Комментарии к лекциям по физике

Тема: Геометрия пространства-времени.

Содержание лекции

Интервал между событиями. Геометрическая интерпретация преобразований Лоренца. Четырехмерное пространство-время Минковского. Световой конус. Мировые линии. Причинность и классификация интервалов. Интерпретация относительности одновременности событий, относительности промежутков времени и расстояний с помощью диаграмм Минковского. Четырехвекторы в пространстве Минковского. Четырехмерный радиус-вектор события.

Пространственно-временной интервал между событиями

Из постулатов теории относительности следует, что расстояние между точками и промежуток времени между событиями, считавшиеся в классической физике абсолютными, не зависящими от системы отсчета, в действительности относительны, т. е. изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Задача нахождения абсолютного (т. е. не зависящего от точки зрения наблюдателя) выражения законов природы тесно связана с нахождением абсолютных, инвариантных величин. Одна из таких величин фигурирует уже в основных постулатах теории — это максимальная скорость распространения взаимодействий, равная скорости света в пустоте. Другая инвариантная величина — *пространственно-временной интервал между событиями*, обобщающий понятия расстояния в пространстве и промежутка времени. Интервал для произвольной пары событий определяется следующим образом:

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}, \tag{1}$$

где $t_{12} = t_2 - t_1$ — промежуток времени между рассматриваемыми событиями, измеренный в некоторой системе отсчета, а

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

— пространственное расстояние между точками, в которых произошли эти события, измеренное в той же системе отсчета. В частности, если одно из событий происходит при $t = 0$ в начале координат $x = y = z = 0$, а второе — в момент времени t в точке x, y, z, то, в соответствии с определением (1), интервал между ними выражается через координаты и время второго события следующим образом:

$$s = \sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2}. \tag{2}$$

Пусть, например, первое событие представляет собой вспышку света, происходящую при $t = t' = 0$ в начале координат (которое в этот момент совпадает для систем отсчета K и K'), а второе событие — приход фронта этой световой волны в некоторую точку. Допустим, что с точки зрения системы отсчета K второе событие произошло в точке с координатами x, y, z в момент времени t. Так как свет распространяется со скоростью c, интервал s для такой пары событий, как следует из определения (2), равен нулю: $s = 0$. В системе отсчета K' координаты и время второго события x', $'y$, z' и t' будут иными, но и для них в силу инвариантности скорости света будет выполняться соотношение $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$, т. е. и в системе отсчета K' интервал между рассматриваемыми событиями равен нулю: $s' = 0$. Таким образом, если два события связаны между собой световым сигналом, то интервал между ними равен нулю во всех инерциальных системах отсчета. Этот результат можно рассматривать как математическое выражение абсолютного характера скорости света.

Для любой другой пары событий, не связанных световым сигналом, интервал отличен от нуля, но его величина во всех инерциальных системах отсчета одинакова:

$$\sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2} = \sqrt{c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2}. \tag{3}$$

В этом легко убедиться с помощью преобразований Лоренца, выразив в левой части (3) x, y, z и t через координаты и время x', y', z' и t' этого же события в другой системе отсчета K'.

Понятие инвариантного пространственно-временно́го интервала между событиями обобщает понятия промежутка времени и пространственного расстояния, которые инвариантны по классическим представлениям, но не являются таковыми в релятивистской теории.

Классификация интервалов

В зависимости от того, какая составляющая — временна́я или пространственная — преобладает в интервале между рассматриваемыми событиями, возникает деление интервалов на времениподобные и пространственноподобные. Для *времениподобного интервала* $c^2t_{12}^2 > l_{12}^2$ (или $c^2t^2 > x^2 + y^2 + z^2$, если одно из пары событий происходит в начале координат в начальный момент времени), т. е. квадрат такого интервала положителен: $s_{12}^2 > 0$. В случае времениподобного интервала всегда можно найти такую систему отсчета K', в которой пространственная составляющая интервала обращается в нуль: $l'_{12} = 0$, т. е. в K' рассматриваемые события происходят в одном месте. Промежуток времени между ними, измеренный в такой системе отсчета K', представляет для данной пары событий собственное время: $t'_{12} = \tau_0$. Иначе говоря, для событий, разделенных времениподобным интервалом, всегда существует такая система отсчета, в которой интервал представляет собой (с точностью до постоянного множителя c) просто промежуток времени τ_0 между этими событиями:

$$s_{12} = \sqrt{c^2t_{12}^2 - l_{12}^2} = \sqrt{c^2t_{12}'^2 - l_{12}'^2} = \sqrt{c^2t_{12}'^2} = c\tau_0.$$

