Комментарии к лекциям по физике

Тема: Основы релятивистской динамики

Содержание лекции

Релятивистский импульс частицы. Релятивистская энергия. Кинетическая энергия и энергия покоя. Масса и энергия. Эквивалентность энергии и релятивистской массы. Энергия связи атомных ядер. Превращения энергии покоя в ядерных реакциях. Реакции деления тяжелых ядер и синтеза легких ядер. Связь энергии и импульса частицы. Преобразование энергии и импульса частицы при переходе в другую систему отсчета. Четырехвектор энергии-импульса частицы. Простые задачи релятивистской динамики.

Принцип соответствия и релятивистский импульс

Теория относительности требует пересмотра и уточнения законов ньютоновской механики. Уравнения классической динамики (второй закон Ньютона) удовлетворяют принципу относительности в отношении преобразований Галилея. Но последние должны быть заменены преобразованиями Лоренца. Поэтому уравнения динамики следует изменить так, чтобы они оставались справедливыми при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой согласно преобразованиям Лоренца. При малых скоростях ($v \ll c$) уравнения релятивистской динамики должны переходить в соответствующие классические уравнения, ибо в этой области справедливость ньютоновской механики подтверждается на опыте.

Чтобы получить релятивистское выражение для импульса частицы, можно исходить из принципа соответствия, согласно которому в классической области медленных движений ($v \ll c$) релятивистское выражение должно сводиться к ньютоновскому. Напомним, что в механике Ньютона вектор импульса \vec{p} как динамическая характеристика движущейся частицы пропорционален соответствующей кинематической характеристике движения, т. е. вектору скорости \vec{v} , а постоянный для данной частицы коэффициент пропорциональности — это ее инертная масса m. В классической физике масса m частицы — постоянная величина, не зависящая от состояния ее движения. Иными словами, импульс определяется как произведение массы частицы на ее скорость: $\vec{p} = m\vec{v}$.

В релятивистской механике импульс частицы также определяется ее скоростью, но зависимость импульса от скорости оказывается сложнее, чем в классической механике и уже не сводится к простой пропорциональности. Так как импульс — вектор, то его направление должно совпадать с направлением скорости частицы. Это следует из соображений симметрии: в силу изотропности свободного пространства все направления в нем эквивалентны. Поэтому импульс свободной частицы должен быть направлен вдоль единственного физически выделенного направления, т. е. направления ее скорости. При обращении скорости в нуль импульс частицы также обращается в нуль.

Таким образом, релятивистское выражение для импульса должно иметь вид

$$\vec{p} = m_v \vec{v},\tag{1}$$

где величина m_v может зависеть только от абсолютной величины скорости частицы v, а при $v \ll c$ в силу принципа соответствия величина m_v должна совпадать с массой m частицы, имеющей тот смысл, который придается инертной массе в классической механике. Величину m_v , связывающую в соотношении (1) релятивистский импульс частицы c ее скоростью, называют иногда c релятивистской массой частицы, а ее значение c при c — массой покоя. Ниже будет показано, что

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \text{r. e.} \quad m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$
 (2)

Релятивистские выражения (2) для импульса и массы покоя легко получить на основе кинематического релятивистского эффекта замедления времени (см. лекцию 7), если потребовать, чтобы составляющая импульса, поперечная к относительной скорости двух систем отсчета, имела в этих системах одинаковые значения. Последнее утверждение можно строго обосновать, анализируя, например, абсолютно упругое столкновение двух частиц (см. [5], стр. 31-34, [6], стр. 48-50). Это утверждение становится очевидным, если для измерения импульса движущейся частицы принять по определению следующую процедуру. Выберем какую-либо среду, при движении сквозь которую частица испытывает сопротивление и в конце концов останавливается. Логично считать, что расстояние, проходимое частицей в такой среде до полной остановки, однозначно определяется начальным импульсом частицы. Поэтому можно измерять величину импульса свободной частицы длиной канала, пробиваемого частицей в некоторой эталонной среде. Выбором такой процедуры измерение импульса сводится к измерению пространственного расстояния. Но длина отрезка в направлении, перпендикулярном к относительной скорости двух систем отсчета, одинакова в этих системах. Тем самым и составляющая импульса свободной частицы, поперечная к относительной скорости двух систем отсчета, имеет в этих системах одинаковые значения.

В отличие от импульса, поперечная составляющая *скорости* частицы имеет разные значения в двух системах отсчета K и K'. Поэтому от классического выражения для импульса $\vec{p}=m\vec{v}$ в виде произведения (постоянной) массы m частицы на ее скорость необходимо отказаться.

