12}{}^2 - c^2 t'_{12}{}^2} = \sqrt{l'_{12}{}^2} = l'_{12}.$$

Таким образом, модуль пространственноподобного интервала  $|s_{12}|$  равен пространственному расстоянию  $l'_{12} = l_0$  между событиями, измеренному в той системе отсчета, где эти события происходят одновременно («собственное расстояние»).

Для пары событий, разделенных пространственноподобным интервалом, понятия «одновременно», «раньше», «позже» относительны: всегда можно указать такие системы отсчета, в которых первое событие происходит раньше второго, и такие, в которых второе происходит раньше первого. Очевидно, что между событиями, временная последовательность которых зависит от системы отсчета, причинно-следственные связи невозможны. Впрочем, невозможность существования причинной связи между событиями, разделенными пространственноподобным интервалом, когда  $l_{12} > ct_{12}$ , непосредственно видна из того, что никакой сигнал, никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, превышающей  $c$ .

Равный нулю интервал между событиями, связанными световым сигналом, называют *светоподобным*. В этом отношении понятие интервала как инвариантного расстояния между событиями в пространстве-времени существенно отличается от понятия расстояния между точками в евклидовой геометрии: расстояние в геометрии равно нулю только для совпадающих точек, но пространственно-временной интервал может быть равен нулю и для несовпадающих событий.

Подчеркнем, что разделение интервалов на времениподобные, пространственноподобные и светоподобные имеет абсолютный характер, т. е. не зависит от системы отсчета. Абсолютный характер рассмотренной классификации интервалов непосредственно следует из инвариантности интервала.

По материалу данного раздела рекомендуется решить следующие задачи из [6]: 744, 745, 746.

Рекомендуемая литература: [2], стр. 542–543, [3], стр. 11–16, 35–43, [4], стр. 42–46.

## 1.8 Геометрия пространства-времени

### 1.8.1 Аналогия с евклидовой геометрией

Понятие интервала между событиями в пространстве-времени аналогично геометрическому понятию расстояния между точками в пространстве. Эта аналогия состоит в следующем.

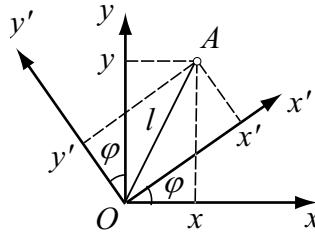


Рис. 1.11: Инвариантность расстояния между точками в евклидовой геометрии

Рассмотрим точку  $A$  на плоскости  $xOy$  (рис. 1.11). Координаты  $x, y$  этой точки зависят от выбора направления координатных осей и при повороте системы координат на некоторый угол  $\varphi$  преобразуются по следующему закону:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Но расстояние между любыми двумя точками на плоскости не изменяется при повороте системы координат, т. е. представляет собой величину абсолютную, инвариантную по отношению к повороту системы координат. Например, расстояние  $l$  между точками  $O$  и  $A$  на рис. 1.11, равное  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , при переходе к новым осям координат выражается через новые координаты точки  $A$  по формуле  $l = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ . Хотя координаты точки  $A$  при повороте осей изменились в соответствии с формулами (1.32), расстояние  $l$  осталось прежним, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой выражений (1.32) для новых (штрихованных) координат точки  $A$  через старые.

Аналогичным образом преобразуются координаты и время некоторого события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, подобно тому, как преобразуются координаты точки на плоскости при повороте осей координат. Преобразования при переходе к другой системе отсчета (преобразования Лоренца) затрагивают не только пространственные координаты, но и время, аналогично тому, как при повороте осей на плоскости затрагиваются обе координаты. И хотя координаты и время события изменяются, интервал между событиями  $s = \sqrt{c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$  при этих преобразованиях остается неизменным, подобно тому, как остается неизменным расстояние  $l = \sqrt{x^2 + y^2}$  при повороте осей.

## 1.8.2 Пространство-время и геометрия Минковского

Приведенная аналогия дает возможность рассматривать преобразования Лоренца для координат и времени события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой как геометрические преобразования в четырехмерном пространстве-времени, на осях которого откладываются три пространственные координаты и время события. Перемешивание пространственных координат и времени при преобразованиях Лоренца и существование инвариантной комбинации (т. е. интервала) позволяет рассматривать пространство и время как единое четырехмерное многообразие. Такая геометрическая интерпретация преобразований Лоренца впервые предложена немецким математиком Г. Минковским в 1908 г.

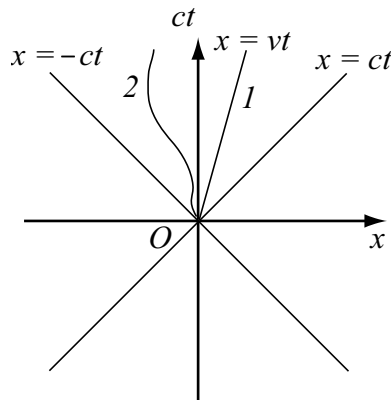


Рис. 1.12: Диаграмма Минковского и мировые линии

При выборе направления одной из осей координат (оси  $Ox$ ) в системах  $K$  и  $K'$  вдоль направления относительной скорости систем отсчета координаты  $y$  и  $z$  не затрагиваются при преобразованиях Лоренца (1.17). Поэтому для геометрической интерпретации преобразований Лоренца вместо четырехмерного пространства-времени достаточно рассматривать двумерные диаграммы пространства-времени (диаграммы Минковского), а именно плоскость  $x, ct$  (рис. 1.12).<sup>3</sup> Некоторому событию соответствует точка этой плоскости с координатами  $(x, ct)$ , называемая *мировой точкой*.

Последовательности событий, происходящих с одной частицей, на диаграмме Минковского сопоставляется непрерывная линия, называемая *мировой линией частицы*. Точки этой линии определяют координаты частицы во все моменты времени. Если, например, частица движется вправо вдоль оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $v$ , то ее мировая линия на диаграмме Минковского представляет собой прямую, уравнение которой  $x = vt$  (прямая 1 на рис. 1.12; предполагается, что при  $t = 0$  частица находилась в точке  $x = 0$ ). Мировая линия неравномерно движущейся частицы искривлена (кривая 2 на рис. 1.12). Мировая линия неподвижной частицы, все время находящейся в начале координат — это ось времени (ее урав-

<sup>3</sup>На временной оси диаграммы Минковского удобнее откладывать не время события  $t$ , а пропорциональную ему величину  $ct$ . При таком соглашении размерности величин, откладываемых на обеих осях, одинаковы, измерять их можно в одних и тех же единицах (метрах), и можно использовать для них одинаковый масштаб.

нение  $x = 0$ ). Другими словами, ось времени — это мировая линия начала координат. Совокупность точек, находящихся на оси  $Ox$  диаграммы Минковского, изображает множество одновременных событий, происходящих при  $t = 0$  в разных местах оси  $Ox$ .

Мировая линия светового сигнала, вышедшего из начала координат в момент времени  $t = 0$  и распространяющегося в положительном направлении оси  $Ox$ , имеет уравнение  $x = ct$ . Это биссектриса координатного угла на диаграмме Минковского (рис. 1.12). Все события, изображаемые точками этой линии, отделены от события  $(x = 0, t = 0)$  светоподобным (равным нулю) интервалом. Мировая линия сигнала, распространяющегося в отрицательном направлении оси  $Ox$ , имеет уравнение  $x = -ct$ . Вместе мировые линии световых сигналов  $x = \pm ct$ , распространяющихся из мировой точки  $(x = 0, t = 0)$ , образуют на диаграмме Минковского так называемый *световой конус*.

### 1.8.3 Диаграммы Минковского и системы отсчета

Введем теперь наряду с системой отсчета  $K$  систему  $K'$ , которая, как обычно, движется вдоль оси  $Ox$  вправо со скоростью  $v$ . Мировая линия начала координат системы  $K'$  (т. е. частицы, имеющей координату  $x' = 0$  во все моменты времени  $t'$ ) дается уравнением  $x = vt$ . Поэтому ось времени  $ct'$  системы отсчета  $K'$  на рассматриваемой диаграмме Минковского (где ось  $ct$  направлена вертикально вверх) *наклонена* вправо на угол  $\theta$ , причем  $\operatorname{tg} \theta = v/c$  (рис. 1.13, а). Точки этой прямой изображают совокупность событий, происходящих в начале координат системы  $K'$  в разные моменты времени.

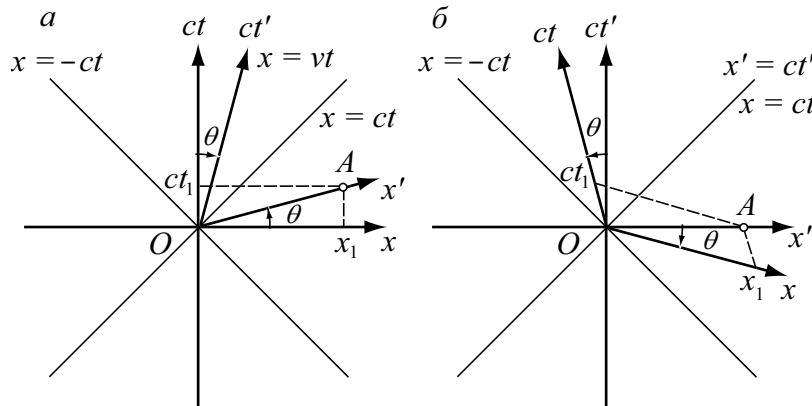


Рис. 1.13: Оси координат и времени системы  $K'$  на диаграмме Минковского

Зададимся вопросом: как на этой диаграмме направлена ось  $Ox'$ ? Ось  $Ox'$  системы отсчета  $K'$  — это прямая, на которой в пространстве-времени лежат все события, одновременные (в этой системе) с событием  $(x' = 0, t' = 0)$ . Чтобы найти уравнение этой прямой в переменных  $x, ct$ , обратимся к преобразованиям Лоренца (1.18), и в формуле для преобразования времени

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

положим  $t' = 0$ . Отсюда получаем  $ct = (v/c)x$ , т. е. ось  $Ox'$  на диаграмме Минковского отклонена вверх от оси  $Ox$  и составляет с ней такой же угол  $\theta$  ( $\operatorname{tg} \theta = v/c$ ), как и ось  $ct'$  с осью  $ct$ . Этого и следовало ожидать, так как вследствие инвариантности скорости света мировая линия светового сигнала  $x = ct$  (и  $x' = ct'$ ) должна быть биссектрисой координатного угла как в системе  $K$ , так и в  $K'$ . Система координат  $(x', ct')$  оказывается косоугольной на диаграмме Минковского (рис. 1.13, а), где оси  $(x, ct)$  системы отсчета  $K$  образуют прямой угол.

Разумеется, можно построить диаграмму Минковского и так, чтобы на ней система координат  $(x', ct')$  была прямоугольной. Но тогда система координат  $(x, ct)$ , соответствующая системе отсчета  $K$ , будет на этой диаграмме Минковского косоугольной (рис. 1.13, б): оси координат  $(x, ct)$  образуют на ней тупой угол.

Таким образом, аналогия между преобразованиями Лоренца для событий в пространстве-времени и преобразованием координат точки на плоскости при переходе к повернутым координатным осям в евклидовой геометрии не является полной. Причина различий состоит в том, что в геометрии пространства-времени инвариант преобразований представляет собой *разность* квадратов временной и пространственной координат  $c^2t^2 - x^2$  (квадрат интервала), а не *сумму* квадратов  $x^2 + y^2$  (квадрат расстояния), как в евклидовой геометрии. Если в евклидовой геометрии обе координаты эквивалентны, то в геометрии Минковского различие между пространственной и временной координатами события проявляется в том, что в выражение для инварианта геометрических преобразований (интервала, т. е. «расстояния» между событиями в мире Минковского) квадраты пространственной и временной координат входят с противоположными знаками. Такую геометрию называют *псевдоевклидовой*.

Диаграммы пространства-времени дают наглядное геометрическое представление многим выводам теории относительности, которые с точки зрения «здорового смысла» кажутся парадоксальными. В частности, относительность одновременности двух событий можно следующим образом продемонстрировать на диаграммах рис. 1.13. Событие  $A(x_1, t_1)$  с точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K$  произошло позже, чем событие  $O(x = 0, t = 0)$ , так как  $t_1 > 0$ . Но с точки зрения системы отсчета  $K'$  оба эти события произошли одновременно, так как соответствующие им точки диаграммы Минковского лежат на оси  $Ox'$ , т. е.  $t'_1 = t'_0 = 0$ .

Мировые линии световых сигналов  $x = \pm ct$  делят псевдоевклидову плоскость пространства-времени на отдельные области (рис. 1.14). Внутри светового конуса в заштрихованной области лежат события, отделенные от события  $O(x = 0, t = 0)$  времениподобными интервалами:

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 > 0.$$

Для любого события  $A$  можно найти такую систему отсчета  $K'$ , в которой событие  $A$  произошло в одном месте с событием  $O(x' = 0, t' = 0)$ , т. е. в начале координат системы отсчета  $K'$ , так что обе точки, изображающие эти события, лежат на оси времени  $ct'$ . «Расстояние» в пространстве-времени между такими событиями равно (с точностью до постоянного множителя  $c$ ) просто промежутку времени  $t'$  между ними, измеренному в системе отсчета  $K'$ . Все события из верхней части заштрихованной области внутри светового конуса с точки зрения всех мыслимых систем отсчета произошли позже события  $O$ . Поэтому соответствующую



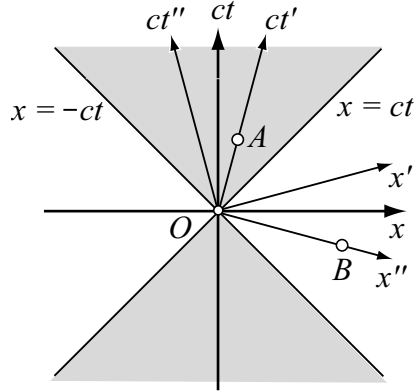


Рис. 1.14: Световой конус и различные области пространства-времени на диаграмме Минковского

область пространства-времени можно назвать *абсолютным будущим* по отношению к событию  $O$ . Событие  $O$  в принципе может быть причиной любого из этих событий. События из нижней части заштрихованной области произошли абсолютно раньше события  $O$ , и эта область может быть названа *абсолютным прошлым* по отношению к событию  $O$ .

Множество событий, лежащих вне светового конуса (в незаштрихованной области на (рис. 1.14), можно назвать *абсолютно удаленным* по отношению к событию  $O$ . Все такие события удалены от события  $O$  пространственноподобным интервалом ( $s^2 = c^2t^2 - x^2 < 0$ ) и не могут иметь с ним причинно-следственной связи. Для любого события  $B$  из абсолютно удаленного всегда можно найти такую систему отсчета  $K''$ , с точки зрения которой оно произошло одновременно с событием  $O$  (см. рис. 1.14) при  $t'' = 0$ , и изображающие эти события точки лежат на оси  $Ox''$ . «Расстояние» в пространстве-времени между такими событиями (пространственно-временной интервал) выражается мнимым числом, модуль которого равен пространственной координате  $x''$  события  $B$  в системе отсчета  $K''$ .

#### 1.8.4 Преобразование масштабов на диаграммах Минковского

Рассмотрим вопрос об изменении масштабов при переходе к косоугольным координатам пространства-времени на диаграммах Минковского. Для этого прежде всего попытаемся представить себе на диаграмме Минковского множество событий, удаленных на одинаковое «расстояние» от начала координат в пространстве-времени. На евклидовой плоскости множество точек, равноудаленных от начала координат, лежит на окружности. Поэтому при повороте осей координат единичные векторы вдоль новых осей изображаются отрезками той же длины, что и единичные векторы вдоль прежних осей. Но на псевдоевклидовой плоскости пространства-времени «расстояние» от начала координат до некоторого события — это интервал  $s = \sqrt{c^2t^2 - x^2}$ . Поэтому множество точек (событий), равноудаленных от начала координат, представляет собой гиперболу  $s^2 = c^2t^2 - x^2$ .

Рассмотрим гиперболу  $c^2t^2 - x^2 = 1$ , для которой  $s^2 = 1$  (рис. 1.15, а). Она

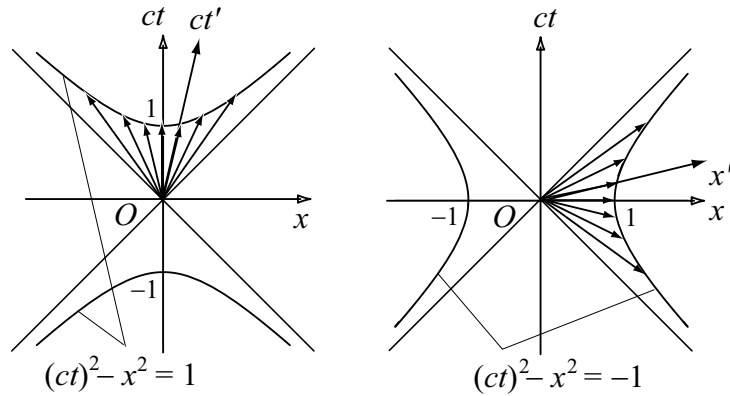


Рис. 1.15: Векторы единичной длины в пространстве-времени на диаграмме Минковского

пересекает ось времени  $ct$  в точках  $ct = \pm 1$ . Если на диаграмме Минковского провести лучи из начала координат до пересечения с этой гиперболой, то отрезок каждого такого луча определит единичную длину в данном (времениподобном) направлении на псевдоевклидовой плоскости пространства-времени. Иначе говоря, данная гипербола определяет масштаб для каждого времениподобного направления диаграммы Минковского. Для такой масштабной гиперболы возможна наглядная физическая интерпретация. Пусть из начала координат одновременно (при  $t = 0$ ) вылетают частицы, движущиеся со всевозможными скоростями, но обладающие одним и тем же собственным временем жизни  $\tau_0$ , таким, что  $c\tau_0 = 1$ . Тогда множество мировых точек, соответствующих событиям распада этих частиц, лежит в пространстве-времени как раз на масштабной гиперболе, а отрезки лучей, проведенные из начала координат до пересечения с масштабной гиперболой, представляют собой мировые линии таких частиц от рождения до распада.

Аналогично можно построить масштабную гиперболу  $c^2t^2 - x^2 = -1$  для пространственноподобных направлений на диаграмме Минковского (рис. 1.15, б). Эта гипербола пересекает пространственную ось в точках  $x = \pm 1$ . Отрезки лучей из начала координат до пересечения с такой гиперболой определяют единичные расстояния в соответствующих направлениях. В частности, отрезок луча в направлении оси  $Ox'$  задает единичную длину на этой пространственной оси системы отсчета  $K'$ .

Уравнения масштабных гипербол  $c^2t^2 - x^2 = \pm 1$  инвариантны относительно преобразований Лоренца. Поэтому и в косоугольных координатных осях  $(x', ct')$  эти гиперболы имеют уравнения  $c^2t'^2 - x'^2 = \pm 1$  и отсекают на осях  $x'$  и  $ct'$  единичные отрезки.