В случае пары событий, разделенных времениподобным интервалом, понятия «раньше» или «позже» имеют абсолютный характер, не зависящий от системы отсчета. Между такими событиями в принципе может существовать причинно-следственная связь.

Для событий, разделенных пространственноподобным интервалом, $c^2t_{12}^2 < l_{12}^2$ (или $c^2t^2 < x^2 + y^2 + z^2$, если одно из пары событий происходит в начале координат в начальный момент времени), т. е. квадрат такого интервала отрицателен: $s_{12}^2 < 0$. Сам интервал в этом случае выражается мнимым числом. В случае пространственноподобного интервала всегда можно найти такую систему отсчета K', в которой временна́я составляющая обращается в нуль: $t'_{12} = 0$, т. е. в K' рассматриваемые события происходят одновременно. Это значит, что абсолютная величина пространственноподобного интервала $|s_{12}|$ в системе отсчета K' сводится к пространственному расстоянию между точками, в которых произошли рассматриваемые события:

$$|s_{12}| = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = \sqrt{l_{12}'^2 - c^2 t_{12}'^2} = \sqrt{l_{12}'^2} = l'_{12}.$$

Таким образом, модуль пространственноподобного интервала $|s_{12}|$ равен пространственному расстоянию $l'_{12} = l_0$ между событиями, измеренному в той системе отсчета, где эти события происходят одновременно («собственное расстояние»).

Для пары событий, разделенных пространственноподобным интервалом, понятия «одновременно», «раньше», «позже» относительны: всегда можно указать такие системы отсчета, в которых первое событие происходит раньше второго, и такие, в которых второе происходит раньше первого. Очевидно, что между событиями, временна́я последовательность которых зависит от системы отсчета, причинно-следственные связи невозможны. Впрочем, невозможность существования причинной связи между событиями, разделенными пространственноподобным интервалом, когда $l_{12} > ct_{12}$, непосредственно видна из того, что никакой сигнал, никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, превышающей c.

Равный нулю интервал между событиями, связанными световым сигналом, называют *светоподобным*. В этом отношении понятие интервала как инвариантного расстояния между событиями в пространстве-времени существенно отличается от понятия расстояния между точками в евклидовой геометрии: расстояние в геометрии равно нулю только для совпадающих точек, но пространственно-временной интервал может быть равен нулю и для несовпадающих событий.

Подчеркнем, что разделение интервалов на времениподобные, пространственноподобные и светоподобные имеет абсолютный характер, т. е. не зависит от системы отсчета. Абсолютный характер рассмотренной классификации интервалов непосредственно следует из инвариантности интервала.

Пространство-время и геометрия Минковского

Преобразования Лоренца для координат и времени события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой можно рассматривать как геометрические преобразования в четырехмерном пространстве-времени, на осях которого откладываются три пространственные координаты и время события. Перемешивание пространственных координат и времени при преобразованиях Лоренца и существование инвариантной комбинации (т. е. интервала) позволяет рассматривать пространство и время как единое четырехмерное многообразие. Такая геометрическая интерпретация преобразований Лоренца впервые предложена немецким математиком Г. Минковским в 1908 г.

