Комментарии к лекциям по физике

Тема: Физические величины и системы единиц

Содержание

Измерения в физике. Требования к эталону физической величины. Единицы физических величин. Системы единиц. Принципы построения систем единиц. Размерность физической величины. Метод анализа размерностей.

Физические величины и физические законы

Характеристикам объектов и явлений природы дают названия, чтобы проводить различия между ними. При этом возникают *понятия*, определения которых отвечают на вопросы, что́ понимают под тем-то и тем-то. Иногда понятию можно сопоставить *физическую величину*. При этом соответствующая характеристика объекта, явления или процесса должна допускать *количественное выражение*, т. е. для нее можно *определить* (ввести по определению) *процедуру измерения* и установить *единицы*, в которых она измеряется. Например, понятию пространственной протяженности сопоставляется физическая величина, называемая расстоянием. Для измерения расстояний принята по определению некоторая процедура и выбрана определенная единица (метр).

Измерить физическую величину — это значит выяснить, сколько раз в ней содержится однородная с ней величина, принятая за единицу. Это есть *числовое значение* физической величины.

Между разными физическими величинами удается установить объективно существующие соотношения, т. е. установить *физические законы*. Иногда эти законы можно представить в форме математических уравнений. Физику называют *точной* наукой, выражая этим то обстоятельство, что устанавливаемые в физике соотношения между физическими величинами имеют *количественную форму*. Но следует помнить, что эти соотношения (физические законы), как правило, приближенны и справедливы в ограниченных областях.

В противоположность «чистой» математике, где величины обладают теми свойствами, которые им произвольно приписаны по определению, в физике необходимо открывать объективно существующие свойства физических величин, а не приписывать их по определению.

Входящие в уравнения физических законов значения физических величин (как и обозначения их символов — буквы) всегда следует рассматривать как произведения числового значения и единицы измерения. Если в уравнении для физических величин участвуют математические функции типа ln, sin, exp, то их аргументом может быть только безразмерное число (в частности, отношение величин одинаковой размерности).

При любом исследовании физических явлений необходим обоснованный выбор *физической модели*, т. е. определенная идеализация, при которой следует сохранить наиболее важные черты явления. Примерами физических моделей могут служить материальная точка, абсолютно твердое тело, идеальный газ и т. п. Применимость той или иной модели зависит не столько от свойства рассматриваемой реальной системы, сколько от характера вопросов, на которые нужно получить ответы. Очень важно при этом уметь определять необходимую меру математической строгости: бессмысленно стремиться к получению точного решения в рамках достаточно грубой физической модели.

Системы единиц

Любое измерение заключается в сравнении измеряемой величины с другой, однородной с ней, величиной, принятой за единицу. В принципе, единицы для всех величин можно выбрать совершенно независимо друг от друга. Однако это практически неудобно, так как тогда во всех уравнениях, выражающих связь между различными физическими величинами, появятся числовые коэффициенты. Кроме того, пришлось бы для каждой физической величины вводить свой эталон. Поэтому в физике используют системы единиц.

Единицы физических величин делятся на системные (т. е. входящие в какую-либо систему единиц) и внесистемные (например, часто используемые единицы энергии электрон-вольт и киловатт-час). Системные единицы подразделяются на основные, выбираемые произвольно (по соглашению), и производные, которые выражаются через основные.

Основной особенностью современных систем единиц является то, что между единицами различных величин имеются определенные соотношения. Эти соотношения устанавливаются теми физическими законами или определениями, которыми связаны между собой измеряемые величины. Например, единицу скорости выбирают так, что она выражается через единицы длины и времени. При таком выборе единицы скорости используют определение скорости. Единицу силы устанавливают с использованием второго закона Ньютона и выражают через единицы ускорения и массы. Это означает, что для нескольких произвольно выбираемых физических величин единицы устанавливают независимо друг от друга и называют *основными*. Единицы для остальных величин выражают через основные и называют *производными*.

Число основных единиц и сам их выбор в разных системах единиц могут быть различными. Например, в системе единиц Гаусса (СГС) в качестве основных выбраны три единицы: длины (L), времени (T) и массы (M), а в Международной системе единиц СИ в качестве основных выбраны семь единиц: длины (L), времени (T), массы (M), термодинамической температуры (θ), количества вещества (N), силы электрического тока (I) и силы света (J). Определения основных и произвольных единиц можно найти в любом справочнике.