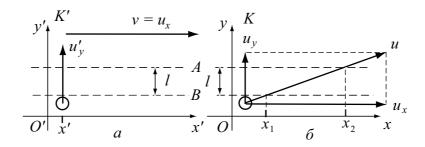


Рис. 1: К выводу выражения для релятивистского импульса

Чтобы получить релятивистское выражение для импульса, рассмотрим частицу, которая движется относительно системы отсчета K' в направлении оси Oy' с

малой (нерелятивистской) скоростью $u' \ll c$ (рис. 1, a). Для такой частицы x-составляющая скорости в системе K' равна нулю: $u'_x = 0$, а y-составляющая много меньше скорости света $u'_y = u' \ll c$. Проекции скорости этой частицы в системе отсчета K найдем с помощью релятивистских формул преобразования скорости (см. лекцию 8):

$$u_x = v, \quad u_y = u_y' \sqrt{1 - v^2/c^2},$$
 (3)

Рассматриваемая нами частица движется относительно системы K' с нерелятивистской скоростью $u'_y = u' \ll c$. Поэтому в силу принципа соответствия к ней применимо классическое выражение для импульса:

$$p_y' = m_0 u_y'. (4)$$

Будем считать, что скорость v системы отсчета K' относительно K много больше поперечной скорости нашей частицы, так что выполняется соотношение $v\gg u_y'$. Так как в силу (3) $u_y< u_y'$, в системе K продольная скорость частицы много больше поперечной: $u_x=v\gg u_y$. Тогда модуль скорости частицы относительно системы отсчета K $u=\sqrt{u_x^2+u_y^2}$ практически полностью определяется скоростью v самой системы отсчета K' относительно K: $u=\sqrt{v^2+u_y^2}\approx v$. Это значит, что для поперечной составляющей импульса в системе K, в соответствии с (1), можно написать:

$$p_y = m_v u_y. (5)$$

Но, как было показано выше, y-составляющая импульса частицы одинакова в системах отсчета K' и K: $p_y' = p_y$. Приравнивая правые части соотношений (4) и (5), и выражая u_y через u_y' с помощью (3), получаем искомое выражение (2) для релятивистской массы через массу покоя частицы и ее скорость:

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. (6)$$

Уменьшение поперечной скорости частицы при переходе от K' к K, выражаемое формулой (3), компенсируется возрастанием релятивистской массы, так что-

бы поперечный (к направлению относительной скорости систем отсчета K' и K) импульс частицы оставался неизменным. Подчеркнем, что это возрастание массы связано с кинематическим релятивистским эффектом замедления времени, т. е. может рассматриваться как прямое следствие постулатов теории относительности.

Таким образом, для зависимости релятивистского импульса $\vec{p} = m_v \vec{v}$ от скорости частицы получаем окончательно выражение (2),

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. (7)$$

Скорость частицы в любой системе отсчета имеет конечную величину — она всегда меньше скорости света c, но это не налагает, как видно из формулы (7), никаких ограничений на величину импульса частицы: при $v \to c$ импульс возрастает неограниченно.

Релятивистская энергия

Прежде всего получим выражение для энергии частицы, согласующееся с релятивистской формулой (7) для импульса частицы. Будем исходить из того, что в механике скорость изменения импульса частицы $d\vec{p}/dt$ определяется полной силой \vec{F} , действующей на частицу:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},\tag{8}$$

а скорость изменения кинетической энергии $E_{\rm kin}$ равна работе, совершаемой полной силой за единицу времени:

$$\frac{dE_{\rm kin}}{dt} = \vec{F}\vec{v}.\tag{9}$$

Подставляя в соотношение (9) силу \vec{F} из (8), можем написать:

$$\frac{dE_{\rm kin}}{dt} = \vec{v}\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\frac{d}{dt}(m_v\vec{v}). \tag{10}$$

Из этого соотношения и будем исходить при получении релятивистского выражения для кинетической энергии. Перепишем формулу (6) для релятивистской массы следующим образом:

$$m_v^2(1 - v^2/c^2) = m_0^2. (11)$$

Умножим обе части (11) на c^2 и раскроем скобки:

$$m_v^2 c^2 - (m_v \vec{v}^2)^2 = m_0^2 c^2. (12)$$

Теперь продифференцируем обе части (12) по времени. Учитывая, что производная правой части (12) равна нулю, имеем:

$$2m_v \frac{d}{dt}(m_v c^2) - 2m_v \vec{v} \frac{d}{dt}(m_v \vec{v}) = 0,$$
(13)