Используя масштабные гиперболы, можно дать на диаграмме Минковского наглядную геометрическую интерпретацию релятивистских кинематических эффектов. Рассмотрим, например, жесткий стержень единичной длины, расположенный вдоль оси  $Ox$  и покоящийся относительно системы отсчета  $K$ . На диаграмме Минковского (рис. 1.16) мировые линии концов этого стержня даются осью времени  $ct$  (начало координат системы отсчета  $K$ ) и прямой, параллельной оси времени и пересекающей ось  $Ox$  в точке  $x = 1$ . С точки зрения системы отсчета  $K'$  поло-

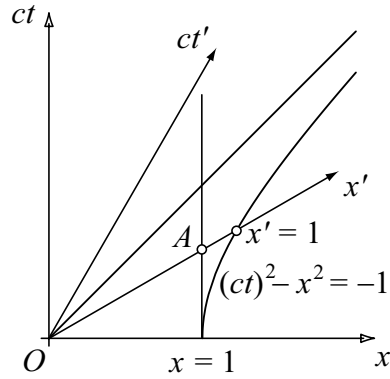


Рис. 1.16: Геометрическая интерпретация сокращения длины на диаграмме Минковского

жение концов данного стержня, взятое в один и тот же момент времени  $t' = 0$  в  $K'$ , соответствует на диаграмме Минковского точкам пересечения этих мировых линий с пространственной осью  $Ox'$ , т. е. точкам  $O$  и  $A$  (рис. 1.16). Но расстояние  $OA$  вдоль оси  $Ox'$  в системе отсчета  $K'$  *меньше единицы*, так как единичному расстоянию соответствует отрезок оси  $Ox'$  от точки  $O$  до пересечения с масштабной гиперболой. Таким образом, с точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K'$  длина движущегося относительно него стержня с единичной собственной длиной оказывается меньше единицы. Этот кинематический эффект сокращения Лоренца – Фитцджеральда свидетельствует о том, что результат измерения одного и того же стержня зависит от системы отсчета, в которой производится измерение.

Рекомендуется самостоятельно рассмотреть с помощью диаграммы Минковского случай, когда единичный стержень покоится относительно системы отсчета  $K'$  и показать, что с точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K$  длина такого стержня будет меньше единицы. Рекомендуется также дать геометрическую интерпретацию релятивистского кинематического эффекта замедления времени.

*Рекомендуемая литература:* [1], стр. 386–392, [3], стр. 43–57, [4], стр. 39–46.

## 1.9 Четырехмерные векторы

Представление о четырехмерном пространстве-времени позволяет придать теории относительности особенно простое и изящное математическое выражение. По словам Г. Минковского, «отныне понятия пространства самого по себе и времени самого по себе осуждены на вымирание и превращение в бледные тени, и только своего рода объединение этих двух понятий сохранит независимую реальность». Подчеркнем, что новые взгляды на пространство и время, выдвинутые теорией относительности, выросли на почве экспериментальной физики, и именно в этом заключается их сила.

### 1.9.1 Пространственные и временные координаты

Положение события в пространстве-времени определяется четырьмя величинами: пространственными координатами  $x, y, z$  и временем  $t$ . Насколько велико различие между пространственными и временной координатами? Радиолокационный способ определения расстояний *сводит измерение длины к измерению времени* и позволяет использовать для длины и времени одни и те же единицы и эталоны. Насколько несообразно применяемое на практике измерение интервалов в одном направлении пространства-времени в секундах, а в трех других направлениях — в метрах, можно уяснить из примера, приводимого Уилером [3]. Представим себе такое несовместимое применение различных мер длины, когда, например, ширина шоссе измеряется в футах, а его длина — в милях. Пересчетный множитель  $c$ , переводящий единицу длины во временном направлении пространства-времени (т. е. секунду) в единицу длины в пространственных направлениях (метр), равный скорости света  $3 \cdot 10^8$  м/с (точнее,  $2,99792 \cdot 10^8$  м/с), по существу случаен и в такой же мере обусловлен историческими причинами, как и пересчетный множитель 5280 фут/миль, переводящий мили в футы. Численное значение скорости света  $c = 2,99792 \cdot 10^8$  м/с определяется произвольным, не согласованным выбором единиц длины и времени.

Более того, преобразования Лоренца, выражающие переход от описания в одной инерциальной системе отсчета к другой, «перемешивают» пространственную и временную координаты, подобно тому как преобразование поворота системы координат в евклидовой геометрии перемешивает между собой пространственные координаты.

Но все это не означает, конечно, полной неразличимости (тождественности) пространства и времени. Различие пространственных и временной координат в четырехмерном мире проявляется в том, что в выражение для инвариантного расстояния (интервала) их квадраты входят *с противоположными знаками*, т. е. геометрия пространства-времени псевдоевклидова.

### 1.9.2 Инвариантность уравнений относительно преобразований Лоренца

Принцип относительности требует инвариантности уравнений, выражающих законы физики, относительно преобразований Лоренца. Выяснение инвариантности уравнений сильно облегчается при использовании четырехмерного пространства-времени и векторов в этом пространстве (так называемых четырехвекторов). Остановимся на этом вопросе подробнее.

Инвариантность уравнений физических законов относительно преобразований Лоренца — не единственное требование инвариантности уравнений, накладываемое на законы физики. Физическое содержание любого закона не должно зависеть, например, от ориентации координатных осей. Следовательно, законы физики должны быть также инвариантны относительно поворотов системы координат в пространстве. Эта инвариантность является более простой, и ее исследование сделает более ясным метод исследования инвариантности относительно преобразований Лоренца.

Обычно нам не приходится беспокоиться об инвариантности законов относи-

тельно поворотов системы координат. Это связано с тем, что при составлении уравнения, выражающего какой-либо физический закон, всегда требуют, чтобы все его члены были либо скалярами, либо векторами (либо вообще тензорами одного ранга). Тем самым автоматически обеспечивается инвариантность уравнений относительно поворотов координатных осей. Например, скалярное равенство  $a = b$  одновременно справедливо во всех системах координат, так как обе его части не изменяются при повороте осей координат.

Векторное равенство вида  $\vec{A} = \vec{B}$  эквивалентно трем равенствам  $A_x = B_x$ ,  $A_y = B_y$ ,  $A_z = B_z$ , связывающим проекции векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ . Значения этих проекций, разумеется, не инвариантны относительно поворотов системы осей. В результате поворота они примут, вообще говоря, другие значения  $A'_i$  и  $B'_i$  ( $i = x, y, z$ ). Но так как левая и правая части равенств, связывающих проекции векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , преобразуются при повороте осей координат идентичным образом, то после преобразования равенство отдельных проекций сохранится:  $A'_x = B'_x$ ,  $A'_y = B'_y$ ,  $A'_z = B'_z$ . В таких случаях говорят, что рассматриваемое равенство удовлетворяет требованию *ковариантности*. В противоположность этому равенство, связывающее проекцию вектора со скаляром, не остается справедливым при повороте осей координат.

Таким образом, инвариантность физического закона относительно преобразования координат требует ковариантности математического уравнения, выражающего этот закон.

По аналогии с поворотом системы координат в пространстве, преобразования Лоренца, описывающие переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, можно рассматривать как преобразование четырехмерного радиуса-вектора события  $(ct, x, y, z)$  в четырехмерном пространстве-времени. В этом четырехмерном пространстве можно ввести скаляры, векторы, тензоры. Инвариантность физического закона при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой с помощью преобразований Лоренца можно сделать очевидной, если выразить этот закон в ковариантной четырехмерной форме: все члены уравнения, выражающего закон, должны быть четырехмерными тензорами одного ранга (т. е. должны быть все либо скалярами, либо векторами).

Важный пример четырехмерного вектора — радиус-вектор некоторого события  $(ct, x, y, z)$ . В дальнейшем будут рассмотрены другие четырехвекторы, в частности, четырехвектор энергии-импульса  $(E/c, p_x, p_y, p_z)$ . При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой проекции любых четырехвекторов преобразуются одинаковым образом в соответствии с формулами преобразований Лоренца (1.17) или (1.18).

Закон преобразования четырехвекторов при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой (преобразования Лоренца) можно записать в компактной матричной форме. Введем для временной проекции четырехвектора обозначение  $x_0$ , а для пространственных проекций — обозначения  $x_1, x_2, x_3$ . В частности, для четырехмерного радиуса-вектора некоторого события  $x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ . Эти проекции в системе отсчета  $K$  будут выражаться через проекции в системе  $K'$  по следующим формулам:

$$x_i = \sum_{k=0}^3 a_{ik} x'_k \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (1.33)$$

где матрица преобразования  $a_{ik}$  в соответствии с формулами преобразований Лоренца (1.17) может быть записана следующим образом:

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v/c & 0 & 0 \\ \gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.34)$$

Из проекций любого четырехвектора можно образовать скалярную (инвариантную) величину. Для радиуса-вектора события такая величина — интервал

$$s = \sqrt{(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)},$$

остающийся неизменным при преобразованиях Лоренца подобно тому, как в евклидовой геометрии поворот осей координат оставляет неизменной длину радиуса-вектора  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Таким образом, в четырехмерном пространстве-времени под «длиной» четырехвектора следует понимать квадратный корень из *разности* квадратов его временной и пространственной проекций. Поэтому в псевдоевклидовой геометрии существуют векторы нулевой длины с отличными от нуля проекциями, что невозможно в евклидовой геометрии. Нулевую «длину» имеют, например, радиусы-векторы всех событий, лежащих на световом конусе.

Из проекций двух четырехвекторов также можно образовать инвариантную величину — скалярное произведение четырехвекторов. В отличие от евклидовой геометрии скалярное произведение выражается не суммой произведений одноименных проекций, а разностью произведений временных и пространственных проекций четырехвекторов:

$$a_0b_0 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = \text{inv}. \quad (1.35)$$

*Рекомендуемая литература:* [1], стр. 398–394, [2], стр. 544–548, [8], стр. 64–67, [4], стр. 18–19, 42–52.

## Глава 2

# Релятивистская динамика

Теория относительности требует пересмотра и уточнения законов ньютоновской механики. Как было показано выше, уравнения классической динамики (второй закон Ньютона) удовлетворяют принципу относительности в отношении преобразований Галилея. Но последние должны быть заменены преобразованиями Лоренца. Поэтому уравнения динамики следует изменить так, чтобы они оставались справедливыми при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой согласно преобразованиям Лоренца. При малых скоростях ( $v \ll c$ ) уравнения релятивистской динамики должны переходить в соответствующие классические уравнения, ибо в этой области справедливость ньютоновской механики подтверждается на опыте.

В данной главе рассматриваются следующие вопросы динамики теории относительности:

- Вывод релятивистского выражения для импульса частицы на основе анализа мысленного опыта по упругому столкновению частиц.
- Вывод релятивистского выражения для энергии частицы.
- Связь массы и энергии в теории относительности.
- Четырехвектор энергии-импульса и инвариантная форма законов сохранения.
- Экспериментальные подтверждения законов релятивистской динамики.
- Преобразование силы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.
- Задачи о движении заряженных частиц в постоянном однородном электрическом поле; в однородном магнитном поле.

### 2.1 Импульс частицы в релятивистской механике

Чтобы получить релятивистское выражение для импульса частицы, будем исходить из принципа соответствия, согласно которому в классической области медленных движений ( $v \ll c$ ) релятивистское выражение должно сводиться к ньюто-

новскому. Напомним, что в механике Ньютона вектор импульса  $\vec{p}$  как динамическая характеристика движущейся частицы пропорционален соответствующей кинематической характеристике движения, т. е. вектору скорости  $\vec{v}$ , а постоянный для данной частицы коэффициент пропорциональности — это ее инертная масса  $m$ . В классической физике масса  $m$  частицы — постоянная величина, не зависящая от состояния ее движения. Иными словами, импульс определяется как произведение массы частицы на ее скорость:  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

### 2.1.1 Принцип соответствия и релятивистский импульс

В релятивистской механике импульс частицы также определяется ее скоростью, но зависимость импульса от скорости оказывается сложнее, чем в классической механике и уже не сводится к простой пропорциональности. Так как импульс — вектор, то его направление должно совпадать с направлением скорости частицы. Это следует из соображений симметрии: в силу изотропности свободного пространства все направления в нем эквивалентны. Поэтому импульс свободной частицы должен быть направлен вдоль единственного физически выделенного направления, т. е. направления ее скорости. При обращении скорости в нуль импульс частицы также обращается в нуль.

Таким образом, релятивистское выражение для импульса должно иметь вид

$$\vec{p} = m_v \vec{v}, \quad (2.1)$$

где величина  $m_v$  может зависеть только от абсолютной величины скорости частицы  $v$ , а при  $v \ll c$  в силу принципа соответствия величина  $m_v$  должна совпадать с массой  $m$  частицы, имеющей тот смысл, который придается инертной массе в классической механике. Величину  $m_v$ , связывающую в соотношении (2.1) релятивистский импульс частицы с ее скоростью, называют иногда *релятивистской массой* частицы, а ее значение  $m_0$  при  $v \rightarrow 0$  — *массой покоя*. Ниже будет показано, что

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \text{т. е.} \quad m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.2)$$

Релятивистские выражения (2.2) для импульса и массы покоя легко получить на основе кинематического релятивистского эффекта замедления времени (1.6), если потребовать, чтобы составляющая импульса, поперечная к относительной скорости двух систем отсчета, имела в этих системах одинаковые значения. Последнее утверждение будет обосновано в следующем разделе.

### 2.1.2 Поперечная составляющая импульса в двух системах отсчета

Как ведут себя проекции импульса частицы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой? Оказывается, что проекция импульса, поперечная к относительной скорости двух систем отсчета, имеет в этих системах одинаковые значения.



Это утверждение становится очевидным, если для измерения импульса движущейся частицы принять по определению следующую процедуру. Выберем какую-либо среду, при движении сквозь которую частица испытывает сопротивление и в конце концов останавливается. Логично считать, что расстояние, проходимое частицей в такой среде до полной остановки, однозначно определяется начальным импульсом частицы. Поэтому будем измерять величину импульса свободной частицы длиной канала, пробиваемого частицей в некоторой эталонной среде. Выбором такой процедуры мы сводим измерение импульса к измерению пространственного расстояния. Но из релятивистской кинематики мы знаем, что длина отрезка в направлении, перпендикулярном к относительной скорости двух систем отсчета, одинакова в этих системах. Тем самым и составляющая импульса свободной частицы, поперечная к относительной скорости двух систем отсчета, имеет в этих системах одинаковые значения.

Приведенная выше процедура измерения импульса вполне возможна, но может показаться несколько искусственной и надуманной. К тому же такой метод измерения не позволяет сравнивать импульсы разных частиц, так как одна и та же среда может оказывать разное сопротивление их движению. Поэтому приведем другое обоснование утверждению о неизменности поперечных составляющих импульса при переходе от одной системы отсчета к другой.

Рассмотрим абсолютно упругое «скользящее» столкновение двух одинаковых частиц (рис 2.1). В системе центра масс это столкновение имеет вид, показанный на рис. 2.1, *а*: до столкновения частицы движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями, после столкновения частицы разлетаются в противоположные стороны с такими же по модулю скоростями. Другими словами, при упругом столкновении происходит только поворот векторов скоростей каждой из частиц на один и тот же угол  $\theta$ . При скользящем столкновении этот угол мал.

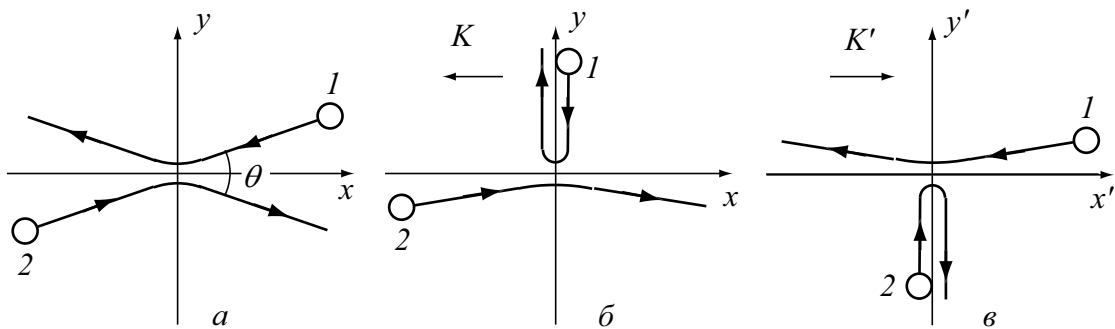


Рис. 2.1: Абсолютно упругое «скользящее» столкновение двух одинаковых частиц в разных системах отсчета

Как выглядит это же столкновение в других системах отсчета? Направим ось  $Ox$  вдоль биссектрисы угла  $\theta$  и введем систему отсчета  $K$ , движущуюся вдоль оси  $Ox$  относительно системы центра масс со скоростью, равной  $x$ -составляющей скорости частицы 1. В этой системе отсчета картина столкновения выглядит так, как показано на рис. 2.1, *б*: частица 1 движется параллельно оси  $Oy$ , изменив при столкновении направление скорости (и импульса) на противоположное. Введем также систему отсчета  $K'$ , движущуюся вдоль оси  $Ox$  относительно системы

центра масс со скоростью, равной  $x$ -составляющей скорости частицы 2. В этой системе отсчета картина столкновения выглядит так, как показано на рис. 2.1, *в*: здесь частица 2 движется параллельно оси  $Oy$ , изменяя при столкновении направление скорости на противоположное.

В системе отсчета центра масс полный импульс (векторная сумма импульсов частиц) равен нулю как до, так и после столкновения. При переходе к системам отсчета  $K$  и  $K'$  составляющая полного импульса в направлении оси  $Ox$  изменяется, но составляющая полного импульса вдоль оси  $Oy$  в каждой из этих систем отсчета по-прежнему равна нулю. Это значит, что  $y$ -составляющие импульсов каждой из частиц в системе отсчета  $K$  равны друг другу по абсолютной величине как до, так и после столкновения:  $|p_{1y}| = |p_{2y}|$ . Аналогичное соотношение справедливо и для  $y$ -составляющих импульсов частиц в системе отсчета  $K'$ , а именно  $|p'_{1y}| = |p'_{2y}|$ . Но из симметрии картин столкновения на рис. 2.1, *б* и рис. 2.1, *в* легко сделать вывод о том, что величина импульса частицы 1 в системе отсчета  $K$  равна величине импульса частицы 2 в системе отсчета  $K'$   $|p_{1y}| = |p'_{2y}|$ . Теперь, принимая во внимание равенство абсолютных величин  $y$ -составляющих импульсов  $|p_{1y}| = |p_{2y}|$  двух частиц в каждой из рассматриваемых систем отсчета, приходим к заключению, что  $y$ -составляющая импульса частицы 1 в системе отсчета  $K$  равна  $y$ -составляющей импульса этой же частицы в системе отсчета  $K'$ :  $|p_{1y}| = |p'_{1y}|$ . То же самое справедливо и для второй частицы. Таким образом, еще раз убеждаемся, что составляющая импульса частицы, поперечная к относительной скорости двух систем, не изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой.

### 2.1.3 Вывод выражения для релятивистского импульса

В отличие от импульса, поперечная составляющая *скорости* частицы имеет разные значения в двух системах отсчета  $K$  и  $K'$ . Это сразу следует из релятивистских формул преобразования скорости (1.23). Поэтому от классического выражения для импульса  $\vec{p} = m\vec{v}$  в виде произведения (постоянной) массы  $m$  частицы на ее скорость необходимо отказаться.