Кроме произвола в выборе физических величин, единицы которых принимаются за основные, и произвола в выборе масштаба (размера) этих единиц, имеется еще произвол в выборе коэффициентов пропорциональности в формулах, которыми вводятся производные единицы. Проиллюстрируем это на примере единицы площади. Выбрав в качестве единицы длины метр, можно в качестве единицы площади выбрать либо квадратный метр — площадь квадрата, сторона которого равна 1 метру, либо «круглый» метр — площадь круга, диаметр которого равен 1 метру. В первом случае площадь квадрата со стороной l выражается формулой $S = l^2$, а площадь круга с диаметром l — формулой $S = \pi l^2/4$. Во втором случае более простая формула получается для площади круга: $S = l^2$, в то время как формула для площади квадрата будет содержать π: $S = 4l^2/\pi$.

Рассмотренные возможности введения единиц площади, отличающихся числовым коэффициентом, основывались на одной и той же геометрической закономерности, связывающей площади подобных фигур с их линейными размерами: $S \sim l^2$. Но при введении производной единицы какой-либо величины, кроме упомянутого произвола в выборе числового коэффициента, имеется еще произвол в выборе физического закона, с помощью которого устанавливается связь производных единиц с основными. Например, единица силы обычно устанавливается с помощью второго закона Ньютона $F = ma$. В этом случае выражение единицы силы через основные единицы, т. е. *размерность* силы, имеет вид

$$\dim F = MLT^{-2}. \tag{1}$$

Однако при тех же основных единицах (L, M, T) для установления единицы силы можно вместо второго закона Ньютона использовать закон всемирного тяготения, полагая в нем коэффициент пропорциональности безразмерным и равным, например, единице: $F = m_1 m_2/r^2$. В этом случае за единицу силы принимается сила, с которой притягиваются друг к другу единичные точечные массы, находящиеся на единичном расстоянии друг от друга. Размерность силы при этом имеет вид

$$\dim F = M^2 L^{-2}. \tag{2}$$

При таком выборе единицы силы во втором законе Ньютона, разумеется, появится размерный коэффициент, подобно тому как при обычном выборе (на основе второго закона Ньютона) размерный коэффициент появляется в законе всемирного тяготения (*гравитационная постоянная*).

Разобранный пример показывает, что размерность физической величины зависит от способа построения системы единиц.

Таким образом, при выборе способа построения системы единиц существует большой произвол. Однако на практике приходится считаться с целым рядом требований, которые существенно ограничивают этот произвол. Слишком большое число основных единиц было бы неудобно из-за появления размерных коэффициентов во многих физических формулах и из-за необходимости установления большого числа эталонов. Слишком малое число основных единиц приводит к тому, что построенные на их основе производные единицы оказываются неудобными для использования. Практически используются системы, в которых число основных единиц колеблется от трех до семи.

При установлении основных единиц весьма важной является возможность создания таких эталонов, которые обеспечивали бы постоянство единицы и возможность ее воспроизведения, а также восстановление эталона в случае его утраты. Самый надежный способ решения этой задачи — поручить «хранение» эталонов самой природе. Так, принятый в настоящее время эталон времени основывается на периоде колебаний, происходящих в атоме изотопа цезия-133. По определению единица времени *секунда* содержит 9 192 631 770 периодов этих колебаний. Атомы одного и того же изотопа тождественны, поэтому при указанном выборе эталона времени природа предоставляет в наше распоряжение практически неограниченное число совершенно идентичных «часов». Для установления основной единицы длины в настоящее время используется тот же самый эталон: по определению *метр* — это длина пути, проходимого светом в вакууме за 1/299 792 458 секунды. Для эталона массы пока не удается использовать массу какой-либо атомной частицы, так как точность определения атомных масс уступает точности измерения масс при взвешивании. Эталоном массы *килограмм* служит платино-иридиевая гиря, хранящаяся в Международном бюро мер и весов.

Сложившаяся в настоящее время ситуация, когда как в учебной, так и в научной литературе наряду с *Международной системой единиц* СИ (от международного символа SI) широко используется *гауссова система* (или *симметричная система* СГС — от первых букв наименований основных единиц Сантиметр, Грамм, Секунда), требует понимания принципов построения каждой из них. Единицы механических величин в этих двух системах отличаются только масштабом, так как основные единицы в них выбраны на основе одних и тех же физических величин — длины, времени и массы. Поэтому все формулы и уравнения, выражающие физические законы и определения, в механике одинаковы в обеих системах. Но в электродинамике формулы одних и тех же физических законов имеют различный вид в зависимости от используемой системы единиц.