При выборе направления одной из осей координат (оси Ox) в системах K и K' вдоль направления относительной скорости систем отсчета координаты y и z не за-

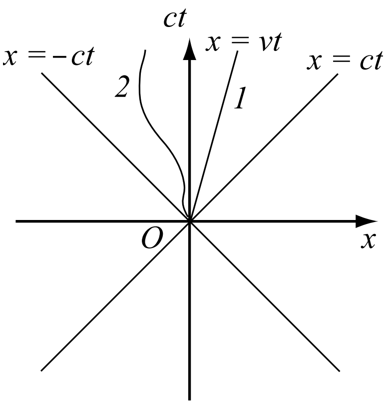

Рис. 1: Диаграмма Минковского и мировые линии

трагиваются при преобразованиях Лоренца. Поэтому для геометрической интерпретации преобразований Лоренца вместо четырехмерного пространства-времени достаточно рассматривать двумерные диаграммы пространства-времени (диаграммы Минковского), а именно плоскость x, ct (рис. 1). Некоторому событию соответствует точка этой плоскости с координатами (x, ct), называемая *мировой точкой*.

Последовательности событий, происходящих с одной частицей, на диаграмме Минковского сопоставляется непрерывная линия, называемая *мировой линией частицы*. Точки этой линии определяют координаты частицы во все моменты времени. Если, например, частица движется вправо вдоль оси Ox с постоянной скоростью v, то ее мировая линия на диаграмме Минковского представляет собой прямую, уравнение которой $x = vt$ (прямая *1* на рис. 1; предполагается, что при $t = 0$ частица находилась в точке $x = 0$). Мировая линия неравномерно движущейся частицы искривлена (кривая *2* на рис. 1). Мировая линия неподвижной частицы, все время находящейся в начале координат — это ось времени (ее уравнение $x = 0$). Другими словами, ось времени — это мировая линия начала координат. Совокупность точек, находящихся на оси Ox диаграммы Минковского, изображает множество одновременных событий, происходящих при $t = 0$ в разных местах оси Ox.

Мировая линия светового сигнала, вышедшего из начала координат в момент времени $t = 0$ и распространяющегося в положительном направлении оси Ox, имеет уравнение $x = ct$. Это биссектриса координатного угла на диаграмме Минковского (рис. 1). Все события, изображаемые точками этой линии, отделены от события $(x = 0, t = 0)$ светоподобным (равным нулю) интервалом. Мировая линия сигнала, распространяющегося в отрицательном направлении оси Ox, имеет уравнение $x = -ct$. Вместе мировые линии световых сигналов $x = \pm ct$, распространяющихся из мировой точки $(x = 0, t = 0)$, образуют на диаграмме Минковского так называемый *световой конус*.

Диаграммы Минковского и системы отсчета

Введем теперь наряду с системой отсчета K систему K', которая, как обычно, движется вдоль оси Ox вправо со скоростью v. Мировая линия начала координат системы K' (т. е. частицы, имеющей координату $x' = 0$ во все моменты времени t') дается уравнением $x = vt$. Поэтому ось времени ct' системы отсчета K' на рассматриваемой диаграмме Минковского (где ось ct направлена вертикально вверх) *наклонена* вправо на угол θ, причем $\operatorname{tg}\theta = v/c$ (рис. 2, a). Точки этой прямой изображают совокупность событий, происходящих в начале координат системы K' в разные моменты времени.

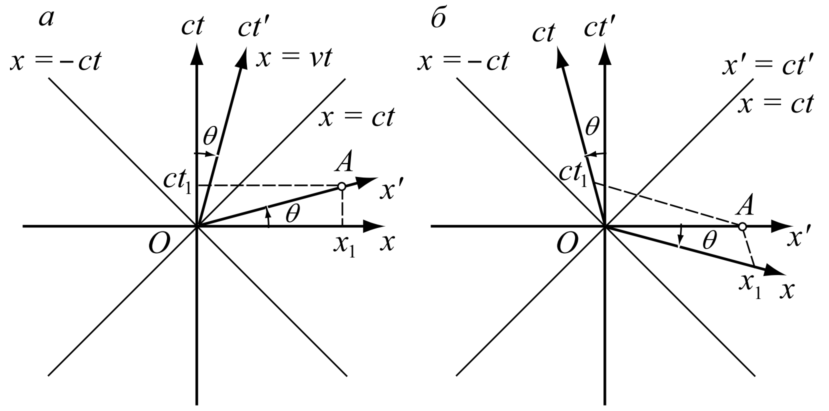

Рис. 2: Оси координат и времени системы K' на диаграмме Минковского

Ось Ox' системы отсчета K' — это прямая, на которой в пространстве-времени лежат все события, одновременные (в этой системе) с событием $(x' = 0, t' = 0)$. Чтобы найти уравнение этой прямой в переменных x, ct, обратимся к преобразованиям Лоренца (см. лекцию 8), и в формуле для преобразования времени