откуда

$$\frac{d}{dt}(m_v c^2) = \vec{v} \frac{d}{dt}(m_v \vec{v}). \tag{14}$$

Сравним соотношения (14) и (10). Правые части у них совпадают. Поэтому левая часть (14), как и в (10), должна быть равна скорости изменения кинетической энергии частицы:

$$\frac{dE_{\rm kin}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_v c^2) = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$
 (15)

Таким образом, приращение кинетической энергии тела $E_{\rm kin}(v)$ сопровождается пропорциональным приращением его релятивистской массы m_v . Вспомним, что важнейшее свойство энергии состоит в способности превращаться из одной формы в другую в эквивалентных количествах при различных физических процессах — именно в этом заключается содержание закона сохранения и превращения энергии, одного из наиболее общих законов природы. Поэтому естественно ожидать, что возрастание релятивистской массы должно происходить не только при сообщении телу кинетической энергии, но при любом увеличении энергии тела, независимо от конкретного вида энергии. Отсюда можно сделать фундаментальное заключение о том, что полная энергия тела пропорциональна его релятивистской массе независимо от того, из каких конкретных видов она состоит. Этот вывод следует распространить на все виды энергии: нагретое тело имеет бо́льшую массу покоя, чем холодное, сжатая или растянутая пружина имеет бо́льшую массу, чем недеформированная, и т.п. Обобщение соотношения (15) на все виды энергии приводит нас к знаменитой формуле Эйнштейна, связывающей энергию и массу:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. (16)$$

Из формулы (16) следует, в частности, что покоящееся тело обладает энергией $E_0 = m_0 c^2$. Эту энергию называют энергией покоя.

Например, при неупругом столкновении происходит превращение кинетической энергии сталкивающихся частиц во внутреннюю энергию (в энергию теплового движения молекул). Легко показать, что масса покоя тела, образовавшегося при неупругом столкновении, больше суммарной массы покоя исходных тел. Это означает, что увеличение внутренней энергии тела, как и увеличение кинетической энергии, сопровождается пропорциональным увеличением массы. Заметим, что согласно представлениям классической механики энергия при неупругих столкновениях не сохранялась, так как внутренняя энергия (энергия покоя) не была включена в механическую энергию.

Пропорциональность массы и энергии

Закон сохранения импульса в соединении с принципом относительности, требующим, чтобы этот закон выполнялся сразу во всех инерциальных системах отсчета, приводит, как мы видели, к закону сохранения релятивистской энергии.

Пропорциональность массы и энергии в любых формах тесно связана с сохранением импульса. Действительно, если бы в замкнутой системе при переходе энергии из одной формы в другую масса системы изменялась, то сохранение импульса

было бы невозможным. Внутренние превращения в системе не могут изменить импульса системы в целом, но ясно, что и скорость движения изолированного тела относительно какой-либо инерциальной системы отсчета остается при этом неизменной в соответствии с принципом относительности. Так как ни скорость, ни импульс не изменяются, то и масса покоя изолированного тела должна оставаться постоянной, какие бы внутренние превращения в нем ни происходили. Это значит, что определенное количество энергии в любой форме пропорционально одной и той же массе.

Закон пропорциональности массы и энергии представляет собой один из самых значительных выводов теории относительности. Взаимосвязь массы и энергии заслуживает подробного обсуждения (см., например, [2], стр. 152—156).

В механике масса тела есть физическая величина, характеризующая количественно инертные свойства тела, т. е. масса представляет собой меру инертности тела. Это так называемая инертная масса. С другой стороны, масса характеризует способность тела создавать поле тяготения и испытывать силу в поле тяготения, создаваемом другими телами. Это тяготеющая, или гравитационная масса. Инертность тела и его способность к гравитационным взаимодействиям представляют собой проявления совершенно различных свойств материи. Однако то, что меры этих различных проявлений называют одним и тем же словом «масса», не случайно, а обусловлено тем, что оба свойства всегда существуют совместно и меры этих свойств всегда друг другу пропорциональны, так что при надлежащем выборе единиц их можно выражать одним и тем же числом.

Равенство инертной и гравитационной масс представляет собой экспериментальный факт, многократно подтвержденный с огромной степенью точности в прецизионных опытах Этвеша, Дикке, Брагинского и других. Как же следует отвечать на вопрос: есть ли инертная и гравитационная масса одно и то же или нет? По своим проявлениям они различны, но неразрывно связаны друг с другом, и их численные характеристики всегда пропорциональны. Такое положение вещей в физике характеризуют термином «эквивалентность».