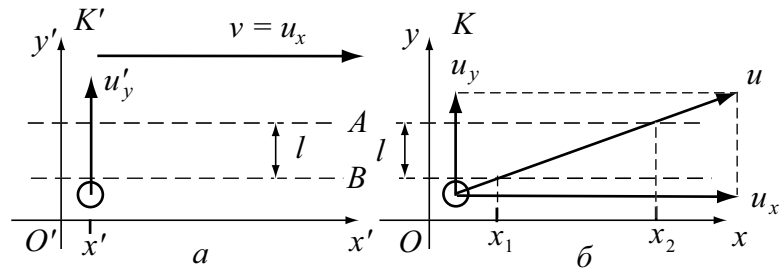


Рис. 2.2: К выводу выражения для релятивистского импульса

Чтобы получить релятивистское выражение для импульса, рассмотрим частицу, которая движется относительно системы отсчета  $K'$  в направлении оси  $Oy'$  с малой (нерелятивистской) скоростью  $u' \ll c$  (рис. 2.2, *а*). Для такой частицы  $x$ -составляющая скорости в системе  $K'$  равна нулю:  $u'_x = 0$ , а  $y$ -составляющая много меньше скорости света  $u'_y = u' \ll c$ . Проекции скорости этой частицы в системе

отсчета  $K$  найдем с помощью релятивистских формул преобразования скорости (1.23):

$$u_x = v, \quad u_y = u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (2.3)$$

где учтено, что  $u'_x = 0$ . В (2.3)  $v$  — скорость системы отсчета  $K'$  относительно  $K$ , которую можно принять сколь угодно близкой к скорости света. Таким образом, в системе отсчета  $K$   $y$ -составляющая скорости частицы меньше, чем в системе отсчета  $K'$ . Подчеркнем, что это уменьшение  $y$ -составляющей скорости при переходе от  $K'$  к  $K$  непосредственно связано с релятивистским кинематическим эффектом замедления времени (1.6): одинаковое в  $K'$  и в  $K$  расстояние  $l$  между штриховыми линиями  $A$  и  $B$  на рис. 2.2,  $a$ ,  $b$  частица проходит с точки зрения системы  $K$  за большее время, чем с точки зрения системы  $K'$ . В самом деле, в системе  $K'$  это собственное время  $\tau_0$ , так как оба события — пересечения штриховых линий  $A$  и  $B$  — происходят в  $K'$  при одном и том же значении координаты  $x'$  (рис. 2.2,  $a$ ), но в системе  $K$  промежуток времени  $\tau$  между этими же событиями (происходящими в точках с координатами  $x_1$  и  $x_2$ , рис. 2.2,  $b$ ) больше в соответствии с (1.6):  $\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Из-за такого замедления времени поперечная скорость частицы  $u_y = l/\tau$  в системе отсчета  $K$  оказывается меньше, чем скорость  $u'_y = l/\tau_0$  в  $K'$ . Разумеется, формулы преобразования скорости (2.3) дают такой же результат.

Рассматриваемая нами частица движется относительно системы  $K'$  с нерелятивистской скоростью  $u'_y = u' \ll c$ . Поэтому в силу принципа соответствия к ней применимо классическое выражение для импульса:

$$p'_y = m_0 u'_y. \quad (2.4)$$

Будем считать, что скорость  $v$  системы отсчета  $K'$  относительно  $K$  много больше поперечной скорости нашей частицы, так что выполняется соотношение  $v \gg u'_y$ . Так как в силу (2.3)  $u_y < u'_y$ , в системе  $K$  продольная скорость частицы много больше поперечной:  $u_x = v \gg u_y$ . Тогда модуль скорости частицы относительно системы отсчета  $K$   $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$  практически полностью определяется скоростью  $v$  самой системы отсчета  $K'$  относительно  $K$ :  $u = \sqrt{v^2 + u_y^2} \approx v$ . Это значит, что для поперечной составляющей импульса в системе  $K$ , в соответствии с (2.1), можно написать:

$$p_y = m_v u_y. \quad (2.5)$$

Но, как было показано выше,  $y$ -составляющая импульса частицы одинакова в системах отсчета  $K'$  и  $K$ :  $p'_y = p_y$ . Приравнявая правые части соотношений (2.4) и (2.5), и выражая  $u_y$  через  $u'_y$  с помощью (2.3), получаем искомое выражение (2.2) для релятивистской массы через массу покоя частицы и ее скорость:

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.6)$$

Уменьшение поперечной скорости частицы при переходе от  $K'$  к  $K$ , выражаемое формулой (2.3), компенсируется возрастанием релятивистской массы, так чтобы поперечный (к направлению относительной скорости систем отсчета  $K'$  и  $K$ )

импульс частицы оставался неизменным. Подчеркнем, что это возрастание массы связано с кинематическим релятивистским эффектом замедления времени, т. е. может рассматриваться как прямое следствие постулатов теории относительности.

Таким образом, для зависимости релятивистского импульса  $\vec{p} = m_v \vec{v}$  от скорости частицы получаем окончательно выражение (2.2), которое выше было приведено без вывода:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.7)$$

Скорость частицы в любой системе отсчета имеет конечную величину — она всегда меньше скорости света  $c$ , но это не налагает, как видно из формулы (2.7), никаких ограничений на величину импульса частицы: при  $v \rightarrow c$  импульс возрастает неограниченно.

*Рекомендуемая литература:* [1], стр. 399–404, [2], стр. 531–533 [3], стр. 142–150, [4], стр. 31–35.

## 2.2 Релятивистская энергия

### 2.2.1 Кинетическая энергия частицы

Прежде всего получим выражение для энергии частицы, согласующееся с релятивистской формулой (2.7) для импульса частицы. Будем исходить из того, что в механике скорость изменения импульса частицы  $d\vec{p}/dt$  определяется полной силой  $\vec{F}$ , действующей на частицу:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (2.8)$$

а скорость изменения кинетической энергии  $E_{\text{kin}}$  равна работе, совершаемой полной силой за единицу времени:

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (2.9)$$

Подставляя в соотношение (2.9) силу  $\vec{F}$  из (2.8), можем написать:

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(m_v \vec{v}). \quad (2.10)$$

Из этого соотношения и будем исходить при получении релятивистского выражения для кинетической энергии. Перепишем формулу (2.6) для релятивистской массы следующим образом:

$$m_v^2(1 - v^2/c^2) = m_0^2. \quad (2.11)$$

Умножим обе части (2.11) на  $c^2$  и раскроем скобки:

$$m_v^2 c^2 - (m_v \vec{v}^2)^2 = m_0^2 c^2. \quad (2.12)$$

Теперь продифференцируем обе части (2.12) по времени. Учитывая, что производная правой части (2.12) равна нулю, имеем:

$$2m_v \frac{d}{dt}(m_v c^2) - 2m_v \vec{v} \frac{d}{dt}(m_v \vec{v}) = 0, \quad (2.13)$$

откуда

$$\frac{d}{dt}(m_v c^2) = \vec{v} \frac{d}{dt}(m_v \vec{v}). \quad (2.14)$$

Сравним соотношения (2.14) и (2.10). Правые части у них совпадают. Поэтому левая часть (2.14), как и в (2.10), должна быть равна скорости изменения кинетической энергии частицы:

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_v c^2) = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.15)$$

Так как кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, из (2.15) находим:

$$E_{\text{kin}} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right). \quad (2.16)$$

Формула (2.16) дает релятивистское выражение для кинетической энергии частицы. Если скорость частицы мала по сравнению со скоростью света, правую часть выражения (2.16) можно разложить в ряд по степеням  $v/c$ , сохранив несколько первых членов:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots \quad (2.17)$$

Здесь первый член совпадает с обычным выражением для кинетической энергии частицы в нерелятивистской физике.

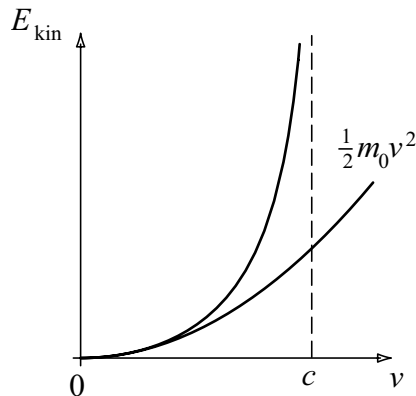


Рис. 2.3: Зависимость кинетической энергии от скорости частицы

Различие между классическим и релятивистским выражениями для кинетической энергии становится особенно существенным, когда скорость частицы приближается к скорости света. При  $v \rightarrow c$  релятивистская кинетическая энергия

(2.16) неограниченно возрастает: частица, обладающая конечной массой покоя  $m_0$ , при движении со скоростью света имела бы бесконечно большую кинетическую энергию. Зависимость кинетической энергии от скорости частицы  $E_{\text{kin}}(v)$  показана на рис. 2.3. На этом рисунке показана также зависимость классической кинетической энергии  $\frac{1}{2}m_0v^2$  от скорости частицы. При  $v \ll c$  обе кривые совпадают, но при  $v \rightarrow c$  релятивистская кривая показывает неограниченный рост  $E_{\text{kin}}(v)$ , приближаясь к вертикальной асимптоте  $v = c$ .

## 2.2.2 Масса покоя и энергия покоя

Вернемся к формуле (2.15), согласно которой приращение кинетической энергии тела  $E_{\text{kin}}(v)$  сопровождается пропорциональным приращением его релятивистской массы  $m_v$ . Вспомним, что важнейшее свойство энергии состоит в способности превращаться из одной формы в другую в эквивалентных количествах при различных физических процессах — именно в этом заключается содержание закона сохранения и превращения энергии, одного из наиболее общих законов природы. Поэтому естественно ожидать, что возрастание релятивистской массы должно происходить не только при сообщении телу кинетической энергии, но при любом увеличении энергии тела, независимо от конкретного вида энергии. Отсюда можно сделать фундаментальное заключение о том, что полная энергия тела пропорциональна его релятивистской массе независимо от того, из каких конкретных видов она состоит.

Поясним сказанное на следующем простом примере. Рассмотрим абсолютно неупругое столкновение двух одинаковых тел, движущихся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. В результате такого столкновения образуется одно тело, которое в лабораторной системе отсчета покоится (рис. 2.4, а). Допустим, что абсолютная величина скорости каждого из тел до столкновения равна  $v$ , а масса покоя  $m_0$ . Массу покоя образовавшегося тела обозначим  $M_0$ .

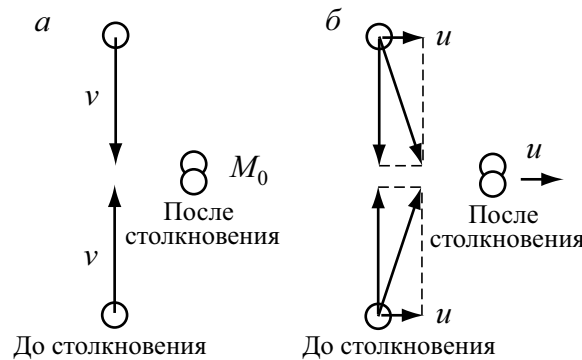


Рис. 2.4: Картина абсолютно неупругого столкновения двух одинаковых тел в двух системах отсчета

Теперь рассмотрим это же столкновение с точки зрения наблюдателя в другой системе отсчета  $K'$ , которая движется относительно исходной (лабораторной) системы отсчета  $K$  перпендикулярно направлению движения сталкивающихся частиц (рис. 2.4, б) с малой (нерелятивистской) скоростью  $-u$ . Так как  $u \ll c$ , то для

преобразования скорости при переходе от  $K$  к  $K'$  можно использовать классический закон сложения скоростей.

Закон сохранения импульса требует, чтобы полный импульс тел до столкновения был равен импульсу образовавшегося тела, причем это утверждение должно быть справедливо во всех инерциальных системах отсчета. В лабораторной системе полный импульс равен нулю как до, так и после столкновения. В системе отсчета  $K'$  полный импульс до столкновения приблизительно равен

$$\frac{2m_0u}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

(скорость каждого из тел в знаменателе выражения для релятивистского импульса при  $u \ll v$  можно полагать равной  $v$  и в системе отсчета  $K'$ ). После столкновения полный импульс приблизительно равен  $M_0u$ , так как при  $u \ll c$  массу образовавшегося тела и в системе отсчета  $K'$  можно полагать равной массе покоя.

Таким образом, из закона сохранения импульса, примененного в системе отсчета  $K'$ , находим, что

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 2m_0 \quad (2.18)$$

— масса покоя тела, образовавшегося при неупругом столкновении, больше суммарной массы покоя исходных тел. Рассмотренный пример неупругого столкновения, в котором происходит превращение кинетической энергии сталкивающихся частиц во внутреннюю энергию (в энергию теплового движения молекул), показывает, что увеличение внутренней энергии тела, как и увеличение кинетической энергии, сопровождается пропорциональным увеличением массы.

Этот вывод следует распространить на все виды энергии: нагретое тело имеет большую массу покоя, чем холодное, сжатая или растянутая пружина имеет большую массу, чем недеформированная, и т.п. Обобщение соотношения (2.15) на все виды энергии приводит нас к знаменитой формуле Эйнштейна, связывающей энергию и массу:

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.19)$$

Из формулы (2.19) следует, в частности, что покоящееся тело обладает энергией  $E_0 = m_0c^2$ . Эту энергию называют *энергией покоя*.

В рассмотренном выше примере неупругого столкновения двух тел равенство (2.18), выражающее закон сохранения импульса в системе отсчета  $K'$ , выражает в то же время закон сохранения релятивистской энергии в системе отсчета  $K$ : умножив обе части равенства (2.18) на  $c^2$ , в левой части получим релятивистскую энергию образовавшегося тела (энергию покоя), а в правой — суммарную релятивистскую энергию исходных тел.

Заметим, что согласно представлениям классической механики энергия при неупругих столкновениях не сохранялась, так как внутренняя энергия (энергия покоя) не была включена в механическую энергию.

### 2.2.3 Пропорциональность массы и энергии

Закон сохранения импульса в соединении с принципом относительности, требующим, чтобы этот закон выполнялся сразу во всех инерциальных системах отсчета, приводит, как мы видели, к закону сохранения релятивистской энергии.

Пропорциональность массы и энергии в любых формах тесно связана с сохранением импульса. Действительно, если бы в замкнутой системе при переходе энергии из одной формы в другую масса системы изменялась, то сохранение импульса было бы невозможным. Внутренние превращения в системе не могут изменить импульса системы в целом, но ясно, что и скорость движения изолированного тела относительно какой-либо инерциальной системы отсчета остается при этом неизменной в соответствии с принципом относительности. Так как ни скорость, ни импульс не изменяются, то и масса покоя изолированного тела должна оставаться постоянной, какие бы внутренние превращения в нем ни происходили. Это значит, что определенное количество энергии в любой форме пропорционально одной и той же массе.

Закон пропорциональности массы и энергии представляет собой один из самых значительных выводов теории относительности. Взаимосвязь массы и энергии, безусловно, заслуживает более подробного обсуждения (см., например, [7], стр. 152–156).

В механике масса тела есть физическая величина, характеризующая количественно инертные свойства тела, т. е. масса представляет собой меру инертности тела. Это так называемая *инертная масса*. С другой стороны, масса характеризует способность тела создавать поле тяготения и испытывать силу в поле тяготения, создаваемом другими телами. Это тяготеющая, или *гравитационная масса*. Инертность тела и его способность к гравитационным взаимодействиям представляют собой проявления совершенно различных свойств материи. Однако то, что меры этих различных проявлений называют одним и тем же словом «масса», не случайно, а обусловлено тем, что оба свойства всегда существуют совместно и меры этих свойств всегда друг другу пропорциональны, так что при надлежащем выборе единиц их можно выражать одним и тем же числом.

Равенство инертной и гравитационной масс представляет собой экспериментальный факт, многократно подтвержденный с огромной степенью точности в прецизионных опытах Этвеша, Дикке, Брагинского и других. Как же следует отвечать на вопрос: есть ли инертная и гравитационная масса одно и то же или нет? По своим проявлениям они различны, но неразрывно связаны друг с другом, и их численные характеристики всегда пропорциональны. Такое положение вещей в физике характеризуют термином «эквивалентность».

Аналогичный вопрос возникает в связи с понятиями массы и энергии в теории относительности. Проявления свойств материи, соответствующих массе и энергии, бесспорно различны. Но теория относительности утверждает, что эти свойства неразрывно связаны, а численные характеристики этих свойств пропорциональны друг другу. Поэтому можно говорить об эквивалентности массы и энергии. Всякое изменение энергии системы сопровождается эквивалентным изменением ее массы. Это относится как к изменениям кинетической энергии тела, при которых масса покоя остается неизменной, так и к изменениям различных видов внутренней энергии, при которых масса покоя изменяется.



Опыт показывает, что в громадном большинстве физических процессов, в которых изменяется внутренняя энергия, масса покоя остается неизменной. Как это согласовать с законом пропорциональности массы и энергии? Дело в том, что как правило подавляющая часть внутренней энергии (и соответствующей ей массы покоя) в превращениях не участвует, и поэтому определяемая взвешиванием масса покоя практически сохраняется несмотря на то, что тело выделяет или поглощает энергию. Это объясняется просто недостаточной точностью взвешивания. Для иллюстрации рассмотрим несколько численных примеров.

1. Энергия, высвобождающаяся при сгорании нефти, взрыве динамита и других химических превращениях, представляется нам в масштабах повседневного опыта громадной. Однако если пересчитать ее величину на эквивалентную массу, то окажется, что эта масса не составляет и  $\sim 10^{-10}$  от полной величины массы покоя. Например, при соединении 1 г водорода с 8 г кислорода выделяется около  $10^{-12}$  эрг энергии. Это значит, что масса покоя образовавшейся воды на  $\Delta m = \Delta E/c^2 \approx 10^{-9}$  г меньше массы исходных веществ. Такое изменение массы слишком малó для того, чтобы его можно было обнаружить с помощью современных приборов.
2. При неупругом столкновении двух частиц по 1 г, разогнанных навстречу другу другу до скорости 1 км/с, добавочная масса покоя образовавшегося тела составляет  $\Delta m = 2(\frac{1}{2}mv^2)/c^2 \approx 10^{-11}$  г. Мы здесь использовали классическое выражение для кинетической энергии, что безусловно допустимо при скоростях порядка 1 км/с. Ясно, что добавочная масса здесь намного меньше ошибки, с которой может быть измерена масса 1 г.
3. Масса атома водорода меньше суммы масс покоя входящих в его состав протона и электрона на величину энергии ионизации атома (энергии связи), деленной на  $c^2$ . Энергия ионизации атома водорода равна 13,5 эВ, или  $2,2 \cdot 10^{-11}$  эрг, откуда  $\Delta m = 2,4 \cdot 10^{-32}$  г, что составляет  $\sim 10^{-8}$  массы атома водорода. Это также очень малая величина.

Естественно задать вопрос о более глубокой причине того, что при обычных условиях подавляющая часть энергии (и соответствующей ей массы покоя) находится в совершенно пассивном состоянии и в превращениях не участвует. На этот вопрос теория относительности не может дать ответа. Ответ следует искать в области квантовых закономерностей, одной из характерных особенностей которых является существование устойчивых состояний с дискретными уровнями энергии. Для элементарных частиц энергия, соответствующая массе покоя, либо превращается в активную форму (в энергию излучения) целиком, либо вовсе не изменяется. Примером может служить превращение пары электрон — позитрон в гамма-излучение (аннигиляция). У атомов подавляющая часть массы пребывает в форме массы покоя элементарных частиц, изменения которой в обычных химических процессах не происходит. Даже в ядерных реакциях энергия, соответствующая массе покоя тяжелых частиц (нуклонов), входящих в состав ядер, остается пассивной. Но здесь активная часть энергии, т. е. энергия взаимодействия нуклонов, составляет уже заметную долю энергии покоя.

Из приведенных примеров ясно, что экспериментальное подтверждение релятивистского закона пропорциональности энергии и массы следует искать в ядерной физике и физике элементарных частиц. Для описания процессов с атомными ядрами и элементарными частицами, характерная особенность которых заключается в изменениях энергии системы, сравнимых с ее энергией покоя, релятивистские законы абсолютно необходимы.

Рассмотрим в качестве примера ядерную реакцию, вызванную полученными на ускорителе протонами, а именно превращение ядра лития в две альфа-частицы:



Закон пропорциональности массы и энергии позволяет сделать предсказания относительно энергетического выхода ядерной реакции. Значения масс покоя атомных ядер могут быть определены с высокой точностью при помощи масс-спектрометра. Так, масса покоя протона  ${}^1_1\text{H}$  равна 1,00728 атомной единицы массы (а.е.м.), масса ядра  ${}^7_3\text{Li}$  — 7,01601 а.е.м., а масса альфа-частицы  ${}^4_2\text{He}$  — 4,00260 а.е.м. Суммарная масса покоя ядер, вступающих в реакцию, равна 8,02329 а.е.м., а масса покоя конечных продуктов реакции меньше: она составляет 8,00520 а.е.м. Таким образом, в результате ядерной реакции масса покоя уменьшается на величину  $\Delta m = 0,01809$  а.е.м. Соответствующая этому изменению массы энергия  $\Delta mc^2 = 16,85$  МэВ с хорошей точностью совпадает с измеренной на опыте кинетической энергией образующихся альфа-частиц. (Первоначальная кинетическая энергия протона мала по сравнению с этой величиной и поэтому в расчете энергетического выхода реакции не принимается во внимание).