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

положим $t' = 0$. Отсюда получаем $ct = (v/c)x$, т. е. ось Ox' на диаграмме Минковского отклонена вверх от оси Ox и составляет с ней такой же угол θ ($\operatorname{tg}\theta = v/c$), как и ось ct' с осью ct. Этого и следовало ожидать, так как вследствие инвариантности скорости света мировая линия светового сигнала $x = ct$ (и $x' = ct'$) должна быть биссектрисой координатного угла как в системе K, так и в K'. Система координат (x', ct') оказывается косоугольной на диаграмме Минковского (рис. 2, a), где оси (x, ct) системы отсчета K образуют прямой угол.

Разумеется, можно построить диаграмму Минковского и так, чтобы на ней система координат (x', ct') была прямоугольной. Но тогда система координат (x, ct), соответствующая системе отсчета K, будет на этой диаграмме Минковского косоугольной (рис. 2, *б*): оси координат (x, ct) образуют на ней тупой угол.

В отличие от преобразования координат точки на плоскости в евклидовой геометрии при переходе к повернутым координатным осям, в геометрии пространства-времени инвариант преобразований представляет собой *разность* квадратов временнóй и пространственной координат $c^2t^2 - x^2$ (квадрат интервала), а не *сумму* квадратов $x^2 + y^2$ (квадрат расстояния), как в евклидовой геометрии. Если в евклидовой геометрии обе координаты эквивалентны, то в геометрии Минковского различие между пространственной и временнóй координатами события проявляется в том, что в выражение для инварианта геометрических преобразований (интервала, т. е. «расстояния» между событиями в мире Минковского) квадраты пространственной и временно́й координат входят с противоположными знаками. Такую геометрию называют *псевдоевклидовой*.

Диаграммы пространства-времени дают наглядное геометрическое представление многим выводам теории относительности, которые с точки зрения «здравого смысла» кажутся парадоксальными. В частности, относительность одновременности двух событий можно следующим образом продемонстрировать на диаграммах рис. 2. Событие $A(x_1, t_1)$ с точки зрения наблюдателя в системе отсчета K произошло позже, чем событие $O(x = 0, t = 0)$, так как $t_1 > 0$. Но с точки зрения системы отсчета K' оба эти события произошли одновременно, так как соответствующие им точки диаграммы Минковского лежат на оси Ox', т. е. $t'_1 = t'_0 = 0$.

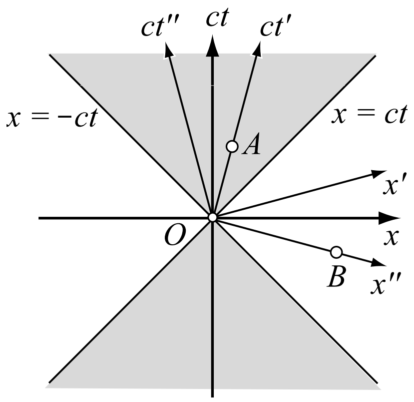

Рис. 3: Световой конус и различные области пространства-времени на диаграмме Минковского

Мировые линии световых сигналов $x = \pm ct$ делят псевдоевклидову плоскость пространства-времени на отдельные области (рис. 3). Внутри светового конуса в заштрихованной области лежат события, отделенные от события $O(x = 0, t = 0)$ времениподобными интервалами:

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 > 0.$$

Для любого события A можно найти такую систему отсчета K', в которой событие A произошло в одном месте с событием $O(x' = 0, t' = 0)$, т. е. в начале координат системы отсчета K', так что обе точки, изображающие эти события, лежат на оси времени ct'. «Расстояние» в пространстве-времени между такими событиями равно (с точностью до постоянного множителя c) просто промежутку времени t' между ними, измеренному в системе отсчета K'. Все события из верхней части заштрихованной области внутри светового конуса с точки зрения всех мыслимых систем отсчета произошли позже события O. Поэтому соответствующую область пространства-времени можно назвать *абсолютным будущим* по отношению к событию O. Событие O в принципе может быть причиной любого из этих событий. События из нижней части заштрихованной области произошли абсолютно раньше события O, и эта область может быть названа *абсолютным прошлым* по отношению к событию O.