Аналогичный вопрос возникает в связи с понятиями массы и энергии в теории относительности. Проявления свойств материи, соответствующих массе и энергии, бесспорно различны. Но теория относительности утверждает, что эти свойства неразрывно связаны, а численные характеристики этих свойств пропорциональны друг другу. Поэтому можно говорить об эквивалентности массы и энергии. Всякое изменение энергии системы сопровождается эквивалентным изменением ее массы. Это относится как к изменениям кинетической энергии тела, при которых масса покоя остается неизменной, так и к изменениям различных видов внутренней энергии, при которых масса покоя изменяется.

Опыт показывает, что в громадном большинстве физических процессов, в которых изменяется внутренняя энергия, масса покоя остается неизменной. Как это согласовать с законом пропорциональности массы и энергии? Дело в том, что как правило подавляющая часть внутренней энергии (и соответствующей ей массы покоя) в превращениях не участвует, и поэтому определяемая взвешиванием масса покоя практически сохраняется несмотря на то, что тело выделяет или поглощает энергию. Это объясняется просто недостаточной точностью взвешивания. Поэтому экспериментальное подтверждение релятивистского закона пропорциональности энергии и массы следует искать в ядерной физике и физике элементар-

ных частиц. Для описания процессов с атомными ядрами и элементарными частицами, характерная особенность которых заключается в изменениях энергии системы, сравнимых с ее энергией покоя, релятивистские законы абсолютно необходимы.

Рассмотрим в качестве примера ядерную реакцию, вызванную полученными на ускорителе протонами, а именно превращение ядра лития в две альфа-частицы:

$$_{3}^{7}\text{Li} + _{1}^{1}\text{H} \rightarrow 2_{2}^{4}\text{He}.$$

Закон пропорциональности массы и энергии позволяет сделать предсказания относительно энергетического выхода ядерной реакции. Значения масс покоя атомных ядер могут быть определены с высокой точностью при помощи масс-спектрометра. Так, масса покоя протона 1_1 H равна 1_1 H равна 1_2 H разимной единицы массы (а.е.м.), масса ядра 7_3 Li — 1_2 Ii — 1_3 II — 1_

Закон пропорциональности энергии и массы можно применить к анализу устойчивости атомных ядер. Рассмотрим атомное ядро массы M, состоящее из Z протонов и A-Z нейтронов (Z — атомный номер, т. е. заряд ядра в единицах элементарного заряда, A — массовое число, т. е. полное число нуклонов в ядре). Энергия покоя ядра Mc^2 слагается из энергии покоя всех входящих в него частиц (нуклонов) и энергии внутреннего движения и взаимодействия нуклонов. Для того чтобы ядро было устойчивым и не могло самопроизвольно распасться на составные части, необходимо, чтобы энергия покоя ядра была меньше суммарной энергии покоя этих частей:

$$Mc^2 < \sum_i m_i c^2.$$

Разность $\sum_i m_i c^2 - M c^2$ служит мерой устойчивости ядра и называется энергией связи. Для ядер, содержащих 50-60 нуклонов, энергия связи составляет около 9 МэВ на один нуклон, т. е. достигает почти 1% энергии покоя.

Наряду с энергией связи мерой устойчивости ядра может служить эквивалентная величина Δm , называемая $\partial e \phi e \kappa mom \ maccы$:

$$\Delta m = \sum_{i} m_i - M = Zm_p + (A - Z)m_n - M,$$

где m_p и m_n — массы покоя протона и нейтрона соответственно. Если дефект массы положителен, ядро устойчиво по отношению к распаду на отдельные протоны и нейтроны. Однако это еще не означает, что ядро абсолютно устойчиво. Различие в величине энергии связи на один нуклон у разных ядер может привести к тому, что

устойчивое по отношению к распаду на отдельные нуклоны ядро не будет устойчивым по отношению к распаду на две части. Такой распад возможен, если дефект массы исходного ядра Δm меньше, чем сумма дефектов масс $\Delta m_1 + \Delta m_2$ двух ядер, образующихся в результате распада. Это обстоятельство можно использовать для высвобождения ядерной энергии.

Например, ядро изотопа бериллия 8_4 Ве имеет массу M=8,00531 а.е.м., которая меньше, чем сумма масс покоя составляющих его четырех протонов и четырех нейтронов $\sum_i m_i = 4\cdot 1,00728 + 4\cdot 1,00867 = 8,06380$, но больше, чем суммарная масса покоя двух ядер гелия 4_2 Не ($2\cdot 4,00260 = 8,00520$ а.е.м.). Поэтому ядро бериллия 8_4 Ве, устойчивое по отношению к распаду на отдельные нуклоны, должно самопроизвольно распадаться на две альфа-частицы, что и происходит в действительности.