Закон пропорциональности энергии и массы можно применить к анализу устойчивости атомных ядер. Рассмотрим атомное ядро массы  $M$ , состоящее из  $Z$  протонов и  $A - Z$  нейтронов ( $Z$  — атомный номер, т. е. заряд ядра в единицах элементарного заряда,  $A$  — массовое число, т. е. полное число нуклонов в ядре). Энергия покоя ядра  $Mc^2$  складывается из энергии покоя всех входящих в него частиц (нуклонов) и энергии внутреннего движения и взаимодействия нуклонов. Для того чтобы ядро было устойчивым и не могло самопроизвольно распасться на составные части, необходимо, чтобы энергия покоя ядра была меньше суммарной энергии покоя этих частей:

$$Mc^2 < \sum_i m_i c^2.$$

Разность  $\sum_i m_i c^2 - Mc^2$  служит мерой устойчивости ядра и называется *энергией связи*. Для ядер, содержащих 50 — 60 нуклонов, энергия связи составляет около 9 МэВ на один нуклон, т. е. достигает почти 1% энергии покоя.

Наряду с энергией связи мерой устойчивости ядра может служить эквивалентная величина  $\Delta m$ , называемая *дефектом массы*:

$$\Delta m = \sum_i m_i - M = Zm_p + (A - Z)m_n - M,$$

где  $m_p$  и  $m_n$  — массы покоя протона и нейтрона соответственно. Если дефект массы положителен, ядро устойчиво по отношению к распаду на отдельные протоны и нейтроны. Однако это еще не означает, что ядро абсолютно устойчиво. Различие в

величине энергии связи на один нуклон у разных ядер может привести к тому, что устойчивое по отношению к распаду на отдельные нуклоны ядро не будет устойчивым по отношению к распаду на две части. Такой распад возможен, если дефект массы исходного ядра  $\Delta m$  меньше, чем сумма дефектов масс  $\Delta m_1 + \Delta m_2$  двух ядер, образующихся в результате распада. Это обстоятельство можно использовать для высвобождения ядерной энергии.

Например, ядро изотопа бериллия  ${}^8_4\text{Be}$  имеет массу  $M = 8,00531$  а.е.м., которая меньше, чем сумма масс покоя составляющих его четырех протонов и четырех нейтронов  $\sum_i m_i = 4 \cdot 1,00728 + 4 \cdot 1,00867 = 8,06380$ , но больше, чем суммарная масса покоя двух ядер гелия  ${}^4_2\text{He}$  ( $2 \cdot 4,00260 = 8,00520$  а.е.м.). Поэтому ядро бериллия  ${}^8_4\text{Be}$ , устойчивое по отношению к распаду на отдельные нуклоны, должно самопроизвольно распадаться на две альфа-частицы, что и происходит в действительности.

Дефект массы ядра другого изотопа бериллия  ${}^9_4\text{Be}$  не только положителен, но и превышает сумму дефектов масс всех ядер, на которые ядро  ${}^9_4\text{Be}$  могло бы распадаться. Такое ядро абсолютно устойчиво.

По материалу данного раздела рекомендуется решить следующие задачи из [6]: 747, 749, 756, 757, 758.

*Рекомендуемая литература:* [1], стр. 408–414, [2], стр. 536–539, [3], стр. 150–174, [4], стр. 19–22, стр. 35–38.

## 2.3 Преобразование энергии-импульса

Релятивистский импульс был введен выше таким образом, чтобы при столкновениях полный импульс системы частиц сохранялся. Затем было показано, что с сохранением импульса тесно связано сохранение релятивистской энергии: к закону сохранения энергии нас привело вытекающее из принципа относительности требование, чтобы импульс сохранялся во всех инерциальных системах отсчета.

Законы сохранения энергии и импульса для замкнутой системы частиц, как и все другие законы физики, в соответствии с принципом относительности должны выполняться во всех инерциальных системах отсчета. Другими словами, эти законы должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Чтобы сделать очевидным выполнение законов сохранения энергии и импульса сразу во всех инерциальных системах отсчета, нужно придать уравнениям этих законов ковариантную четырехмерную форму: члены уравнения, выражающего закон, должны быть компонентами четырехмерного вектора. Ниже мы покажем, что компоненты вектора релятивистского импульса частицы можно рассматривать как пространственные компоненты некоторого четырехмерного вектора, а именно *четырёхмерного вектора энергии-импульса*, временной компонентой которого является энергия частицы, деленная на  $c$ .

Напомним релятивистские выражения для энергии (2.19) и импульса (2.2) частицы:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.20)$$

Сравнивая эти выражения, легко получить простую формулу, выражающую импульс частицы через ее скорость и энергию:

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}. \quad (2.21)$$

Возведем обе части первой из формул (2.20) в квадрат, разделим на  $c^2$  и запишем в следующем виде:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \left(\frac{E}{c^2}\right)^2 v^2 = m_0^2 c^2. \quad (2.22)$$

Здесь второе слагаемое в левой части в соответствии с (2.21) представляет собой квадрат вектора релятивистского импульса. Поэтому соотношение (2.22) выражает связь между энергией и импульсом частицы:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2. \quad (2.23)$$

Это одна из важнейших формул релятивистской физики.

Обратим внимание на то, что в правой части формулы (2.23) стоит величина, не зависящая от выбора системы отсчета. Поэтому, хотя каждое из слагаемых в левой части имеет разные значения в различных системах отсчета, вся левая часть (2.23) не зависит от выбора системы отсчета, т. е. представляет собой *релятивистский инвариант*. Можно предположить, что это квадрат четырехмерного вектора, пространственные компоненты которого представлены трехмерным вектором релятивистского импульса, а временная компонента — релятивистской энергией, деленной на  $c$ . В таком случае четверка величин  $(E/c, p_x, p_y, p_z)$  должна при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой преобразовываться по тем же правилам, что и проекции любого четырехмерного вектора, например, радиуса-вектора события  $(ct, x, y, z)$ , т. е. в соответствии с преобразованиями Лоренца (1.17) или (1.18).

Чтобы с полной достоверностью показать, что при переходе от одной системы отсчета к другой четверка величин  $(E/c, p_x, p_y, p_z)$  преобразуется как четырехмерный вектор, рассмотрим в пространстве Минковского два близких события на мировой линии некоторой частицы и введем соединяющий эти события четырехмерный вектор:

$$(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z). \quad (2.24)$$

Вектор (2.24) сохранит свои трансформационные свойства (т. е. закон преобразования при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой), если все его проекции умножить на одну и ту же инвариантную величину (скаляр). Чтобы перейти от (2.24) к четверке величин  $(E/c, p_x, p_y, p_z)$ , умножим все проекции (2.24) на инвариантную величину  $m_0$  — массу покоя частицы, и разделим на инвариантную величину  $\Delta t_0$  — промежуток собственного времени между рассматриваемыми близкими событиями на мировой линии частицы. В результате получим снова четырехмерный вектор, т. е. четырехкомпонентную величину с определенным законом преобразования (1.17):

$$\left(m_0 c \frac{\Delta t}{\Delta t_0}, \quad m_0 \frac{\Delta x}{\Delta t_0}, \quad m_0 \frac{\Delta y}{\Delta t_0}, \quad m_0 \frac{\Delta z}{\Delta t_0}\right). \quad (2.25)$$

Подставим теперь в (2.25) вместо  $\Delta t_0$  его выражение через  $\Delta t$ , т. е. через промежуток времени между рассматриваемыми событиями в исходной (лабораторной) системе отсчета, используя соотношение (1.6):

$$\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (2.26)$$

и учтем, что получающиеся в результате такой подстановки отношения равны соответствующим проекциям вектора скорости частицы:  $\Delta x/\Delta t = v_x$ ,  $\Delta y/\Delta t = v_y$ ,  $\Delta z/\Delta t = v_z$ . Таким образом, четырехмерный вектор (2.25) принимает следующий вид:

$$\left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right). \quad (2.27)$$

Вспоминая формулы (2.20), видим, что временная компонента этого четырехмерного вектора совпадает с релятивистской энергией, деленной на  $c$ , а пространственные компоненты совпадают с компонентами (трехмерного) вектора релятивистского импульса:

$$\left(\frac{E}{c}, \quad p_x, \quad p_y, \quad p_z\right). \quad (2.28)$$

Таким образом, в теории относительности энергия и импульс — это временная и пространственные компоненты одной физической величины — четырехвектора энергии-импульса.

При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой компоненты импульса «перемешиваются» с энергией подобно тому как пространственные компоненты радиуса-вектора события «перемешиваются» с его временной координатой. Закон преобразования четверки величин (2.28) при переходе от системы отсчета  $K'$  к системе  $K$  легко получить из формул преобразований Лоренца (1.17) простой заменой  $ct \rightarrow E/c$ ,  $x \rightarrow p_x$ ,  $y \rightarrow p_y$ ,  $z \rightarrow p_z$ :

$$E = \frac{E' + v p_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_x = \frac{p'_x + v E'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z. \quad (2.29)$$

Разность квадратов временной и пространственной проекций четырехвектора энергии-импульса некоторой частицы (т. е. квадрат его «длины») дается левой частью формулы (2.23). Эта величина не изменяется при преобразованиях Лоренца (2.29), т. е. представляет собой релятивистский инвариант. Физический смысл этого инварианта — квадрат энергии покоя частицы, деленной на  $c$ .

## 2.4 Закон сохранения энергии-импульса

Теория относительности соединяет существовавшие в дорелятивистской физике независимо друг от друга законы сохранения импульса и энергии в один закон — закон сохранения энергии-импульса.

В классической физике существовала некоторая неопределенность в выборе начала отсчета энергии физической системы. Эта неопределенность позволяла, в частности, не включать внутреннюю энергию (например, энергию хаотического теплового движения частиц, образующих тела) в механическую энергию системы. Поэтому в таких процессах, как, например, неупругое столкновение тел, при сохранении полного импульса системы механическая энергия не сохранялась. Но в теории относительности закон сохранения импульса сам по себе, без одновременного сохранения релятивистской энергии, невозможен: при переходе к другой инерциальной системе отсчета компоненты импульса «перемешиваются» с энергией. Для выполнения принципа относительности абсолютно необходимо, чтобы сохранение трех пространственных компонент четырехвектора импульса сопровождалось сохранением четвертой — временной — компоненты, т. е. релятивистской энергии.

Необходимость включения энергии покоя (всех видов внутренней энергии) в энергию системы можно увидеть и из закона преобразования энергии-импульса (2.29), перейдя в нем к предельному случаю  $v/c \rightarrow 0$ . Очевидно, что в этом предельном случае выражение для энергии  $E'$  в (2.29) должно стремиться к  $m_0c^2$ , так как только тогда формула для преобразования импульса (2.29) будет соответствовать классическому закону сложения скоростей:  $p_x = p'_x + m_0v$ , или  $v_x = v'_x + v$ . Введением энергии покоя теория относительности устраняет существовавшую в дорелятивистской физике неопределенность в выборе начала отсчета энергии.

\* \* \*

Сделаем несколько замечаний, относящихся к закону сохранения энергии-импульса в теории относительности.

Систему частиц как целое можно характеризовать ее энергией  $E$  и импульсом  $\vec{p}$ . В общем случае, однако, невозможно найти выражения для энергии и импульса системы через соответствующие величины для отдельных частиц. Такие выражения можно написать для *системы невзаимодействующих частиц*:

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{m_{i0}c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}, \quad \vec{p} = \sum_{i=1}^N \frac{m_{i0}\vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}. \quad (2.30)$$

В системе невзаимодействующих частиц скорость каждой частицы остается постоянной, и сохранение энергии и импульса системы тривиальным образом следует из постоянства каждого из слагаемых.

Но формулы (2.30) применимы также в случае системы быстрых частиц, взаимодействующих друг с другом только во время столкновений, причем необходимо помнить, что аддитивность энергии и импульса, выражаемая формулами (2.30), имеет место лишь до начала и после конца взаимодействия (столкновения), тогда как в промежуточное время формулы (2.30) неприменимы. Закон сохранения энергии-импульса, удовлетворяющий принципу относительности, т. е. справедливый сразу во всех инерциальных системах отсчета, для такой системы частиц может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{m_{i0}c^2}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} &= \sum_{i=1}^{N^*} \frac{m_{i0}^*c^2}{\sqrt{1-v_i^{*2}/c^2}}, \\ \sum_{i=1}^N \frac{m_{i0}\vec{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} &= \sum_{i=1}^{N^*} \frac{m_{i0}^*\vec{v}_i^*}{\sqrt{1-v_i^{*2}/c^2}}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где  $\vec{v}_i$  и  $\vec{v}_i^*$  — скорость  $i$ -й частицы до начала и после конца взаимодействия,  $m_{i0}$  и  $m_{i0}^*$  — масса  $i$ -й частицы до и после взаимодействия. Массы отдельных частиц, как и число слагаемых в суммах слева и справа могут различаться в связи с тем, что сами частицы и даже их количество могут претерпеть изменения в результате столкновения. Примером процесса с изменением числа частиц может служить рождение пары электрон – позитрон при столкновении быстрых заряженных частиц. Подобные процессы носят название *неупругих*, так как кинетическая энергия сталкивающихся частиц частично превращается в энергию покоя образующихся новых частиц. Все усложнения, происходящие в теории вследствие изменения числа частиц, никоим образом не сказываются на справедливости закона сохранения энергии-импульса (2.31).

Напомним, что при выводе релятивистского выражения для импульса мы исходили из закона его сохранения. В связи с этим может возникнуть вопрос: в чем же заключается физическое содержание закона сохранения импульса, если импульс определен так, чтобы он сохранялся? Не являются ли законы сохранения простым следствием определения, а не законами природы? Нужно ли при этом искать их экспериментальное подтверждение?

Дело в том, что при выводе выражения для импульса рассматривался простейший пример упругого столкновения двух частиц. Но сохранение энергии-импульса при самых разнообразных, значительно более сложных процессах, включая неупругие столкновения с превращениями частиц уже не является следствием определения, а представляет собой фундаментальный закон природы. Экспериментальная проверка выполнения этого закона производится ежедневно в ходе постоянной регистрации столкновений частиц высоких энергий в многочисленных лабораториях всего мира.

По материалу данного раздела рекомендуется решить следующие задачи из [6]: 762, 763, 766, 769, 770, 771, 772.

*Рекомендуемая литература:* [1], стр. 405–407, [2], стр. 540–542, [3], стр. 160–174, [4], стр. 46–49.

## 2.5 Преобразование силы

Как было показано выше, законы сохранения энергии и импульса удовлетворяют принципу относительности, т. е. выполняются во всех инерциальных системах отсчета. Релятивистская инвариантность этих законов стала очевидной, когда было показано, что энергия и импульс образуют временную и пространственную составляющие одного четырехмерного вектора — четырехвектора энергии-импульса.

Основное уравнение динамики, связывающее скорость изменения релятивистского импульса частицы с действующей на нее силой, а именно

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (2.32)$$

также удовлетворяет принципу относительности, хотя и не имеет четырехмерной формы, в которой релятивистская инвариантность уравнения была бы очевидной. Трехмерный импульс  $\vec{p}$  — это пространственная часть четырехвектора, но его производная по времени уже таковой не является и обладает иными трансформационными свойствами.

Основному уравнению релятивистской динамики можно придать четырехмерную форму, если в левой части (2.32) вместо скорости изменения импульса частицы в выбранной системе отсчета рассматривать производную четырехвектора энергии-импульса частицы по инвариантному собственному времени этой частицы, т. е.  $(\frac{1}{c}dE/d\tau, d\vec{p}/d\tau)$ . Тогда в правой части основного уравнения динамики вместо обычной силы будет стоять некоторый четырехмерный вектор, называемый *силой Минковского*. Не приводя явных выражений для сил Минковского при разных взаимодействиях, отметим лишь, что физическое содержание пространственной части такого четырехмерного релятивистски инвариантного уравнения основного закона динамики эквивалентно обычному трехмерному закону (2.32), а временная составляющая соответствует обычному уравнению

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (2.33)$$

связывающему скорость изменения энергии частицы с работой, совершаемой в единицу времени действующей на частицу силой  $\vec{F}$ .

В классической механике уравнение (2.32) согласуется с принципом относительности, когда переход от одной инерциальной системы отсчета к другой производится по формулам преобразований Галилея. Но в релятивистской механике величины, входящие в левую и правую части уравнения (2.32), не остаются неизменными при переходе к другой системе отсчета по преобразованиям Лоренца. Найдем закон преобразования этих величин при переходе от инерциальной системы  $K'$ , в которой рассматриваемая частица в данный момент покоится (так называемая сопутствующая инерциальная система отсчета), к системе отсчета  $K$ , относительно которой система  $K'$  движется с некоторой скоростью  $\vec{v}$ . Такую же скорость  $\vec{v}$  в системе отсчета  $K$  имеет в данный момент и рассматриваемая частица.

Из формул преобразований Лоренца для энергии-импульса (2.29) следует, что в системах отсчета  $K$  и  $K'$  приращения поперечных (к относительной скорости систем отсчета) компонент импульса частицы одинаковы:

$$\Delta p_y = \Delta p'_y, \quad \Delta p_z = \Delta p'_z. \quad (2.34)$$

Промежуток времени  $\Delta t'$  между двумя близкими событиями на мировой линии частицы, измеренный в сопутствующей системе отсчета  $K'$ , представляет собой собственное время  $\Delta\tau_0$  для данной пары событий. Он связан с промежутком времени  $\Delta t$  между этими же близкими событиями в системе отсчета  $K$  соотношением (1.6):

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (2.35)$$



Из соотношений (2.34) и (2.35) следует, что

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \frac{\Delta p'_y}{\Delta t'}, \quad \frac{\Delta p_z}{\Delta t} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \frac{\Delta p'_z}{\Delta t'}. \quad (2.36)$$

Эти соотношения показывают, как преобразуются при переходе к другой системе отсчета поперечные компоненты левой части основного закона динамики (2.32). Так как в уравнении (2.32) левая и правая части преобразуются при переходе к другой системе отсчета одинаковым образом, из (2.36) получаем закон преобразования поперечных составляющих  $F_{\perp}$  (трехмерной) силы  $\vec{F}$ :

$$F_{\perp} = F'_{\perp} \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2.37)$$

— именно так поперечная к направлению движения частицы (т. е. к вектору  $\vec{v}$ ) составляющая силы  $F_{\perp}$  в некоторой системе отсчета  $K$  связана с силой  $F'_{\perp}$  в сопутствующей системе отсчета  $K'$ . В сопутствующей системе, где частица в данный момент покоится, поперечная сила имеет наибольшую величину.