Множество событий, лежащих вне светового конуса (в незаштрихованной области на (рис. 3), можно назвать *абсолютно удаленным* по отношению к событию O. Все такие события удалены от события O пространственноподобным интервалом ($s^2 = c^2t^2 - x^2 < 0$) и не могут иметь с ним причинно-следственной связи. Для любого события B из абсолютно удаленного всегда можно найти такую систему отсчета K'', с точки зрения которой оно произошло одновременно с событием O (см. рис. 3) при $t'' = 0$, и изображающие эти события точки лежат на оси Ox''. «Расстояние» в пространстве-времени между такими событиями (пространственно-временной интервал) выражается мнимым числом, модуль которого равен пространственной координате x'' события B в системе отсчета K''.

Преобразование масштабов на диаграммах Минковского

На евклидовой плоскости множество точек, равноудаленных от начала координат, лежит на окружности. Поэтому при повороте осей координат единичные векторы вдоль новых осей изображаются отрезками той же длины, что и единичные векторы вдоль прежних осей. Но на псевдоевклидовой плоскости пространства-времени «расстояние» от начала координат до некоторого события — это интервал $s = \sqrt{c^2t^2 - x^2}$. Поэтому множество точек (событий), равноудаленных от начала координат, представляет собой гиперболу $s^2 = c^2t^2 - x^2$.

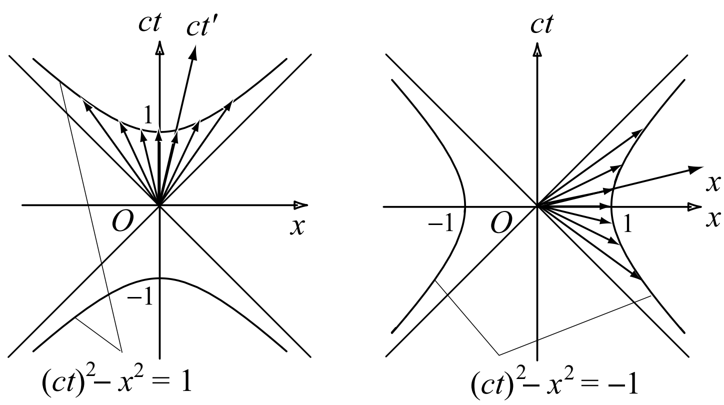

Рис. 4: Векторы единичной длины в пространстве-времени и множество событий, равноудаленных от начала координат, на диаграмме Минковского

Рассмотрим гиперболу $c^2t^2 - x^2 = 1$, для которой $s^2 = 1$ (рис. 4, a). Она пересекает ось времени ct в точках $ct = \pm 1$. Если на диаграмме Минковского провести лучи из начала координат до пересечения с этой гиперболой, то отрезок каждого такого луча оределит единичную длину в данном (времениподобном) направлении на псевдоевклидовой плоскости пространства-времени. Иначе говоря, данная гипербола определяет масштаб для каждого времениподобного направления диаграммы Минковского. Для такой масштабной гиперболы возможна наглядная физическая интерпретация. Пусть из начала координат одновременно (при $t = 0$) вылетают частицы, движущиеся со всевозможными скоростями, но обладающие одним и тем же собственным временем жизни τ_0, таким, что $c\tau_0 = 1$. Тогда множество мировых точек, соответствующих событиям распада этих частиц, лежит в пространстве-времени как раз на масштабной гиперболе, а отрезки лучей, проведенные из начала координат до пересечения с масштабной гиперболой, представляют собой мировые линии таких частиц от рождения до распада.