Метод анализа размерностей

Физические величины характеризуются определенной размерностью. Физические величины, числовое значение которых не зависит от выбранного масштаба (размера) единиц, называются *безразмерными*. Примеры безразмерных величин — угол (отношение длины дуги к радиусу), показатель преломления света (отношение скорости света в вакууме к скорости света в веществе). Физические величины, числовое значение которых меняется при изменении масштаба единиц, называются *размерными*. Примеры размерных величин — длина, скорость, энергия. Выражение производной единицы физической величины через основные называется ее *размерностью* (или формулой размерности). Например, размерность импульса

$$\dim p = LMT^{-1}.$$

Соображения размерности можно использовать для проверки правильности полученных результатов при решении физических задач: правые и левые части полученных выражений, как и отдельные слагаемые в каждой из частей, должны иметь одинаковую размерность. Анализ размерностей в ряде случаев оказывается плодотворным теоретическим методом исследования физических явлений. Метод размерностей может использоваться и для вывода формул и уравнений, когда нам известно, от каких физических параметров может зависеть искомая величина. Сущность метода легче уяснить на конкретных примерах.

1. Определим скорость v, с которой упадет на землю свободно падающее с высоты h тело массы m. Так как искомая величина может зависеть от ускорения свободного падения g, высоты h и массы m, то выражение для v можно искать в виде

$$v = Ch^x g^y m^z, \tag{3}$$

где C — некоторая безразмерная постоянная, а x, y и z — числа, подлежащие определению. Приравниваем размерности левой и правой частей (3):

$$LT^{-1} = L^x(LT^{-2})^y M^z.$$

Показатели степеней у L, M и T в левой и правой частях должны быть равны, поэтому

$$\begin{array}{lr} L & 1 = x + y, \\ T & -1 = -2y, \\ M & 0 = z. \end{array}$$

Отсюда $z = 0$, $y = 1/2$, $x = 1/2$, и формула (3) принимает вид

$$v = C\sqrt{gh}. \tag{4}$$

Истинное значение скорости $v = \sqrt{2gh}$, т. е. анализ размерностей дал возможность определить характер зависимости v от g, h и m с точностью до числового множителя C.

2. Определим дальность s полета пули, выпущенной с начальной скоростью v в горизонтальном направлении на высоте h над земной поверхностью. Ищем s в виде

$$s = Cv^x g^y h^z m^u. \tag{5}$$

Равенство размерностей:

$$L = (LT^{-1})^x(LT^{-2})^y L^z M^u. \tag{6}$$

Приравниваем показатели степеней:

$$\begin{array}{ll} L & 1 = x + y + z, \\ T & 0 = -x - 2y, \\ M & 0 = u. \end{array}$$

Отсюда $x = -2y$, $z = 1 + y$, и выражение (5) для s принимает вид

$$s = Cv^{-2y} g^y h^{1+y} = Ch(gh/v^2)^y.$$

Анализ размерностей позволил установить, что дальность полета s не зависит от массы пули, но зависит от высоты h и некоторой неизвестной степени y безразмерной комбинации параметров gh/v^2. Если нам известна (например, из опыта) зависимость s хотя бы от одного из параметров, то y немедленно определяется. Пусть известно, что $s \sim v$; тогда $y = -1/2$, и для s из уравнения () получаем

$$s = Cv\sqrt{h/g},$$

что с точностью до постоянного множителя C совпадает с истинным значением $s = v\sqrt{2h/g}$. Анализ размерностей не позволил полностью определить характер зависимости потому, что число параметров, от которых могла зависеть дальность полета s (четыре), оказалось больше числа основных единиц используемой системы единиц.

В этом примере характер зависимости можно определить полностью, если воспользоваться так называемыми векторными единицами длины. Будем измерять длину в горизонтальном и вертикальном направлениях в разных единицах и обозначим их размерности через $L_г$ и $L_в$. Тогда, учитывая, что

$$\dim v = L_г T^{-1}, \qquad \dim g = L_в T^{-2}, \qquad \dim h = L_в,$$

вместо (6) получаем

$$L_г = (L_г T^{-1})^x (L_в T^{-1})^y L_в^z M^u.$$

Приравниваем показатели степеней:

$$\begin{array}{ll} L_г & 1 = x, \\ L_в & 0 = y + z, \\ T & 0 = -x - 2y, \\ M & 0 = u. \end{array}$$

Отсюда $y = -1/2$, $z = 1/2$ и для s получаем

$$s = Cvg^{-1/2}h^{1/2} = Cv\sqrt{h/g}.$$

Увеличение числа основных единиц расширяет возможности метода размерностей.

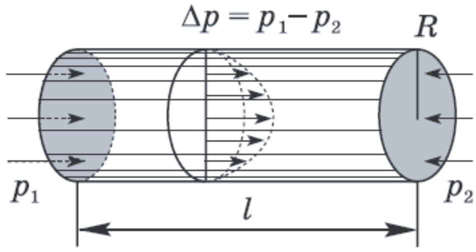

Рис. 1: К расчету объема жидкости, протекающей через трубу.