Остается найти, как преобразуется составляющая силы  $F_x = F_{\parallel}$ , продольная к направлению движения частицы. Из преобразований Лоренца (2.29) для импульса находим:

$$\Delta p_x = \frac{\Delta p'_x + v \Delta E' / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.38)$$

Покажем, что в сопутствующей системе отсчета  $K'$  элементарное приращение энергии  $\Delta E'$  равно нулю. Энергия частицы  $E'$  выражается через ее импульс  $p' = p'_x$ , как следует из формулы (2.23), следующим образом:

$$E' = \sqrt{m_0^2 c^4 + p_x'^2 c^2}. \quad (2.39)$$

Отсюда находим связь приращения энергии  $\Delta E'$  с приращением  $\Delta p'_x$  продольной составляющей импульса:

$$\Delta E' = \frac{p'_x \Delta p'_x \cdot c^2}{\sqrt{m_0^2 c^4 + p_x'^2 c^2}}. \quad (2.40)$$

Но в сопутствующей системе отсчета  $K'$  в данный момент времени скорость частицы и ее импульс  $p'_x$  равны нулю. Поэтому из (2.40) следует, что приращение энергии  $\Delta E'$  равно нулю, и (2.38) дает следующую связь приращений продольной составляющей импульса в двух системах отсчета:

$$\Delta p_x = \Delta p'_x / \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (2.41)$$

Вместе с соотношением (2.35) это дает нам

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{\Delta p'_x}{\Delta t'} \quad (2.42)$$

— скорость изменения импульса частицы в продольном направлении одинакова в обеих системах отсчета. Поэтому и продольная составляющая (трехмерной) силы  $F_x = F_{\parallel}$  имеет одно и то же значение как в сопутствующей, так и в любой другой системе отсчета:

$$F_{\parallel} = F'_{\parallel}. \quad (2.43)$$

Из полученных формул преобразования (трехмерной) силы (2.37) и (2.43) видно, что если в какой-то инерциальной системе отсчета действующая на частицу сила равна нулю, то она будет равна нулю и в любой другой инерциальной системе отсчета. Таким образом, при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой *силы преобразуются, но не появляются и не исчезают*. Это свойство можно было предвидеть и непосредственно на основании принципа относительности: если в одной инерциальной системе отсчета на тело не действуют силы и оно движется по инерции (с постоянной скоростью), то то же самое будет и в любой другой инерциальной системе отсчета.

Формулы преобразования силы (2.37) и (2.43) играют важную роль в дальнейшем изложении при изучении релятивистских аспектов электромагнетизма.

По материалу данного раздела рекомендуется решить задачу 764 из [6].

*Рекомендуемая литература:* [1], стр. 417–418.

## 2.6 Простые задачи релятивистской динамики

Для решения задач релятивистской динамики о движении частицы под действием заданной силы можно использовать основное уравнение динамики точки (2.32)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (2.44)$$

вместе с соотношением (2.23) или (2.39), выражающим энергию частицы через ее импульс:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (2.45)$$

Уравнение (2.44) дает возможность найти зависимость импульса частицы от времени  $\vec{p}(t)$ , если известна полная сила  $\vec{F}$ , действующая на частицу. Затем можно найти движение частицы, т. е. получить зависимость скорости и координат частицы от времени. Для этого нужно выразить скорость частицы через ее импульс и энергию, воспользовавшись соотношением (2.21):

$$\vec{v} = \frac{c^2}{E} \vec{p}. \quad (2.46)$$

Приведем несколько простых примеров решения задач релятивистской динамики о движении частиц в силовых полях.

- В качестве первого примера рассмотрим движение первоначально покоившейся частицы с зарядом  $q$  и массой покоя  $m_0$  в однородном постоянном электрическом поле напряженностью  $\vec{\mathcal{E}}$ . Действующая на частицу сила  $\vec{F}$  постоянна и равна  $q\vec{\mathcal{E}}$ . В этом случае из основного уравнения динамики точки (2.44) немедленно следует, что импульс частицы растет пропорционально времени:

$$\vec{p}(t) = \vec{F} t. \quad (2.47)$$

Подставляя это выражение для импульса в формулу (2.45), получим зависимость энергии частицы от времени:

$$E(t) = c \sqrt{m_0^2 c^2 + (F t)^2}. \quad (2.48)$$

Теперь с помощью (2.46) находим скорость частицы  $\vec{v}(t)$  спустя промежуток времени  $t$  после начала движения:

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{F} t}{m_0 \sqrt{1 + (F t / m_0 c)^2}}. \quad (2.49)$$

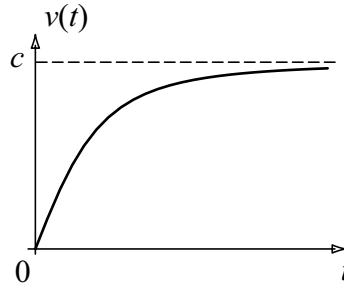


Рис. 2.5: Скорость частицы при движении под действием постоянной силы

Зависимость величины скорости частицы от времени при движении под действием постоянной силы, выражаемая формулой (2.49), показана на рис. 2.5. Пока  $Ft/m_0c \ll 1$  (время, прошедшее с начала движения, мало, электрическое поле достаточно слабое), в подкоренном выражении в (2.49) можно пренебречь вторым слагаемым. Тогда для скорости  $\vec{v}(t)$  частицы, получающей ускорение под действием постоянной силы  $\vec{F}$ , получается обычное нерелятивистское выражение, в соответствии с которым скорость частицы растет пропорционально времени:

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{F}}{m_0} t. \quad (2.50)$$

Этому выражению соответствует начальный (прямолинейный) участок графика на рис. 2.5. В противоположном случае  $m_0c/Ft \ll 1$  из (2.49) для абсолютной величины скорости частицы получаем:

$$v(t) \approx c \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{m_0 c}{F t} \right)^2 \right] \quad (2.51)$$

— с течением времени скорость частицы стремится к конечному пределу  $v \rightarrow c$ , несмотря на то, что импульс частицы, в соответствии с (2.47), растет неограниченно.

- Рассмотрим заряженную частицу с импульсом  $p_0$ , направленным вдоль оси  $Oy$ , которая влетает в однородное постоянное электрическое поле  $\vec{E}$ , направленное вдоль оси  $Ox$ . По какой траектории  $x = x(y)$  движется частица?

Запишем уравнения движения (2.44) в проекциях на оси координат  $Ox$ ,  $Oy$  и проинтегрируем их с соответствующими начальными условиями. Таким образом

находим проекции импульса частицы  $p_x(t)$  и  $p_y(t)$  как функции времени. Затем с помощью соотношения (2.45) вычисляем энергию частицы  $E(t)$ . Подставляя  $p_x(t)$ ,  $p_y(t)$  и  $E(t)$  в формулы (2.46), находим проекции скорости частицы  $v_x(t)$  и  $v_y(t)$  как функции времени. Интегрируя полученные выражения по времени, получаем следующие выражения для координат частицы в зависимости от времени:

$$x(t) = \frac{1}{F} \sqrt{E_0^2 + (cFt)^2} - \frac{E_0}{F}, \quad (2.52)$$

$$y(t) = \frac{p_0 c}{F} \operatorname{Arsh} \left( \frac{cFt}{E_0} \right), \quad \text{где } E_0 = c \sqrt{p_0^2 + m_0^2 c^2}. \quad (2.53)$$

Здесь  $\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}}$  — постоянная сила, действующая на частицу в электрическом поле  $\vec{\mathcal{E}}$ , а  $E_0$  — начальная энергия частицы, влетающей в электрическое поле. Характерно, что возрастание энергии частицы при ее ускорении электрическим полем приводит к уменьшению  $y$ -составляющей ее скорости ( $y$ -составляющая ее импульса остается при этом неизменной, так как  $dp_y/dt = 0$ ). Уравнения (2.52) и (2.53) задают траекторию частицы в параметрическом виде. Чтобы получить уравнение траектории частицы в явном виде, нужно исключить из них время  $t$ . В результате находим следующую связь между координатами  $x$  и  $y$ :

$$x(y) = \frac{E_0}{F} \left( \operatorname{ch} \frac{Fy}{p_0 c} - 1 \right). \quad (2.54)$$

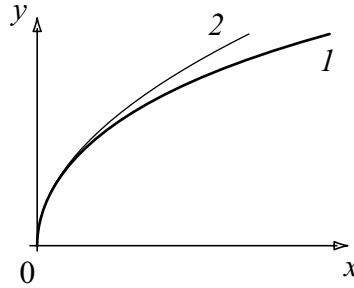


Рис. 2.6: Траектория частицы, на которую действует постоянная сила, направленная вдоль оси  $Ox$

Таким образом, траектория частицы представляет собой цепную линию (график гиперболического косинуса, кривая 1 на рис. 2.6). Если начальная скорость частицы мала по сравнению со скоростью света ( $v_0 \ll c$ ), в формуле (2.54) можно положить  $p_0 \approx m_0 v_0$  и  $E_0 \approx m_0 c^2$ . На начальном участке траектории  $Fy/p_0 c \ll 1$  и гиперболический косинус можно разложить в ряд, ограничиваясь членами второго порядка:  $\operatorname{ch} \alpha \approx 1 + \frac{1}{2} \alpha^2$ . В результате из (2.54) получаем:

$$x(y) = \frac{F}{2m_0 v_0^2} y^2 \quad (2.55)$$

— в этом приближении траекторию частицы можно считать параболой (кривая 2 на рис. 2.6), что совпадает с известным результатом решения этой задачи в классической механике.

• В качестве третьего примера рассмотрим важную в практическом отношении задачу о движении заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле  $\vec{\mathcal{B}}$ . Для этого случая в правую часть уравнения движения (2.44) следует подставить силу Лоренца:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{\mathcal{B}}. \quad (2.56)$$

Сила Лоренца, действующая на частицу со стороны магнитного поля, перпендикулярна скорости частицы и поэтому не изменяет энергии частицы:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.57)$$

В магнитном поле импульс частицы и ее скорость изменяются только по направлению, оставаясь неизменными по величине. Воспользовавшись формулой (2.46), выражающей скорость частицы через импульс и энергию, можно привести уравнение (2.56) к следующему виду:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qc}{E} \vec{v} \times \vec{\mathcal{B}}. \quad (2.58)$$

Вводя обозначение

$$\vec{\omega} = -qc\vec{\mathcal{B}}/E, \quad (2.59)$$

придадим уравнению (2.58) следующий вид:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (2.60)$$

Это уравнение говорит о том, что вектор скорости частицы  $v$  равномерно описывает круговой конус вокруг направления вектора  $\vec{\omega}$  (такое поведение называют прецессией). Для положительно заряженной частицы вектор  $\vec{\omega}$  направлен противоположно вектору индукции  $\vec{\mathcal{B}}$ . Составляющая вектора скорости  $v$  вдоль направления магнитного поля остается неизменной, а составляющая, перпендикулярная магнитному полю, равномерно вращается с угловой скоростью

$$\omega = \frac{qc\mathcal{B}}{E} = \frac{q\mathcal{B}}{m_0c} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.61)$$

Траектория частицы представляет собой винтовую линию, которая получается сложением равномерного движения вдоль магнитного поля и равномерного обращения с угловой скоростью  $\omega$  в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. При  $v/c \ll 1$  формула (2.61) дает хорошо известный результат нерелятивистской механики:  $\omega = q\mathcal{B}/m_0c$  — угловая частота обращения заряженных частиц по окружности в магнитном поле не зависит от скорости частиц. Но согласно (2.61) по мере увеличения энергии частиц (и их скорости) угловая частота  $\omega$  уменьшается. Поэтому циклические ускорители, в которых частицы движутся по окружности в магнитном поле, можно использовать для ускорения частиц до релятивистских энергий только при условии, что частота ускоряющего электрического поля или индукция

магнитного поля модулируются в процессе ускорения таким образом, чтобы обеспечивался синхронизм с изменением частоты обращения (2.61) при постепенном росте энергии разгоняемых частиц.

Предсказываемая уравнением (2.61) зависимость частоты обращения частиц от их энергии находит полное экспериментальное подтверждение в работе ускорителей частиц на высокие энергии. Для электронов это соотношение было проверено вплоть до таких скоростей, при которых релятивистская масса частицы превышает массу покоя более чем в 2000 раз, т. е. когда электрон становится массивнее протона. Скорость таких электронов всего на 30 м/с меньше скорости света.

Из формулы  $v = \omega R$  следует, что радиус  $R$  круговой траектории, описываемой заряженной частицей в магнитном поле, равен

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{cm_0v}{q\mathcal{B}\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{cp}{q\mathcal{B}}. \quad (2.62)$$

Таким образом, радиус кривизны траектории  $R$  пропорционален релятивистскому импульсу частицы. Соотношение (2.62) лежит в основе важнейшего прямого метода измерения импульса заряженных релятивистских частиц по искривлению их треков в магнитном поле.

По материалу данного раздела рекомендуется решить следующие задачи из [6]: 751, 752, 753, 754, 755.

*Рекомендуемая литература:* [1], стр. 422–433.

## Глава 3

# Принцип относительности в курсе электричества и магнетизма

Исторически связь электрических и магнитных явлений была открыта (в трудах Эрстеда, Ампера, Фарадея) и математически сформулирована Максвеллом значительно раньше, чем теория относительности. Релятивистски инвариантная теория — электродинамика Максвелла — существовала задолго до теории относительности и играла определяющую роль в создании и становлении теории относительности. Но для формирования у студентов ясного представления о глубокой связи электрических и магнитных явлений целесообразно наряду с традиционным изложением электродинамики, в котором постоянное электрическое поле и постоянное магнитное поле (создаваемое постоянными токами) рассматриваются совершенно независимо друг от друга, рассмотреть также электрический заряд и электрическое поле с точки зрения теории относительности. При этом можно показать, что уже в рамках электростатики, т. е. при описании взаимодействия неподвижных друг относительно друга зарядов, нельзя ограничиться только электрическим полем, что только электрическое и магнитное поля, вместе взятые, согласуются с принципом относительности.

Приведем перечень обсуждаемых ниже вопросов, связанных с использованием релятивистских представлений в курсе электричества и магнетизма.

- Определение процедуры измерения заряда, пригодной для движущегося заряда. Инвариантность заряда. Электрическая нейтральность атомов и молекул.
- Преобразование электрического поля неподвижных зарядов при переходе в другую систему отсчета, относительно которой эти заряды движутся.
- Поле равномерно движущегося заряда и поле излучения заряда, движущегося с ускорением.
- Необходимость введения магнитного поля уже при описании взаимодействия неподвижных электрических зарядов для согласования теории с принципом относительности. Релятивистская природа магнитного взаимодействия движущихся зарядов. Вывод закона Био — Савара — Лапласа из закона Кулона и принципа относительности.

- Относительный характер электрического и магнитного полей. Возникновение электрического поля в системе отсчета, движущейся относительно источников постоянного магнитного поля (проводников с током).

### 3.1 Измерение величины движущегося заряда. Инвариантность заряда

Влияет ли движение заряженного тела на величину его заряда? Зависит ли величина электрического заряда от того, в какой системе отсчета рассматривается заряженное тело? Чтобы ответить на эти вопросы, нужно прежде всего условиться о том, как измерять заряд. Процедура измерения электрического заряда не есть нечто само собой разумеющееся, а должна быть *введена по определению*.

Электрический заряд можно измерить только с помощью явлений, которые он вызывает. Определить величину покоящегося точечного заряда можно, измеряя силу, с которой он действует на другой неподвижный («пробный») заряд, находящийся на определенном расстоянии. Эта сила подчиняется закону Кулона. Но такой способ непригоден для измерения заряда движущейся частицы, так как может оказаться, что сила, действующая на пробный заряд, зависит не только от расстояния, но, например, и от направления на пробный заряд (по отношению к направлению движения частицы). Поэтому разумно при измерении движущегося заряда производить усреднение силы по всем направлениям. Другими словами, вводимая по определению процедура измерения электрического заряда должна опираться не на закон Кулона, а на теорему Гаусса. Дадим подробное описание соответствующей процедуры.

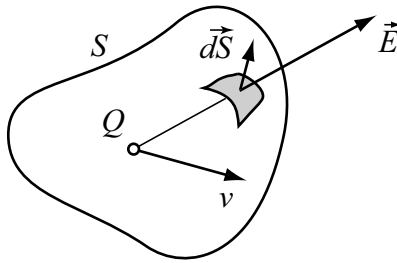


Рис. 3.1: К определению процедуры измерения заряда

Представим себе неподвижные (в выбранной системе отсчета) пробные заряды, распределенные по замкнутой поверхности  $S$ , охватывающей движущееся тело, заряд  $Q$  которого нужно измерить (рис. 3.1). Напряженность электрического поля  $\vec{E}$  в каждой точке поверхности  $S$  определяется силой, действующей на находящийся в этой точке неподвижный пробный заряд. Измерив значения напряженности поля  $\vec{E}$  во всех точках поверхности  $S$  в один и тот же момент времени (т. е. одновременно с точки зрения выбранной системы отсчета), можно вычислить поверхностный интеграл  $\oint_S \vec{E} d\vec{S}$  и через него выразить интересующий нас заряд  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{4\pi} \oint_S \vec{E} d\vec{S} \quad (\text{СГС}), \quad Q = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} \quad (\text{СИ}). \quad (3.1)$$



Здесь первая формула соответствует гауссовой симметричной системе единиц СГС, вторая — международной системе единиц СИ.

Поверхностный интеграл в (3.1) не зависит от размеров и формы поверхности  $S$ . Для неподвижных зарядов, находящихся внутри замкнутой поверхности, это следует из закона Кулона (из теоремы Гаусса). Для движущихся зарядов это утверждение можно рассматривать как экспериментальный факт.

Зависит ли измеренный таким способом заряд тела от системы отсчета? Если зарядом частицы назвать по определению заряд, измеренный в той системе отсчета, где тело покоится, то заряд тела, как и масса покоя, будет по определению инвариантом. Но на таком пути возникает трудность с измерением заряда системы частиц, находящихся в относительном движении, например, заряда молекулы. Поэтому такое определение неприемлемо. Инвариантность заряда должна рассматриваться не как следствие определения, а как *экспериментальный закон*.

Наиболее точное экспериментальное подтверждение инвариантности электрического заряда, т. е. его независимости от состояния движения, — это *нейтральность атомов и молекул*. Поставленные специально для этой цели эксперименты (описание которых можно прочитать, например, в [5], стр. 21) показали, что заряды протона и электрона в атоме водорода равны по абсолютной величине с точностью до  $10^{-20}$ . Аналогичные опыты были поставлены и с гелием. Атом гелия содержит те же заряженные частицы (два протона в составе ядра и два электрона), что и молекула водорода, но в двух таких системах эти частицы движутся совершенно по разному. Если бы движение частицы как-то влияло на величину ее заряда, то точной компенсации зарядов электрона и протона в молекуле водорода и одновременно в атоме гелия не могло бы быть.

Молекула тяжелого водорода (дейтерия) и атом гелия вообще построены из одних и тех же частиц. Из-за различия в состоянии движения частиц в этих системах молекула дейтерия и атом гелия имеют немного различающиеся массы (что легко обнаруживается с помощью масс-спектрометра), но обладают одинаковым полным зарядом. Это значит, что поверхностный интеграл в формуле (3.1), определяющий полный заряд системы, зависит только от числа частиц с положительными и отрицательными элементарными зарядами, но не от характера их движения.

Согласно принципу относительности, если это утверждение справедливо для какой-либо одной инерциальной системы отсчета, то оно справедливо и для любой другой. Поэтому *электрический заряд одной и той же системы частиц одинаков во всех системах отсчета*. Релятивистскую инвариантность электрического заряда математически можно выразить соотношением:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_{S'} \vec{E}' d\vec{S}'. \quad (3.2)$$

Поверхность  $S$  в момент времени  $t$  должна охватывать ту же систему частиц, что и поверхность  $S'$  в момент времени  $t'$ . Поле  $\vec{E}$  в формуле (3.2) определяется силой, действующей на неподвижный в системе отсчета  $K$  пробный заряд, поле  $\vec{E}'$  — силой, действующей на неподвижный в системе  $K'$  пробный заряд, причем значения напряженности поля в разных точках при вычислении поверхностных интегралов должны быть взяты для одного момента времени в своей системе отсчета.

*Рекомендуемая литература:* [5], стр. 159–165.