Дефект массы ядра другого изотопа бериллия 9_4 Ве не только положителен, но и превышает сумму дефектов масс всех ядер, на которые ядро 9_4 Ве могло бы распасться. Такое ядро абсолютно устойчиво.

Преобразование энергии-импульса

Компоненты вектора релятивистского импульса частицы можно рассматривать как пространственные компоненты некоторого четырехмерного вектора, а именно ue-mыpexmephoro bekmopa becaulture becaul

Напомним релятивистские выражения для энергии (16) и импульса (2) частицы:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$
 (17)

Сравнивая эти выражения, легко получить простую формулу, выражающую импульс частицы через ее скорость и энергию:

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}. \tag{18}$$

Возведем обе части первой из формул (17) в квадрат, разделим на c^2 и запишем в следующем виде:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \left(\frac{E}{c^2}\right)^2 v^2 = m_0^2 c^2. \tag{19}$$

Здесь второе слагаемое в левой части в соответствии с (18) представляет собой квадрат вектора релятивистского импульса. Поэтому соотношение (19) выражает связь между энергией и импульсом частицы:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2. \tag{20}$$

Это одна из важнейших формул релятивистской физики.

В правой части формулы (20) стоит величина, не зависящая от выбора системы отсчета. Поэтому, хотя каждое из слагаемых в левой части имеет разные

значения в различных системах отсчета, вся левая часть (20) не зависит от выбора системы отсчета, т. е. представляет собой *релятивистский инвариант*. Можно предположить, что это квадрат четырехмерного вектора (четырехвектора энергии-импульса), пространственные компоненты которого представлены трехмерным вектором релятивистского импульса, а временная компонента — релятивистской энергией, деленной на c. В таком случае четверка величин

$$\left(\frac{E}{c}, \quad p_x, \quad p_y, \quad p_z\right) \tag{21}$$

должна при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой преобразовываться по тем же правилам, что и проекции любого четырехмерного вектора, например, радиуса-вектора события (ct,x,y,z), т. е. в соответствии с преобразованиями Лоренца (см. лекцию 8). При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой компоненты импульса «перемешиваются» с энергией подобно тому как пространственные компоненты радиуса-вектора события «перемешиваются» с его временной координатой. Закон преобразования четверки величин (21) при переходе от системы отсчета K' к системе K легко получить из формул преобразований Лоренца (??) простой заменой $ct \to E/c$, $x \to p_x$, $y \to p_y$, $z \to p_z$:

$$E = \frac{E' + vp_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_x = \frac{p_x' + vE'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_y = p_y', \quad p_z = p_z'.$$
 (22)

Разность квадратов временной и пространственной проекций четырехвектора энергии-импульса некоторой частицы (т. е. квадрат его «длины») дается левой частью формулы (20). Эта величина не изменяется при преобразованиях Лоренца (22), т. е. представляет собой релятивистский инвариант. Физический смысл этого инварианта — квадрат энергии покоя частицы, деленной на c.

Простые задачи релятивистской динамики

В качестве иллюстраций применения основных уравнений релятивистской динамики в лекции рассматривается несколько простых задач о движении частиц в силовых полях:

- Движение первоначально покоившейся частицы с зарядом q и массой покоя m_0 в однородном постоянном электрическом поле напряженностью $\vec{\mathcal{E}}$.
- Заряженная частица с импульсом p_0 , направленным вдоль оси Oy, влетает в однородное постоянное электрическое поле $\vec{\mathcal{E}}$, направленное вдоль оси Ox. По какой траектории x = x(y) движется частица?
- Движение заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле $\vec{\mathcal{B}}$ под действием силы Лоренца.

Подробное обсуждение этих задач можно найти в [6], стр. 66-70.

Рекомендуемая литература:

[1], стр. 399-414.

[2], ctp. 152-156.

```
[3], стр. 536-542.
```

- [4], crp. 142-174.
- [5], стр. 19–22, стр. 31–38, стр. 46–49.
- [6], crp. 47–70.

По материалу данной лекции рекомендуется решить следующие задачи из [7]: 747, 749, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 762, 763, 766, 769, 770, 771, 772.

Список литературы

- [1] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971.
- [2] Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., «Физматгиз», 1961.
- [3] Стрелков С.П. Механика. М., «Наука», 1975.
- [4] Тэйлор Э.Ф., Уилер Дж.А. Физика пространства-времени. М., «Мир», 1969.
- [5] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 2 (пространство, время, движение). М., «Мир», 1966.
- [6] Бутиков Е. И. Релятивистские представления в курсе общей физики. Спб, 2006.
- [7] Сборник задач по общему курсу физики. Механика (под ред. Яковлева И.А.). Изд. 4-е, М., «Наука», 1977.