3. Рассмотрим ламинарное течение вязкой жидкости по трубе (рис. 1). Объем жидкости V, протекающей через сечение трубы за время t, пропорционален времени t и зависит от разности давлений Δp на концах трубы, вязкости жидкости η, длины l и радиуса R трубы:

$$V = C(\Delta p)^x \eta^y l^z R^u t.$$

Здесь также удобно измерять длину вдоль и поперек трубы в разных единицах с размерностями $L_\parallel$ и $L_\perp$.
Тогда

$$\dim l = L_\parallel, \qquad \dim R = L_\perp, \qquad \dim V = L_\parallel L_\perp^2,$$
$$\dim \Delta p = M L_\parallel L_\perp^{-2} T^{-2}, \qquad \dim \eta = M L_\parallel^{-1} T^{-1},$$

и равенство размерностей принимает вид

$$L_\parallel L_\perp = (ML_\parallel L_\perp^{-2}T^{-2})^x (ML_\parallel^{-1}T^{-1})^y L_\parallel^z L_\perp^u T.$$

Приравнивая показатели степеней,

$$\begin{array}{ll} M & 0 = x + y, \\ L_\parallel & 1 = x - y + z, \\ L_\perp & 2 = -2x + u, \\ T & 0 = -2x - y + 1, \end{array}$$

находим $x = 1$, $y = -1$, $z = -1$, $u = 4$ и для V получаем

$$V = C\frac{\Delta p R^4}{\eta l}t.$$

Таким образом, объем жидкости V, протекающей через сечение трубы за время t, пропорционален разности давлений на единицу длины трубы $\Delta p/l$ и обратно пропорционален вязкости, что достаточно очевидно и без приведенного расчета. Однако не столь тривиален вывод о том, что объем жидкости пропорционален четвертой степени радиуса трубы (т. е. *квадрату* площади ее поперечного сечения). Полученные закономерности справедливы для трубы с постоянным поперечным сечением произвольной формы. В случае круглого сечения динамический расчет дает $C = \pi/8$ (формула Пуазейля).

4. Определим зависимость скорости звука (т. е. продольных упругих волн, от свойств среды. Можно предположить, что эта скорость зависит от упругих свойств среды, определяемых модулем Юнга E, от инертных свойств, описываемых плотностью ρ, и от длины волны λ. Размерности этих величин:

$$\dim E = L^{-1}MT^{-2}, \qquad \dim\rho = ML^{-3}, \qquad \dim\lambda = L.$$

Записывая выражение для искомой скорости звука u в виде $u = CE^x\rho^y\lambda^z$, приходим к следующему равенству размерностей:

$$LT^{-1} = (ML^{-1}T^{-2})^x(ML^{-3})^yL^z,$$

откуда

$$\begin{array}{lr} L & 1 = -x - 3y + z, \\ M & 0 = x + y, \\ T & -1 = -2x, \end{array}$$

т. е. $x = 1/2$, $y = -1/2$, $z = 0$. Итак, получаем

$$u = C\sqrt{E/\rho}. \tag{7}$$

Скорость звука не зависит от длины волны λ. Динамический вывод дает тот же результат с $C = 1$.

5. Определим скорость волн на поверхности воды. Скорость капиллярных волн зависит от поверхностного натяжения σ, плотности воды ρ и длины волны λ. Записывая выражение для $u_\text{к}$ в виде $u_\text{к} = C\sigma^x\rho^y\lambda^z$ и учитывая, что $\dim\sigma = MT^{-2}$, получаем

$$LT^{-1} = (MT^{-2})^x(ML^{-3})^yL^z,$$

откуда $x = 1/2$, $y = z = -1/2$. Поэтому

$$u_\text{к} = C\sqrt{\sigma/\rho\lambda}.$$

Динамическая теория дает $C = \sqrt{2\pi}$.

Скорость тяжелых волн на глубокой воде ($h \gg \lambda$) может зависеть только от g и λ. Составляя равенство размерностей для формулы $u_\text{т} = Cg^x\lambda^y$, находим $x = y = 1/2$, т. е.

$$u_\text{т} = C\sqrt{g\lambda}. \tag{8}$$

Динамическое рассмотрение дает $C = 1/\sqrt{2\pi}$.

Скорость предельно длинных волн ($\lambda \gg h$) и волн на мелкой воде не должна зависеть от длины волны λ, но теперь она может зависеть от глубины водоема h. Равенство размерностей для формулы $u_\text{т} = Cg^xh^y$ дает

$$u_\text{т} = C\sqrt{gh}. \tag{9}$$

Как показывает динамический расчет, в данном случае $C = 1$.