## 3.2 Преобразование напряженности электрического поля

Рассмотрим электрическое поле системы неподвижных друг относительно друга электрических зарядов, например, поле между пластинами заряженного плоского конденсатора (рис. 3.2). Конденсатор неподвижен в системе отсчета  $K'$ . Обозначим поверхностную плотность заряда положительно заряженной пластины через  $\sigma'$ . Направим ось  $Ox$  параллельно, а ось  $Oy$  — перпендикулярно пластинам. Внутри конденсатора вдали от краев пластин поле однородно и его напряженность  $E'$  имеет только  $y$ -составляющую:

$$E'_y = 4\pi\sigma' \quad (\text{СГС}), \quad E'_y = \sigma'/\varepsilon_0 \quad (\text{СИ}). \quad (3.3)$$

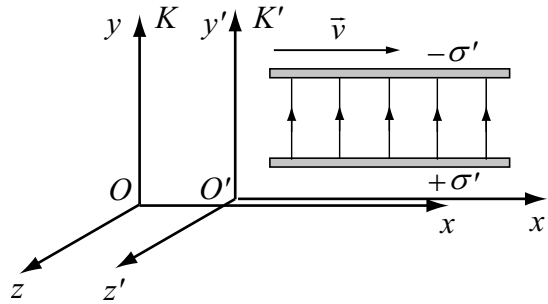


Рис. 3.2: Электрическое поле плоского конденсатора

Относительно системы отсчета  $K$  (см. рис. 3.2) пластины конденсатора движутся и их продольные размеры в системе  $K$  меньше, чем в  $K'$ , вследствие релятивистского сокращения длины:

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (3.4)$$

Полный заряд пластин инвариантен, т. е. не зависит от системы отсчета. Поэтому поверхностная плотность заряда пластин в системе  $K$  будет больше, чем в  $K'$ , где конденсатор покоится:

$$\sigma = \sigma' / \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (3.5)$$

Отсюда следует, что поперечная (к направлению скорости движения пластин) составляющая напряженности электрического поля  $E_y = E_{\perp}$  в системе отсчета  $K$  больше, чем в  $K'$ :

$$E_{\perp} = E'_{\perp} / \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (3.6)$$

Рассмотрим теперь электрическое поле в конденсаторе, пластины которого расположены перпендикулярно к направлению относительной скорости систем отсчета  $K$  и  $K'$ . В этом случае размеры пластин одинаковы с точки зрения обеих систем  $K$  и  $K'$  и, следовательно, напряженность продольного электрического поля  $E_x = E_{\parallel}$  одинакова в системах отсчета  $K$  и  $K'$ :

$$E_{\parallel} = E'_{\parallel}. \quad (3.7)$$

Закон преобразования напряженности электрического поля при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, выражаемый формулами (3.6) и (3.7), не должен зависеть от конкретной конфигурации источников (пластины плоского конденсатора, точечные заряды и т.п.). Поэтому он применим не только в тех частных случаях, из которых он был выведен (поле внутри плоского конденсатора). Этот закон универсален. Для его справедливости нужно лишь, чтобы в системе отсчета  $K'$  поле было *статическим*, т. е. чтобы в этой системе отсчета заряды, создающие поле, были неподвижны.

*Рекомендуемая литература:* [5], стр. 165–169.

### 3.3 Электрическое поле равномерно движущегося точечного заряда

Пусть точечный заряд  $Q$  неподвижен в начале координат системы отсчета  $K'$  и движется вместе с ней с постоянной скоростью  $v$  вдоль оси  $Ox$  относительно инерциальной системы отсчета  $K$  (рис. 3.3).

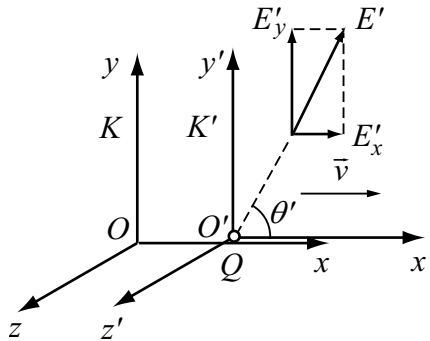


Рис. 3.3: Напряженность электрического поля движущегося заряда

В системе отсчета  $K'$  напряженность электрического поля  $\vec{E}'$  направлена от заряда по радиусу. Ее величина определяется законом Кулона. Проекции напряженности на оси  $Ox'$  и  $Oy'$  в точке с координатами  $x'$  и  $y'$  можно записать следующим образом:

$$E'_x = \frac{Q}{r'^2} \cos \theta', \quad E'_y = \frac{Q}{r'^2} \sin \theta' \quad (\text{СГС}), \quad (3.8)$$

где  $r'^2 = x'^2 + y'^2$ ,  $\cos \theta' = x'/r'$ ,  $\sin \theta' = y'/r'$ . В системе единиц СИ формулы для проекций напряженности поля отличаются от (3.8) дополнительным множителем  $1/(4\pi\epsilon_0)$ . Таким же образом нужно поступить для перевода в СИ и со всеми последующими формулами для напряженности электрического поля. Через координаты точки наблюдения  $x'$  и  $y'$  проекции напряженности поля выражаются следующим образом:

$$E'_x = \frac{Qx'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}, \quad E'_y = \frac{Qy'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (\text{СГС}). \quad (3.9)$$

Чтобы найти напряженность электрического поля в системе отсчета  $K$ , можно воспользоваться формулами (3.6) и (3.7) предыдущего раздела, выразив при этом в  $E'_y = E'_\perp$  и  $E'_x = E'_\parallel$  штрихованные координаты точки наблюдения  $x', y'$  и  $z'$  через нештрихованные координаты  $x, y$  и  $z$  по формулам преобразований Лоренца (1.17). Рассмотрим для определенности момент времени  $t = 0$ , соответствующий прохождению заряда  $Q$  через начало координат системы отсчета  $K$ . Тогда в соответствии с формулами (1.17)

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (3.10)$$

В результате для момента времени  $t = 0$  получим следующие значения проекций напряженности поля в системе отсчета  $K$ :

$$E_x = \frac{Q\gamma x}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{3/2}}, \quad E_y = \frac{Q\gamma y}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{3/2}} \quad (\text{СГС}), \quad (3.11)$$

где использовано обозначение  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Из формул (3.11) следует, что  $E_y/E_x = y/x$ . Это значит, что и в системе отсчета  $K$  напряженность электрического поля в любой точке направлена радиально из мгновенного положения заряда  $Q$ , создающего поле. Из формул (3.11) легко получить величину напряженности поля точечного заряда  $Q$  в системе отсчета  $K$ :

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{Q}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (\text{СГС}), \quad (3.12)$$

где  $\beta = v/c$ . Когда скорость движения заряда мала по сравнению со скоростью света (при  $v \ll c$ ), формула (3.12) дает  $E = Q/r^2$ , т. е. электрическое поле медленно движущегося точечного заряда совпадает в каждый момент с полем такого же неподвижного заряда, помещенного в точку, где в данный момент находится заряд  $Q$  — источник поля. Иными словами, равномерно движущийся заряд при  $v \ll c$  как бы «тянет за собой» свое радиально симметричное статическое поле. Но при значительных скоростях заряда, как видно из (3.12), поле под прямым углом к направлению движения оказывается сильнее, чем поле в направлении движения на том же расстоянии от заряда.

*Рекомендуемая литература:* [4], стр. 262–267, [5], стр. 169–173.

### 3.4 Поле излучения ускоренно движущегося точечного заряда

Излучение электромагнитных волн происходит лишь при ускоренном движении электрических зарядов. Равномерно движущийся заряд, как и покоящийся заряд, электромагнитных волн не излучает.

Понять, каким образом поперечное электрическое поле излучаемой зарядом волны возникает из радиального поля точечного заряда при его ускоренном движении можно с помощью следующей простой и наглядной картины, предложенной Дж. Томсоном.

Пусть до момента времени  $t = 0$  точечный заряд  $q$  покоился в начале координат. Его электрическое поле можно изобразить с помощью силовых линий, радиально выходящих из заряда. В момент времени  $t = 0$  под действием какой-либо внешней силы заряд начинает двигаться с постоянным ускорением  $a$ , а спустя некоторое время  $\tau$  действие этой силы прекращается, так что дальше заряд движется равномерно со скоростью  $v = a\tau$ . Будем считать, что ускорение  $a$  и время ускоренного движения  $\tau$  не слишком велики, так что набранная зарядом за это время скорость  $v$  много меньше скорости света ( $v \ll c$ ).

Представим себе картину силовых линий электрического поля, создаваемого этим зарядом, спустя некоторый промежуток времени  $t$ , большой по сравнению с длительностью периода  $\tau$  его ускоренного движения.

В соответствии со вторым постулатом теории относительности (о существовании предельной скорости распространения взаимодействий) в точках, лежащих за пределами сферы радиуса  $ct$  (с центром в начале координат), в момент времени  $t$  еще не известно о том, что в момент времени  $t = 0$  заряд начал двигаться. За пределами этой сферы электрическое поле такое же, каким оно было при неподвижном заряде (рис. 3.4). Напряженность этого поля на расстоянии  $r$  от начала координат равна

$$E(r) = \frac{q}{r^2} \quad (\text{СГС}), \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{СИ}). \quad (3.13)$$

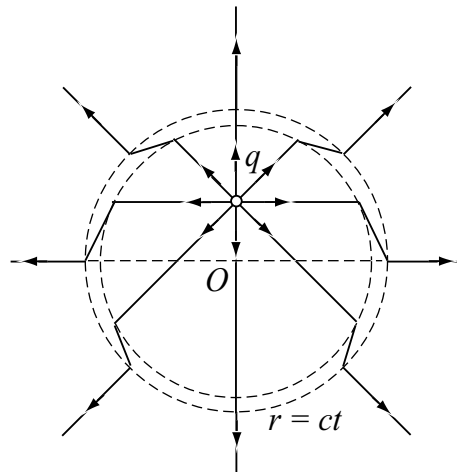


Рис. 3.4: Изломы на силовых линиях электрического поля заряда, двигавшегося с ускорением в течение промежутка времени от  $t = 0$  до  $t = \tau$

Все особенности электрического поля в момент времени  $t$ , обусловленные ускоренным движением заряда в течение времени от  $t = 0$  до  $t = \tau$ , сосредоточены внутри тонкого шарового слоя толщиной  $c\tau$ , наружный радиус которого равен  $ct$ , а внутренний равен  $c(t - \tau)$ . Внутри сферы радиуса  $c(t - \tau)$  электрическое поле такое, какое создается равномерно движущимся зарядом, так как начиная с момента

$t = \tau$  заряд уже движется с постоянной скоростью. Когда набранная зарядом за время ускорения  $\tau$  скорость  $v$  много меньше скорости света ( $v \ll c$ ), это поле в момент времени  $t$  совпадает с полем неподвижного заряда  $q$ , находящегося в той точке, через которую в момент времени  $t$  проходит движущийся заряд. Это было показано в предыдущем разделе.

Можно считать, что движущийся заряд в момент времени  $t$  находится на расстоянии  $vt$  от начала координат (здесь мы пренебрегаем лишь тем, что за малое время  $\tau$  ускоренного движения заряд в действительности прошел расстояние  $v\tau/2$ , а не  $v\tau$ , что допустимо при  $t \gg \tau$ ).

Картину силовых линий электрического поля в интересующей нас области внутри шарового слоя легко найти, учитывая непрерывность силовых линий. Для этого достаточно соединить соответствующие радиальные силовые линии (см. рис. 3.4) вне и внутри сфер, ограничивающих рассматриваемый слой. Изломы на силовых линиях, вызванные ускоренным движением заряда в течение времени от  $t = 0$  до  $t = \tau$ , «убегают» от начала координат со скоростью  $c$ . Изломы силовых линий в промежутке между сферами  $r = c(t - \tau)$  и  $r = ct$  — это и есть поле излучения заряда, т. е. испускаемая зарядом волна, распространяющаяся со скоростью  $c$ .

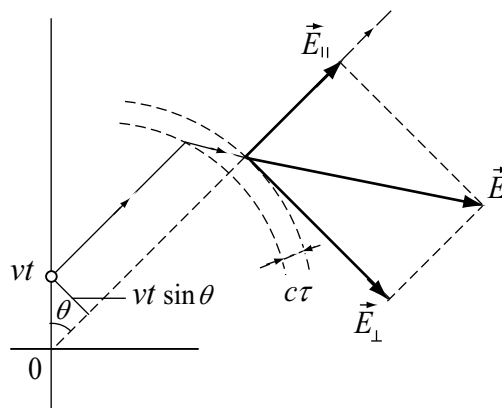


Рис. 3.5: К вычислению напряженности поля излучения ускоренно движущегося точечного заряда

Чтобы найти напряженность этого поля излучения, рассмотрим одну из силовых линий, составляющую некоторый угол  $\theta$  с направлением движения заряда (рис. 3.5). Вектор напряженности электрического поля в изломе разложим на две составляющие: радиальную  $\vec{E}_{\parallel}$  и поперечную  $\vec{E}_{\perp}$ . Радиальная составляющая  $\vec{E}_{\parallel}$  — это статическое поле, создаваемое неподвижным зарядом  $q$ , находящимся в начале координат. Напряженность поля на расстоянии  $r = ct$  дается выражением (3.13). Поперечная составляющая  $\vec{E}_{\perp}$  — это напряженность электрического поля в волне, испущенной зарядом во время его движения с ускорением. Так как волна распространяется в радиальном направлении, то вектор  $\vec{E}_{\perp}$  перпендикулярен направлению волны. Из рис. 3.5 видно, что

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{vt \sin \theta}{c\tau}. \quad (3.14)$$

Подставляя сюда  $E_{\parallel}$  из (3.13) и учитывая, что  $r = ct$ , находим

$$E_{\perp} = \frac{qv}{c^3 t \tau} \sin \theta \quad (\text{СГС}), \quad E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qv}{c^3 t \tau} \sin \theta \quad (\text{СИ}). \quad (3.15)$$

Отношение  $v/\tau$  представляет собой ускорение  $a$ , с которым двигался заряд в течение промежутка времени от  $t = 0$  до  $\tau$ . Входящее в (3.15) время  $t$  можно выразить через расстояние  $r$  от заряда до точки наблюдения:  $t = r/c$ . Поэтому соотношение (3.15) можно переписать в виде

$$E_{\perp} = \frac{qa}{c^2 r} \sin \theta \quad (\text{СГС}), \quad E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{c^2 r} \sin \theta \quad (\text{СИ}). \quad (3.16)$$

Приведенный здесь вывод этой формулы был основан на предположении, что любое электромагнитное возмущение распространяется в пустоте со скоростью  $c$ .

Прежде всего обратим внимание на то, что напряженность  $E_{\perp}$  электрического поля волны в формуле (3.16) убывает обратно пропорционально первой степени расстояния  $r$  от центра в отличие от напряженности  $E_{\parallel}$  электростатического поля точечного заряда, которая убывает как  $1/r^2$ .

Далее отметим, что напряженность  $E_{\perp}$  поля волны в момент времени  $t$  в точке наблюдения, находящейся на расстоянии  $r$  от источника, зависит от ускорения заряда  $a$  в более ранний момент времени  $t = 0$ : волна, излученная в момент  $t = 0$ , достигает точки наблюдения спустя время, равное  $r/c$ .

Предположим теперь, что заряд  $q$  все время движется вдоль оси  $z$  с некоторым переменным ускорением  $a(t)$ , оставаясь при этом вблизи начала координат (например, совершает гармонические колебания). Тогда он будет излучать электромагнитные волны непрерывно. Напряженность электрического поля в точке наблюдения, находящейся на расстоянии  $r$  от начала координат, по-прежнему определяется формулой (3.16), причем поле  $E_{\perp}$  в момент времени  $t$  зависит от ускорения  $a$  заряда в более ранний момент времени  $t' = t - r/c$ :

$$E_{\perp}(r, t) = \frac{qa(t')}{c^2 r} \sin \theta \quad (\text{СГС}), \quad E_{\perp}(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa(t')}{c^2 r} \sin \theta \quad (\text{СИ}). \quad (3.17)$$

Для справедливости этой формулы существенно предположение о том, что совершающий ускоренное движение заряд все время остается вблизи начала координат, так как «время запаздывания»  $r/c$  в (3.16) принято неизменным и равным времени прохождения волны от начала координат в точку наблюдения.

*Рекомендуемая литература:* [5], стр. 173–177.

## 3.5 Принцип относительности и электростатика. Магнитное поле

### 3.5.1 Сила в электростатическом поле и сила Лоренца

Рассмотрим силу, действующую на неподвижный в системе отсчета  $K'$  заряд  $q$  со стороны электростатического поля  $E'$ , т. е. поля, создаваемого неподвижными в системе отсчета  $K'$  зарядами:

$$\vec{F}' = q\vec{E}'. \quad (3.18)$$

Рассмотрим это же взаимодействие с точки зрения системы отсчета  $K$ , относительно которой система отсчета  $K'$  движется со скоростью  $v$ . Воспользуемся известным из механики законом преобразования сил при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, выражаемым формулами (2.37) и (2.43):

$$F_{\perp} = F'_{\perp} \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad F_{\parallel} = F'_{\parallel}. \quad (3.19)$$

Напомним, что эти формулы справедливы для силы, действующей на частицу, которая в системе отсчета  $K'$  покоится. Подставим в формулы (3.19)  $F'$  из (3.18), а  $E'$  выразим через напряженность  $E$  того же электрического поля в системе отсчета  $K$  по формулам преобразования электрического поля (3.6) и (3.7), справедливым при переходе из системы отсчета  $K'$ , в которой создающие поле заряды покоятся. В результате получаем:

$$F_{\perp} = qE_{\perp}(1 - v^2/c^2), \quad F_{\parallel} = qE_{\parallel}. \quad (3.20)$$

Таким образом, в системе отсчета  $K$  действующая на заряд сила не равна произведению заряда на напряженность электрического поля:  $\vec{F} \neq q\vec{E}$ ! Формула  $\vec{F} = q\vec{E}$  не сохраняет своего вида при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, т. е. не удовлетворяет принципу относительности. Мы приходим к выводу, что уже в рамках электростатики (взаимодействия неподвижных друг относительно друга зарядов), чтобы удовлетворить принципу относительности, необходимо ввести магнитную силу — *силу Лоренца*, зависящую от скорости  $\vec{v}$  (неподвижных друг относительно друга) зарядов в рассматриваемой системе отсчета:

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{СГС}), \quad \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{СИ}). \quad (3.21)$$

В системе отсчета  $K'$ , где  $\vec{v} = 0$ , формула (3.21) принимает вид  $\vec{F}' = q\vec{E}'$ . По существу выражение (3.21) можно рассматривать как определение индукции магнитного поля  $\vec{B}$ . С вектором  $\vec{B}$  связана та часть полной силы, действующей на движущийся заряд, которая зависит от его скорости. Другими словами, формула (3.21) дает указания, как ввести (по определению) процедуру измерения индукции магнитного поля.

### 3.5.2 Магнитное поле при движении зарядов

Сравнение формулы (3.20) для силы, полученной с помощью принципа относительности, с выражением (3.21) дает возможность получить формулу для расчета индукции магнитного поля, создаваемого движущимися зарядами.