Аналогично можно построить масштабную гиперболу $c^2t^2 - x^2 = -1$ для пространственноподобных направлений на диаграмме Минковского (рис. 4, *б*). Эта гипербола пересекает пространственную ось в точках $x = \pm 1$. Отрезки лучей из начала координат до пересечения с такой гиперболой определяют единичные расстояния в соответствующих направлениях. В частности, отрезок луча в направлении оси Ox' задает единичную длину на этой пространственной оси системы отсчета K'.

Уравнения масштабных гипербол $c^2t^2 - x^2 = \pm 1$ инвариантны относительно преобразований Лоренца. Поэтому и в косоугольных координатных осях (x', ct') эти гиперболы имеют уравнения $c^2t'^2 - x'^2 = \pm 1$ и отсекают на осях x' и ct' единичные отрезки.

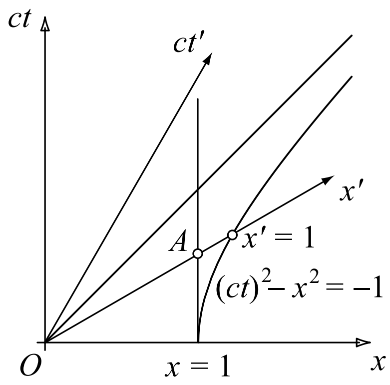

Рис. 5: Геометрическая интерпретация сокращения длины с помощью диаграммы Минковского

Используя масштабные гиперболы, можно дать на диаграмме Минковского наглядную геометрическую интерпретацию релятивистских кинематических эффектов. Рассмотрим, например, жесткий стержень единичной длины, расположенный вдоль оси Ox и покоящийся относительно системы отсчета K. На диаграмме Минковского (рис. 5) мировые линии концов этого стержня даются осью времени ct (начало координат системы отсчета K) и прямой, параллельной оси времени и пересекающей ось Ox в точке $x = 1$. С точки зрения системы отсчета K' положение концов данного стержня, взятое в один и тот же момент времени $t' = 0$ в K', соответствует на диаграмме Минковского точкам пересечения этих мировых линий с пространственной осью Ox', т. е. точкам O и A (рис. 5). Но расстояние OA вдоль оси Ox' в системе отсчета K' *меньше единицы*, так как единичному расстоянию соответствует отрезок оси Ox' от точки O до пересечения с масштабной гиперболой. Таким образом, с точки зрения наблюдателя в системе отсчета K' длина движущегося относительно него стержня с единичной собственной длиной оказывается меньше единицы. Этот кинематический эффект сокращения Лоренца — Фитцджеральда свидетельствует о том, что результат измерения одного и того же стержня зависит от системы отсчета, в которой производится измерение.

Четырехмерные векторы

Представление о четырехмерном пространстве-времени позволяет придать теории относительности особенно простое и изящное математическое выражение. По словам Г. Минковского, «отныне понятия пространства самого по себе и времени самого по себе осуждены на вымирание и превращение в бледные тени, и только своего рода объединение этих двух понятий сохранит независимую реальность».

Принцип относительности требует инвариантности уравнений, выражающих законы физики, относительно преобразований Лоренца. Выяснение инвариантности уравнений сильно облегчается при использовании четырехмерного пространства-времени и векторов в этом пространстве («четырехвекторов»).

Физическое содержание любого закона не должно зависеть, например, от ориентации координатных осей. Следовательно, законы физики должны быть также инвариантны относительно поворотов системы координат в пространстве. Но обычно нам не приходится беспокоиться об инвариантности законов относительно поворотов системы координат. Это связано с тем, что при составлении уравнения, выражающего какой-либо физический закон, всегда требуют, чтобы все его члены были либо скалярами, либо векторами (либо вообще тензорами одного ранга). Тем самым автоматически обеспечивается инвариантность уравнений относительно поворотов координатных осей. Например, скалярное равенство $a = b$ одновременно справедливо во всех системах координат, так как обе его части не изменяются при повороте осей координат.