Рассмотрим, например, как и в разделе (3.2), заряженный плоский конденсатор, неподвижный в системе отсчета  $K'$ . Пластины конденсатора расположены параллельно оси  $Ox'$  (рис. 3.6). В пространстве между пластинами находится неподвижный в системе отсчета  $K'$  пробный заряд  $q$ . С точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K$  действующая на заряд сила направлена вдоль оси  $Oy$ . Величина этой силы, в соответствии с формулой (3.20), дается выражением

$$F_y = qE_y(1 - v^2/c^2). \quad (3.22)$$



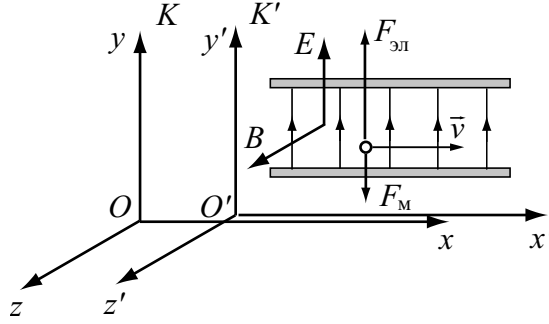


Рис. 3.6: Возникновение магнитного поля в системе отсчета  $K$ , вызванное движением относительно  $K$  зарядов, неподвижных в системе отсчета  $K'$  и создающих там статическое электрическое поле

Из этой формулы видно, что в системе отсчета  $K$  у действующей на заряд силы есть  $y$ -составляющая, зависящая от скорости  $v$ , с которой этот заряд движется относительно  $K$ . Сила, зависящая от скорости заряда — это магнитная сила (сила Лоренца)  $\vec{F}_M = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}$  (СГС) или  $q \vec{v} \times \vec{B}$  (СИ). В данном случае она направлена в отрицательном направлении оси  $Oy$  (см. рис. 3.6). Скорость заряда  $v$  направлена вдоль оси  $Ox$ , поэтому нужное направление  $\vec{F}_M$  получится, если магнитное поле  $\vec{B}$  направлено вдоль оси  $Oz$ :  $\vec{B}(0, 0, B_z)$ . Формула (3.21) в таком случае дает

$$F_y = qE_y - \frac{q}{c} v B_z \quad (\text{СГС}), \quad F_y = qE_y - qv B_z \quad (\text{СИ}). \quad (3.23)$$

Сравнивая формулы (3.22) и (3.23), для индукции магнитного поля в системе отсчета  $K$  получаем  $B_z = (v/c)E_y$  (СГС) или  $B_z = (v/c^2)E_y$  (СИ). В векторном виде выражение для индукции магнитного поля в системе отсчета  $K$  можно записать следующим образом:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E} \quad (\text{СГС}), \quad \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad (\text{СИ}). \quad (3.24)$$

Формула (3.24) дает выражение для индукции магнитного поля в системе отсчета  $K$ , относительно которой создающие магнитное поле заряды (неподвижные друг относительно друга) движутся как целое со скоростью  $\vec{v}$ , через напряженность электрического поля этих же зарядов  $\vec{E}$  в той же системе отсчета  $K$ . Обратим внимание, что в исходной системе отсчета  $K'$ , где создающие поле заряды покоятся, имеется только электростатическое поле  $\vec{E}'$ , но при переходе к описанию взаимодействия этих же зарядов в другой системе отсчета наряду с изменением электрического поля согласно формулам (3.6) и (3.7) появляется еще и магнитное поле, определяемое формулой (3.24).

### 3.5.3 Взаимодействие движущихся зарядов

Формулу (3.24) можно использовать и для нахождения магнитного поля равномерно движущегося заряда. Получим ее еще и другим способом, рассматривая взаимодействие двух параллельно движущихся точечных зарядов (рис. 3.7). В системе

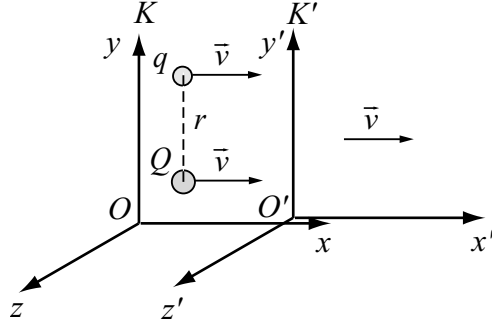


Рис. 3.7: Взаимодействие двух неподвижных друг относительно друга точечных зарядов  $q$  и  $Q$ . Заряды неподвижны в системе отсчета  $K'$ , но относительно  $K$  движутся с постоянной скоростью  $v$

отсчета  $K'$ , где заряды неподвижны, сила их взаимодействия выражается законом Кулона:

$$F'_y = \frac{qQ}{r^2} \quad (\text{СГС}), \quad F'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \quad (\text{СИ}). \quad (3.25)$$

Переходя в лабораторную систему отсчета  $K$ , в которой заряды движутся по параллельным прямым со скоростью  $v$ , в соответствии с законом преобразования сил получаем:

$$F_y = \frac{qQ}{r^2} \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (\text{СГС}), \quad F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (\text{СИ}). \quad (3.26)$$

Напряженность электрического поля, создаваемого зарядом  $Q$  в том месте, где находится заряд  $q$ , в системе отсчета  $K'$  равна

$$E'_y = \frac{Q}{r^2} \quad (\text{СГС}), \quad E'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (\text{СИ}), \quad (3.27)$$

а в системе отсчета  $K$  в соответствии с формулами преобразования напряженности электрического поля (3.6)

$$E_y = \frac{Q}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{СГС}), \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{СИ}). \quad (3.28)$$

Выражая правую часть формулы (3.26) через  $E_y$  из (3.28), получаем

$$F_y = qE_y(1 - v^2/c^2). \quad (3.29)$$

Повторяя далее рассуждения, приведенные после формулы (3.22), приходим для магнитного поля движущегося заряда к такому же выражению (3.24). Оно применимо для вычисления индукции магнитного поля в системе отсчета  $K$ , относительно которой создающие магнитное поле заряды движутся как целое со скоростью  $v$ , через известную напряженность электрического поля этих же зарядов  $\vec{E}$  в той же системе отсчета  $K$ .

Мысленный опыт, в котором рассматривается взаимодействие двух параллельно движущихся зарядов, можно трактовать и с другой точки зрения: не для вывода формулы (3.24), а напротив, для ее применения. Для этого нужно, пользуясь сразу лабораторной системой отсчета  $K$ , вычислить по формуле (3.23) полную силу, действующую на движущийся заряд  $q$  в электрическом и магнитном полях, создаваемых движущимся зарядом  $Q$ . Полученный результат следует сравнить с вычислением этой силы при использовании вспомогательной системы отсчета  $K'$ , в которой заряды неподвижны (т. е. с выражением (3.29)).

### 3.5.4 Магнитное поле движущегося заряда и тока

От формулы (3.24) можно перейти к закону Био – Савара – Лапласа, который позволяет рассчитывать магнитные поля, создаваемые проводниками с током. При сравнительно медленных движениях зарядов (при  $v/c \ll 1$ ) в выражении для напряженности электрического поля движущегося заряда можно не учитывать квадратичных по  $v/c$  членов. Подстановка таких приближенных значений напряженности электрического поля в формулу (3.24) соответствует отбрасыванию членов третьей степени по  $v/c$  в выражении для магнитного поля и отбрасыванию членов четвертой степени в выражении для магнитной силы (силы Лоренца), действующей на движущийся заряд. Другими словами, в формуле (3.24) электрическое поле  $\vec{E}$  можно полагать таким же, как и для неподвижного заряда:

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad (\text{СГС}), \quad \vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad (\text{СИ}). \quad (3.30)$$

Подставляя это выражение в (3.24), получаем:

$$\vec{B} = \frac{Q}{cr^3} \vec{v} \times \vec{r} \quad (\text{СГС}), \quad \vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{v} \times \vec{r} \quad (\text{СИ}). \quad (3.31)$$

Чтобы получить выражение для индукции магнитного поля  $\vec{dB}$ , создаваемого элементом  $\vec{dl}$  линейного проводника, по которому идет ток  $I$ , достаточно заменить в формуле (3.31)  $Q\vec{v}$  на  $I\vec{dl}$ :

$$\vec{dB} = \frac{I}{c} \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3} \quad (\text{СГС}), \quad \vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3} \quad (\text{СИ}). \quad (3.32)$$

(здесь учтено, что  $1/c^2 = \epsilon_0\mu_0$ , где  $\mu_0$  — магнитная постоянная).

В приведенном здесь выводе формулы (3.32) закона Био – Савара – Лапласа предполагалось, что возникновение магнитного поля вызвано простым переносом заряда, независимо от того, обусловлен ли этот перенос непосредственно механическим движением заряженного тела или электрическим током в проводнике. Прямое экспериментальное доказательство этого предположения дает, например, опыт Роуланда, в котором было обнаружено магнитное поле вращающегося заряженного диска.

*Рекомендуемая литература:* [5], стр. 177–187, стр. 220–222.

### 3.6 Магнитное поле проводника с током и теория относительности

В этом разделе мы приведем релятивистское объяснение происхождения магнитной силы, действующей на движущийся заряд вблизи проводника с током.

Магнитное взаимодействие между движущимися зарядами, т.е. та часть силы взаимодействия, которая зависит от их скорости, по сути дела представляет собой квадратичный релятивистский эффект, так как магнитное взаимодействие меньше электрического взаимодействия этих зарядов в отношении  $(v/c)^2$ . Это хорошо видно из формулы (3.29). Для не слишком быстро движущихся зарядов магнитное взаимодействие дает лишь малую поправку к электрическому взаимодействию. По образному выражению Парселла (см. [5]) «кажется странным, что магнитные силы достаточно велики, чтобы вращать якоря электромоторов и поднимать тяжести».

Объяснение этому странному на первый взгляд обстоятельству кроется в практически полной электрической нейтральности макроскопических тел. Наличие двух сортов зарядов, способных взаимно скомпенсировать электрическое взаимодействие, приводит к тому, что магнитное взаимодействие для макроскопических тел становится заметным. Но во взаимодействии заряженных частиц в атомах магнитные эффекты действительно занимают второе место после электрических.

Чтобы лучше понять, в каких случаях магнитное взаимодействие становится определяющим, можно рассмотреть магнитную силу, действующую на движущийся заряд в магнитном поле, создаваемом постоянным током в нейтральном проводнике. Ограничимся упрощенной ситуацией в следующем мысленном опыте. Примем, что электроны проводимости (заряд каждого равен  $-e$ ) движутся с постоянной и одинаковой для всех скоростью  $\vec{v}$  вдоль тонкого прямолинейного провода (рис. 3.8). Пусть число их на единицу длины провода равно  $n_-$ . Тогда ток в проводе  $I = -en_-v$ . Число элементарных положительных зарядов (неподвижных ионов решетки) на единицу длины провода (обозначим это число  $n_+$ ) тоже равно  $n_-$ , так как по условию в лабораторной системе отсчета провод не заряжен.

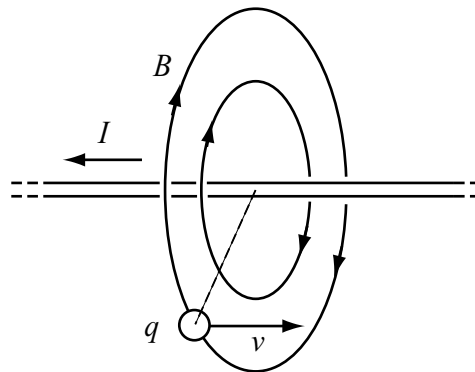


Рис. 3.8: Взаимодействие тока в проводнике и заряда  $q$ , который движется с постоянной скоростью  $v$  параллельно проводу

Рассмотрим пробный заряд  $q$ , который движется параллельно проводу. Для упрощения математических выкладок возьмем частный случай, считая, что скорость заряда  $q$  такая же, как и у электронов проводимости, т. е.  $\vec{v}$  (см. рис. 3.8).

В этом частном случае физическая сторона рассматриваемого вопроса, не осложненная громоздкими математическими преобразованиями, выступает особенно отчетливо.<sup>1</sup>

Для нахождения действующей на заряд  $q$  силы перейдем в систему отсчета  $K'$ , в которой электроны в проводе и пробный заряд неподвижны, а сам провод вместе с положительными зарядами ионов кристаллической решетки движется со скоростью  $-\vec{v}$ . Тогда для действующей на пробный заряд силы можно написать

$$F' = qE', \quad (3.33)$$

так как заряд  $q$  в системе отсчета  $K'$  неподвижен. В этой системе отсчета действующая на заряд сила может быть обусловлена только электрическим полем.

Каким образом нейтральный провод может создать электрическое поле? Дело в том, что провод будет нейтральным только в лабораторной системе отсчета, где электрическое поле и в самом деле отсутствует. Но в системе отсчета  $K'$  провод с током оказывается заряженным. Покажем это.

В системе отсчета  $K'$  провод движется и испытывает лоренцево сокращение длины по сравнению с длиной в лабораторной системе отсчета  $K$ , где он покоится. Поэтому плотность  $n'_+$  движущихся вместе с проводом положительных зарядов в системе отсчета  $K'$  будет больше, чем в лабораторной системе отсчета:

$$n'_+ = \frac{n_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.34)$$

Плотность отрицательных зарядов, напротив, будет больше в лабораторной системе отсчета, чем в системе отсчета  $K'$ , относительно которой они покоятся, т. е.

$$n'_- = n_- \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (3.35)$$

Из соотношений (3.34) и (3.35) легко получить полный заряд единицы длины провода в системе отсчета  $K'$ :

$$e(n'_+ - n'_-) = \frac{en_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v^2}{c^2} = en'_+ \frac{v^2}{c^2}. \quad (3.36)$$

Применяя теорему Гаусса в системе отсчета  $K'$  к цилиндрической поверхности радиуса  $r$ , охватывающей заряженный провод, находим напряженность электрического поля  $E'$  на расстоянии  $r$  от провода:

$$E'(r) = \frac{2en'_+}{r} \frac{v^2}{c^2} \quad (\text{СГС}), \quad E'(r) = \frac{en'_+}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v^2}{c^2} \quad (\text{СИ}). \quad (3.37)$$

Поэтому сила, действующая на пробный заряд  $q$ , в системе отсчета  $K'$  в соответствии с формулами (3.33) и (3.37) равна

$$F' = qE' = \frac{2qen'_+}{r} \frac{v^2}{c^2} \quad (\text{СГС}), \quad F' = qE' = \frac{qen'_+}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v^2}{c^2} \quad (\text{СИ}). \quad (3.38)$$

<sup>1</sup>Подробный разбор общего случая произвольной скорости пробного заряда  $q$ , отличной от скорости электронов в проводнике, можно найти в книге Парселла, см. [5], стр. 181–187.

Используя закон преобразования силы (3.19), находим действующую на заряд силу в лабораторной системе отсчета:

$$F = F' \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{2qen_+}{r} \frac{v^2}{c^2} \quad (\text{СГС}), \quad F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{qen_+}{r} v^2 \quad (\text{СИ}). \quad (3.39)$$

Эта сила направлена по радиусу от провода.

Чтобы получить такое же выражение для действующей на пробный заряд  $q$  силы сразу в лабораторной системе отсчета  $K$  (без промежуточного перехода в систему  $K'$ ), мы должны считать, что вблизи провода с током существует магнитное поле, направленное перпендикулярно проводу. Используя формулу для силы Лоренца (3.21) и учитывая, что в лабораторной системе отсчета  $K$  электрическое поле отсутствует, можно написать:

$$\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}, \quad F = \frac{1}{c} qvB \quad (\text{СГС}), \quad \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}, \quad F = \frac{1}{c} qvB \quad (\text{СИ}). \quad (3.40)$$

Сравнивая полученные выше формулы (3.39) для силы, действующей на пробный заряд  $q$ , с формулами (3.40), получаем выражение для индукции магнитного поля, создаваемого током  $I = en_+v$ , протекающим по прямолинейному проводу:

$$B = \frac{2I}{cr} \quad (\text{СГС}), \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \quad (\text{СИ}). \quad (3.41)$$

К такому же результату для индукции магнитного поля, создаваемого током в проводе приводит, конечно, и применение закона Био – Савара – Лапласа или теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$  по замкнутому круговому контуру, охватывающему провод с током.

В рассмотренном выше примере в лабораторной системе отсчета  $K$  нейтральный проводник с током создает только магнитное поле  $\vec{B}$ , индукция которого дается формулами (3.41), а электрическое поле отсутствует. Во вспомогательной системе отсчета  $K'$  появляется еще и электрическое поле  $E'$ , напряженность которого дается формулами (3.37). Напряженность электрического поля  $E'$  можно выразить через индукцию магнитного поля (3.41) и скорость  $v$  системы отсчета  $K'$ :

$$E' = \frac{2en'_+}{r} \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{2en_+v^2}{rc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v}{c} B \quad (\text{СГС}), \quad (3.42)$$

$$E' = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{en'_+}{r} v^2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{en_+}{r} v^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} vB \quad (\text{СИ}).$$

В векторном виде эту напряженность электрического поля  $\vec{E}'$  можно записать следующим образом:

$$\vec{E}' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}' \quad (\text{СГС}), \quad (3.43)$$

$$\vec{E}' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \vec{v} \times \vec{B} = \vec{v} \times \vec{B}' \quad (\text{СИ}).$$

Формулы (3.43), как и формулы (3.24), получены на частных примерах, но в действительности эти формулы универсальны. Если в некоторой системе отсчета

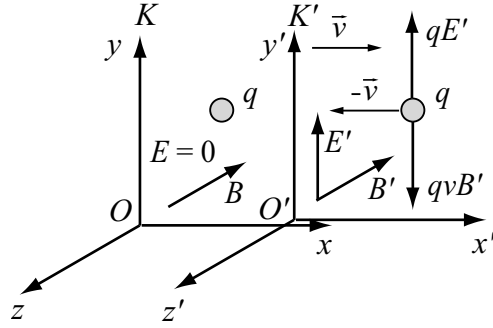


Рис. 3.9: Скращенные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля в двух системах отсчета

В системе отсчета  $K$  существует только магнитное поле  $\vec{B}$ , то в системе отсчета  $K'$ , которая движется относительно  $K$  со скоростью  $\vec{v}$ , появляется еще и электрическое поле  $\vec{E}'$ , напряженность которого выражается формулами (3.43).

В справедливости формул (3.43) можно убедиться на следующем простом примере. Пусть в некоторой системе отсчета  $K'$  имеются скрещенные взаимно перпендикулярные магнитное и электрическое поля  $\vec{B}'$  и  $\vec{E}'$ , причем  $E' < B'$  (СГС) (в СИ  $E' < cB'$ ). Направление их показано на рис. 3.9. Рассмотрим точечный заряд  $q$ , который движется относительно  $K'$  вдоль оси  $Ox'$  влево со скоростью  $-\vec{v}$ , величина которой удовлетворяет условию  $(v/c)B' = E'$  (СГС) (в СИ  $vB' = E'$ ). При такой скорости движения заряда силы, действующие на заряд со стороны электрического и магнитного полей, компенсируют друг друга, т. е. полная действующая на заряд сила равна нулю:

$$\vec{F}' = qE' + \frac{1}{c} q\vec{v}' \times B' = 0 \quad (\text{СГС}), \quad \vec{F}' = qE' + q\vec{v}' \times B' = 0 \quad (\text{СИ}). \quad (3.44)$$

(Здесь  $\vec{v}' = -\vec{v}$  — скорость заряда относительно системы отсчета  $K'$ .) Перейдем теперь в систему отсчета  $K$ , относительно которой  $K'$  движется со скоростью  $\vec{v}$ . Полная действующая на заряд сила и в этой системе отсчета равна нулю. Но в системе отсчета  $K$  заряд  $q$  неподвижен. Отсюда следует, что электрическое поле в системе отсчета  $K$  отсутствует. Значит, в системе отсчета  $K$  есть только магнитное поле, а в системе отсчета  $K'$ , движущейся относительно  $K$  со скоростью  $\vec{v}$ , есть еще и электрическое поле  $\vec{E}'$ . Напряженность этого поля, как видно из формулы (3.44), определяется соотношением:

$$\vec{E}' = \frac{1}{c} \vec{v} \times B' \quad (\text{СГС}), \quad \vec{E}' = \vec{v} \times B' \quad (\text{СИ}). \quad (3.45)$$

Обсуждаемые здесь вопросы тесно связаны с законом электромагнитной индукции Фарадея. Согласно этому закону электродвижущая сила индукции (эдс) в замкнутом контуре пропорциональна скорости изменения потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим контуром. Допустим, что изменение потока связано с движением контура относительно источников постоянного магнитного поля (проводников с током или постоянных магнитов). С точки зрения лабораторной системы отсчета эдс в контуре обусловлена работой силы Лоренца,

действующей на движущийся вместе с контуром пробный заряд (работа вычисляется при мысленном перемещении пробного заряда вдоль движущегося контура).

Перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с контуром. В этой системе отсчета пробный заряд неподвижен и, следовательно, сила Лоренца на него не действует. Но эдс в контуре — это скалярная величина, которая не зависит от того, в какой системе отсчета ее вычислять. Возникает вопрос: работа какой силы обуславливает возникновение эдс в контуре с точки зрения связанной с контуром системы отсчета?

Из рассмотренных в этом разделе примеров ясно, что в связанной с контуром системе отсчета действующая на пробный заряд сила вызвана электрическим полем, которое отсутствует в лабораторной системе отсчета, но существует в связанной с контуром системе отсчета, движущейся относительно источников магнитного поля. Напряженность этого поля определяется соотношением (3.43).

*Рекомендуемая литература:* [5], стр. 190–196, стр. 214–220.

### 3.7 Преобразование электромагнитного поля при переходе в другую систему отсчета. Инварианты электромагнитного поля

Закон преобразования электрического и магнитного полей при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую можно записать в очень простой форме в том случае, когда относительная скорость рассматриваемых систем отсчета мала по сравнению со скоростью света ( $v \ll c$ ). Ограничимся этим случаем. Обратимся к формуле (3.24). Если в системе отсчета  $K'$  имеется только электрическое поле  $\vec{E}'$ , то в системе  $K$  появляется еще и магнитное поле, индукция которого выражается формулой (3.24). Электрическое поле в системе отсчета  $K$  отличается от  $\vec{E}'$  только квадратичными по  $v/c$  членами, как это видно из формул (3.6) и (3.7). Поэтому в формуле (3.24)  $\vec{E}$  можно заменить на  $\vec{E}'$ :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E}' \quad (\text{СГС}), \quad \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}' \quad (\text{СИ}). \quad (3.46)$$

Эта формула дает то добавочное магнитное поле в системе отсчета  $K$ , которое обусловлено движением (вместе с системой отсчета  $K'$ ) со скоростью  $\vec{v}$  зарядов, создающих электрическое поле  $\vec{E}'$ . Если же в системе отсчета  $K'$  уже существовало еще и некоторое магнитное поле  $\vec{B}'$ , то в рассматриваемом приближении ( $v \ll c$ ) его просто следует добавить в правую часть формулы (3.46):

$$\vec{B} \approx \vec{B}' + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E}' \quad (\text{СГС}), \quad \vec{B} \approx \vec{B}' + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}' \quad (\text{СИ}). \quad (3.47)$$

Совершенно аналогично, рассматривая формулу (3.43) и пренебрегая различием между  $B$  и  $B'$  (что допустимо при  $v \ll c$ ), мы можем считать, что (3.43) дает выражение для того добавочного электрического поля, которое обусловлено движением источников магнитного поля (неподвижных в  $K'$ ) относительно системы отсчета  $K$ . Если в исходной системе отсчета  $K'$  уже существовало некоторое электрическое поле  $\vec{E}'$ , то его следует включить в правую часть формулы (3.43). В результате



получаем следующую приближенную (справедливую при  $v \ll c$ ) формулу для преобразования электрического поля при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую:

$$\vec{E} \approx \vec{E}' - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}' \quad (\text{СГС}), \quad \vec{E} \approx \vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}' \quad (\text{СИ}). \quad (3.48)$$

Используя формулы преобразования полей (3.47) и (3.48), можно показать, что скалярное произведение  $\vec{E}\vec{B}$  и разность квадратов  $E^2 - B^2$  (в единицах СИ  $E^2 - c^2 B^2$ ) не изменяются при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, т. е. представляют собой *инварианты электромагнитного поля* относительно преобразований Лоренца:

$$\begin{aligned} \vec{E}\vec{B} &= \vec{E}'\vec{B}' \quad (\text{СГС}), & \vec{E}\vec{B} &= \vec{E}'\vec{B}' \quad (\text{СИ}), \\ E^2 - B^2 &= E'^2 - B'^2 \quad (\text{СГС}), & E^2 - c^2 B^2 &= E'^2 - c^2 B'^2 \quad (\text{СИ}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

В действительности эти инварианты точные (в отличие от приведенных здесь приближенных формул для преобразования полей), т. е. величины  $\vec{E}\vec{B}$  и  $E^2 - B^2$  (в СИ  $\vec{E}\vec{B}$  и  $E^2 - c^2 B^2$ ) остаются инвариантными при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую при любых относительных скоростях систем отсчета, вплоть до сколь угодно близких к скорости света.

Из наличия этих инвариантов вытекают следующие свойства электромагнитного поля. Если в какой-то системе отсчета векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  взаимно ортогональны, то они ортогональны и в любой другой системе отсчета. Если в какой-нибудь системе отсчета выполняется соотношение  $E = B$  (в единицах СИ  $E = cB$ ), то оно выполняется и в любой другой системе отсчета. Ортогональность электрического и магнитного полей и соотношение  $E = B$  (в СИ  $E = cB$ ) между их модулями характерны для электромагнитного поля бегущей электромагнитной волны в вакууме. Таким образом, эти свойства электромагнитной волны выполняются сразу во всех инерциальных системах отсчета.

*Рекомендуемая литература:* [5], стр. 214–220.

### 3.8 Эффект Доплера и абберация света

Эти явления уже были рассмотрены ранее (см. стр. 21 и 32). Эффект Доплера, т. е. изменение частоты принимаемых сигналов при относительном движении источника и приемника сигналов, объяснялся там на основе релятивистского кинематического эффекта преобразования промежутков времени (1.6). Явление абберации объяснялось на основе релятивистского преобразования направления скорости, вытекающего из (1.23). Здесь мы приведем релятивистское объяснение этих явлений с несколько иной точки зрения, рассматривая эффект Доплера как преобразование частоты плоской монохроматической электромагнитной волны, а абберацию — как преобразование направления волны при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Зависимость напряженности электрического поля от координат и времени в плоской монохроматической волне имеет вид:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}). \quad (3.50)$$

Состояние электромагнитного поля (например, максимум или ноль напряженности электрического поля и индукции магнитного поля) в некоторой мировой (пространственно-временной) точке  $(ct, r)$  не может зависеть от выбора системы отсчета. Так как это состояние определяется фазой волны  $(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ , то фаза должна быть инвариантом преобразований Лоренца. Инвариантность фазы можно пояснить еще и следующим образом. Представим себе цуг электромагнитных волн с одинаковой длиной волны, имеющий конечную протяженность. Число отдельных волн, т. е. периодов в этом цуге, определяется разностью значений фазы, соответствующих началу и концу цуга. Но число периодов, укладывающихся на протяжении данного цуга, одинаково для всех наблюдателей. Поэтому фаза должна оставаться неизменной при переходе от одной системы отсчета к другой.

Инвариантность фазы  $(\omega t - \vec{k}\vec{r})$  относительно преобразований Лоренца позволяет рассматривать это выражение как скалярное произведение следующих четырехвекторов: четырехмерного радиуса-вектора  $(ct, \vec{r})$  и четырехмерного волнового вектора  $(\omega/c, \vec{k})$ , пространственной компонентой которого служит трехмерный волновой вектор  $\vec{k}$ , а временной — частота волны  $\omega$ , деленная на  $c$ . Для электромагнитной волны в вакууме  $k = \omega/c$ , поэтому четырехмерный волновой вектор имеет нулевую инвариантную «длину»:  $(\omega/c)^2 - k^2 = 0$ .

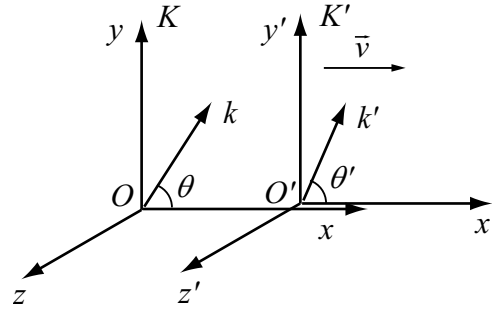


Рис. 3.10: Преобразование волнового вектора плоской монохроматической электромагнитной волны при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую

Введение четырехмерного волнового вектора удобно потому, что закон преобразования его проекций при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую позволяет сразу найти преобразование частоты волны и ее направления, т. е. получить релятивистские выражения для эффекта Доплера и аберрации. Для этого достаточно в формулах преобразований Лоренца (1.17) сделать замену  $ct \rightarrow \omega/c$ ,  $\vec{r} \rightarrow \vec{k}$ . Преобразование направления вектора  $\vec{k}$  описывает эффект аберрации, т. е. преобразование направления волны, а преобразование временной составляющей четырехмерного волнового вектора, т. е. частоты волны, описывает эффект Доплера.

Проекции четырехмерного волнового вектора в  $K$ , равные  $(\omega/c, k_x, k_y, k_z)$ , выражаются через проекции в системе  $K'$   $(\omega'/c, k'_x, k'_y, k'_z)$  по формулам преобразований Лоренца (1.17), если в них сделать замену  $ct \rightarrow \omega/c$ ,  $x \rightarrow k_x$ ,  $y \rightarrow k_y$ ,  $z \rightarrow k_z$ . Пусть в системе отсчета  $K$  направление волны образует угол  $\theta$  с осью  $x$  (рис. 3.10), а частота волны равна  $\omega$ . Тогда  $k = \omega/c$  и  $k_x = (\omega/c) \cos \theta$ ,  $k_y = (\omega/c) \sin \theta$ ,  $k_z = 0$ .

Подставляя эти величины в формулы (1.17), получаем:

$$\omega = \frac{\omega' + vk'_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \omega' \frac{1 + (v/c) \cos \theta'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.51)$$

$$\frac{\omega}{c} \cos \theta = \frac{\omega'}{c} \frac{\cos \theta' + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{\omega}{c} \sin \theta = \frac{\omega'}{c} \sin \theta', \quad (3.52)$$

Будем для определенности систему отсчета  $K'$  связывать с источником волны, а систему  $K$  — с наблюдателем (т. е. с приемником). Формулу для абберации можно получить, разделив почленно второе из равенств (3.52) на первое:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\cos \theta' + v/c}. \quad (3.53)$$

Если в системе отсчета  $K'$  направление волны перпендикулярно скорости наблюдателя ( $\theta' = 90^\circ$ ), то для системы  $K$ , связанной с наблюдателем, формула (3.53) дает  $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{c^2/v^2 - 1}$ . Отсюда для угла абберации  $\alpha = \pi/2 - \theta$  получаем  $\sin \alpha = v/c$ , что совпадает со значением, найденным выше из релятивистского закона преобразования скорости (см. стр. 33).

Формула (3.51) выражает воспринимаемую наблюдателем частоту  $\omega$  волны через собственную частоту (частоту источника)  $\omega_0 = \omega'$ . Случай  $\theta' = 0$  соответствует сближению источника и приемника вдоль одной прямой (продольный эффект Доплера). Частота  $\omega$  при этом, как следует из (3.51), больше собственной частоты источника  $\omega_0$  («синее» смещение):

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}, \quad (3.54)$$

Если источник удаляется от наблюдателя вдоль соединяющей их линии, то  $\theta' = \pi$ ,  $\cos \theta' = -1$  и (3.51) дает для частоты регистрируемой приемником волны значение, меньшее собственной частоты («красное» смещение):

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}, \quad (3.55)$$

что совпадает с относящейся к этому случаю формулой (1.12). В общем случае вместо (3.51) удобнее иметь формулу, в которой частота  $\omega$  выражалась бы не через угол  $\theta'$ , а через угол  $\theta$ , характеризующий направление волны в системе отсчета  $K$ , связанной с наблюдателем. Для этого выразим  $\cos \theta'$  с помощью формулы (3.52), подставив в нее предварительно  $\omega/\omega'$  из (3.51):

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - v/c}{1 - (v/c) \cos \theta}. \quad (3.56)$$

Это выражение эквивалентно формуле (3.53), т. е. также описывает абберацию. Подставляя (3.56) в (3.51), окончательно находим:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c) \cos \theta}. \quad (3.57)$$

Формула (3.57) описывает релятивистский эффект Доплера при произвольном направлении волны. Случай  $\theta = 0$  (или  $\theta = \pi$ ) соответствует сближению (или удалению) источника и приемника вдоль одной прямой, т. е. продольному эффекту Доплера. Если волна приходит к наблюдателю по направлению, перпендикулярному скорости источника, то в формуле (3.57) следует положить  $\theta = \pi/2$ , что дает  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Это совпадает с приведенным в Главе 1 выражением (1.14) для поперечного эффекта Доплера.

Эффект Доплера существует не только для электромагнитных волн в вакууме, но и для волн любой природы, например, для звуковых волн в воздухе, распространение которых описывается классической механикой. Принципиальное отличие эффекта Доплера для волн в некоторой среде связано с тем, что скорость волн в среде, в противоположность скорости света в вакууме, зависит от системы отсчета. Если в системе отсчета, где среда покоится, скорость волн равна  $u$ , то в любой другой системе отсчета скорость волн будет зависеть от их направления и изменяться в пределах от  $v - u$  до  $v + u$  (при  $v \ll c$ ). В связи с этим сдвиг частоты в эффекте Доплера для волн в среде зависит не от относительной скорости источника и приемника, а от скоростей каждого из них относительно среды.

Из приведенного в Главе 1 вывода (см. стр. 21) отчетливо видно, что возникновение эффекта Доплера связано, во-первых, с непрерывно изменяющимся расстоянием между источником и приемником и, во-вторых, с релятивистским преобразованием промежутков времени между событиями при переходе от одной системы отсчета к другой. Первое обстоятельство не имеет никакого отношения к теории относительности, и именно оно определяет существование эффекта Доплера в классической теории. Зависимость же скорости волн от системы отсчета приводит к тому, что в случаях движения источника волн относительно среды или движения приемника (наблюдателя) классические формулы для сдвига частоты получаются разными даже при одной и той же относительной скорости движения источника волн и наблюдателя. Например, при сближении источника и приемника со скоростью  $v$  частота регистрируемых колебаний  $\omega$  в случае неподвижного относительно среды источника равна  $\omega_0(1 + v/u)$ , а в случае неподвижного приемника равна  $\omega_0/(1 - v/u)$ . Различие этих случаев становится несущественным только при  $v \ll u$ : в предельном случае движения со скоростью, малой по сравнению со скоростью волн в среде, сдвиг частоты зависит лишь от относительной скорости источника и приемника. Соответствующая формула  $\Delta\omega/\omega_0 \approx v/u$  совпадает с формулой (1.13) для продольного эффекта Доплера при  $v \ll c$ .

Отметим, что поперечный эффект Доплера, связанный с преобразованием промежутков времени между событиями при переходе от одной системы отсчета к другой, является чисто релятивистским и вообще отсутствует в классической теории.

# Литература

- [1] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971.
- [2] Стрелков С.П. Механика. М., «Наука», 1975.
- [3] Тэйлор Э.Ф., Уилер Дж.А. Физика пространства-времени. М., «Мир», 1969.
- [4] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 2 (пространство, время, движение); вып. 6 (электродинамика). М., «Мир», 1966.
- [5] Парселл Э., Электричество и магнетизм (берклиевский курс физики, т. 2). М., «Наука», 1972.
- [6] Сборник задач по общему курсу физики. Механика (под ред. Яковлева И.А.). Изд. 4-е, М., «Наука», 1977.
- [7] Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., «Физматгиз», 1961.
- [8] Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., «Наука», 1972.

# Оглавление

<b>1 Основные положения теории относительности и релятивистская кинематика</b>	<b>3</b>
1.1 Принцип относительности в классической механике. Преобразования Галилея . . . . .	4
1.1.1 Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности Галилея . . . . .	4
1.1.2 Математическое выражение принципа относительности классической механики . . . . .	5
1.1.3 Принцип относительности и электродинамика. Опыт Майкельсона и Морли . . . . .	8
1.2 Постулаты теории относительности . . . . .	9
1.3 Релятивистская кинематика. Измерение промежутков времени и расстояний. Синхронизация часов . . . . .	12
1.3.1 Одновременность событий и измерение времени . . . . .	12
1.3.2 Измерение пространственных расстояний . . . . .	13
1.4 Преобразование промежутков времени и расстояний . . . . .	14
1.4.1 Относительность одновременности . . . . .	14
1.4.2 Преобразование промежутков времени . . . . .	15
1.4.3 Преобразование пространственных расстояний . . . . .	17
1.4.4 Экспериментальные подтверждения релятивистских кинематических эффектов . . . . .	20
1.4.5 Релятивистский эффект Доплера . . . . .	21
1.5 Преобразования Лоренца . . . . .	24
1.5.1 Вывод преобразований Лоренца . . . . .	24
1.5.2 Следствия преобразований Лоренца . . . . .	26
1.6 Релятивистский закон преобразования скорости . . . . .	28
1.6.1 Преобразование скорости и предельная скорость . . . . .	29
1.6.2 Относительная скорость и скорость разлета . . . . .	29
1.6.3 Движущийся изотропный источник света . . . . .	31
1.6.4 Аберрация света звезд . . . . .	32
1.7 Пространственно-временной интервал между событиями . . . . .	34
1.7.1 Определение интервала между событиями и инвариантность интервала . . . . .	34
1.7.2 Классификация интервалов . . . . .	35
1.8 Геометрия пространства-времени . . . . .	37
1.8.1 Аналогия с евклидовой геометрией . . . . .	37
1.8.2 Пространство-время и геометрия Минковского . . . . .	38

1.8.3	Диаграммы Минковского и системы отсчета . . . . .	39
1.8.4	Преобразование масштабов на диаграммах Минковского . . . . .	41
1.9	Четырехмерные векторы . . . . .	43
1.9.1	Пространственные и временные координаты . . . . .	44
1.9.2	Инвариантность уравнений относительно преобразований Лоренца . . . . .	44
<b>2</b>	<b>Релятивистская динамика</b>	<b>47</b>
2.1	Импульс частицы в релятивистской механике . . . . .	47
2.1.1	Принцип соответствия и релятивистский импульс . . . . .	48
2.1.2	Поперечная составляющая импульса в двух системах отсчета . . . . .	48
2.1.3	Вывод выражения для релятивистского импульса . . . . .	50
2.2	Релятивистская энергия . . . . .	52
2.2.1	Кинетическая энергия частицы . . . . .	52
2.2.2	Масса покоя и энергия покоя . . . . .	54
2.2.3	Пропорциональность массы и энергии . . . . .	56
2.3	Преобразование энергии-импульса . . . . .	59
2.4	Закон сохранения энергии-импульса . . . . .	61
2.5	Преобразование силы . . . . .	63
2.6	Простые задачи релятивистской динамики . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Принцип относительности в курсе электричества и магнетизма</b>	<b>71</b>
3.1	Измерение величины движущегося заряда. Инвариантность заряда . . . . .	72
3.2	Преобразование напряженности электрического поля . . . . .	74
3.3	Электрическое поле равномерно движущегося точечного заряда . . . . .	75
3.4	Поле излучения ускоренно движущегося точечного заряда . . . . .	76
3.5	Принцип относительности и электростатика. Магнитное поле . . . . .	79
3.5.1	Сила в электростатическом поле и сила Лоренца . . . . .	79
3.5.2	Магнитное поле при движении зарядов . . . . .	80
3.5.3	Взаимодействие движущихся зарядов . . . . .	81
3.5.4	Магнитное поле движущегося заряда и тока . . . . .	83
3.6	Магнитное поле проводника с током и теория относительности . . . . .	84
3.7	Преобразование электромагнитного поля при переходе в другую систему отсчета. Инварианты электромагнитного поля . . . . .	88
3.8	Эффект Доплера и абберация света . . . . .	89