Векторное равенство вида $\vec{A} = \vec{B}$ эквивалентно трем равенствам $A_x = B_x$, $A_y = B_y$, $A_z = B_z$, связывающим проекции векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Значения этих проекций, разумеется, не инвариантны относительно поворотов системы осей. В результате поворота они примут, вообще говоря, другие значения A'_i, и B'_i $(i = x, y, z)$. Но так как левая и правая части равенств, связывающих проекции векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$, преобразуются при повороте осей координат идентичным образом, то после преобразования равенство отдельных проекций сохранится: $A'_x = B'_x$, $A'_y = B'_y$, $A'_z = B'_z$. В таких случаях говорят, что рассматриваемое равенство удовлетворяет требованию *ковариантности*. В противоположность этому равенство, связывающее проекцию вектора со скаляром, не остается справедливым при повороте осей координат.

Таким образом, инвариантность физического закона относительно преобразования координат требует ковариантности математического уравнения, выражающего этот закон.

По аналогии с поворотом системы координат в пространстве, преобразования Лоренца, описывающие переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, можно рассматривать как преобразование четырехмерного радиуса-вектора события (ct, x, y, z) в четырехмерном пространстве-времени. В этом четырехмерном пространстве можно ввести скаляры, векторы, тензоры. Инвариантность физического закона при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой с помощью преобразований Лоренца можно сделать очевидной, если выразить этот закон в ковариантной четырехмерной форме: все члены уравнения, выражающего закон, должны быть четырехмерными тензорами одного ранга (т. е. должны быть все либо скалярами, либо векторами).

Важный пример четырехмерного вектора — радиус-вектор некоторого события (ct, x, y, z). В дальнейшем будут рассмотрены другие четырехвекторы, в частности, четырехвектор энергии-импульса $(E/c, p_x, p_y, p_z)$. При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой проекции любых четырехвекторов преобразуются одинаковым образом в соответствии с формулами преобразований Лоренца (см. лекцию 7).

Закон преобразования четырехвекторов при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой (преобразования Лоренца) можно записать в компактной матричной форме. Введем для временно́й проекции четырехвектора обозначение x_0, а для пространственных проекций — обозначения x_1, x_2, x_3. В частности, для четырехмерного радиуса-вектора некоторого события $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Эти проекции в системе отсчета K будут выражаться через проекции в системе K' по следующим формулам:

$$x_i = \sum_{k=0}^{3} a_{ik} x'_k \quad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{4}$$

где матрица преобразования a_{ik} в соответствии с формулами преобразований Лоренца может быть записана следующим образом:

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v/c & 0 & 0 \\ \gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{5}$$

Из проекций любого четырехвектора можно образовать скалярную (инвариантную) величину. Для радиуса-вектора события такая величина — интервал

$$s = \sqrt{(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)},$$

остающийся неизменным при преобразованиях Лоренца подобно тому, как в евклидовой геометрии поворот осей координат оставляет неизменной длину радиуса-вектора $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Таким образом, в четырехмерном пространстве-времени под «длиной» четырехвектора следует понимать квадратный корень из *разности* квадратов его временно́й и пространственной проекций. Поэтому в псевдоевклидовой геометрии существуют векторы нулевой длины с отличными от нуля проекциями, что невозможно в евклидовой геометрии. Нулевую «длину» имеют, например, радиусы-векторы всех событий, лежащих на световом конусе.

Из проекций двух четырехвекторов также можно образовать инвариантную величину — скалярное произведение четырехвекторов. В отличие от евклидовой геометрии скалярное произведение выражается не суммой произведений одноименных проекций, а разностью произведений временны́х и пространственных проекций четырехвекторов:

$$a_0 b_0 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = \text{inv}. \tag{6}$$

Рекомендуемая литература:
[1], стр. 386–392, стр. 398–394,
[2], стр. 542–548,
[3], стр. 64–67,

[4], стр. 18–19, стр. 39–52.
[5], стр. 11–16, 35–57.
[6], стр. 34–46.

Список литературы

[1] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971.

[2] Стрелков С.П. Механика. М., «Наука», 1975.

[3] Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., «Наука», 1972.

[4] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 2 (пространство, время, движение). М., «Мир», 1966.

[5] Тэйлор Э.Ф., Уилер Дж.А. Физика пространства-времени. М., «Мир», 1969.

[6] Бутиков Е. И. Релятивистские представления в курсе общей физики. Спб, 2006.