

Задачи для самостоятельного решения

и задания для выполнения моделирующего эксперимента на компьютере с использованием пакета программ «Движение космических тел».

1*. *Эксцентриситет эллиптической орбиты.* Как эксцентриситет эллиптической орбиты, получающейся при горизонтальной начальной скорости, зависит от величины начальной скорости? Как изменяется эксцентриситет эллиптической орбиты при увеличении начальной скорости от нуля до круговой скорости и далее вплоть до скорости освобождения? Выразите эксцентриситет орбиты через отношение начальной скорости к круговой скорости $V_0/V_{кр}$.

2*. *Геометрически подобные эллиптические орбиты.* Для некоторой величины V_0 поперечной начальной скорости, превышающей круговую скорость ($V_0 > V_{кр}$), мы получаем эллиптическую орбиту с ближним фокусом в центре силы. При какой величине начальной скорости (меньшей чем круговая) результирующая орбита будет эллипсом, геометрически подобным первой орбите? Каковы периоды обращения по этим орбитам (в периодах обращения по круговой орбите, проходящей через начальную точку)? Проверьте свой результат в вычислительном эксперименте.

3. *Гиперболический избыток скорости.* Допустим, что сообщенная спутнику начальная скорость превышает скорость освобождения для данной начальной точки ($V_0 > V_{осв}$). Докажите, что по мере удаления спутника в бесконечность его скорость стремится к постоянной величине. Покажите, что эта величина (называемая гиперболическим избытком скорости) не зависит от направления начальной скорости и равна квадратному корню из разности между квадратами начальной скорости и скорости освобождения для данной начальной точки.

4**. *Угол между асимптотами.* Как угол между асимптотами гиперболической траектории зависит от скорости тела в вершине гиперболы (в точке траектории, самой близкой к центру силы)? Примите, что эта скорость V_0 выражена в единицах круговой скорости $V_{кр}$ для данной точки. Какой должна быть величина поперечной начальной скорости (в единицах круговой скорости для данной начальной точки), чтобы направление движения изменилось на заданный угол θ ($\theta < 90^\circ$) в процессе движения тела от начального положения в бесконечность?

5**. *Время прохождения половины эллиптической орбиты.* Какую долю периода обращения по эллиптической орбите с эксцентриситетом e занимает прохождение спутником ближней к Земле половины эллипса? Результат расчета проверьте в вычислительном эксперименте для $e = 0,5$.

6. *Скорости в перигее и апогее.* Чему равно отношение скоростей спутника в перигее и апогее для эллиптической орбиты с заданными расстояниями r_p и r_A от центра Земли до перигея и до апогея соответственно? Чему равно отношение угловых скоростей поворота радиус-вектора спутника в перигее и апогее орбиты?

7. *Третий закон Кеплера и круговые орбиты.* Радиусы двух круговых орбит относятся как 4 : 1. Как относятся периоды обращения планет по этим орбитам? Как относятся их орбитальные скорости? Как относятся угловые скорости? Применяя третий закон Кеплера к круговым орбитам, покажите, что сила тяготения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от силового центра.

8. *Круговая и эллиптическая орбиты.* Какую начальную скорость (в единицах круговой скорости для данной начальной точки) нужно сообщить спутнику в горизонтальном направлении, чтобы получить эллиптическую орбиту с вдвое большим периодом обращения, чем на круговой орбите, проходящей через начальную точку? С вчетверо большим периодом? С вдвое меньшим периодом? Проверьте результаты Ваших расчетов в моделирующем эксперименте на компьютере.

9**. *Свободное падение на Солнце.* Сколько времени продолжалось бы свободное падение тела на Солнце с расстояния, равного радиусу земной орбиты (при нулевой начальной скорости)? В течение какой доли всего времени падения тело пройдет первую половину этого расстояния?

10. *Радиус и центр годографа скорости.* Допустим, что в перигее эллиптической орбиты скорость спутника в 1.25 раз больше круговой скорости для этой точки. Вычислите радиус годографа скорости для этой эллиптической орбиты. Выразите этот радиус в единицах круговой

скорости для перигея эллиптической орбиты. Вычислите также координаты центра этого кругового годографа в пространстве скоростей (положение центра годографа относительно начала координат пространства скоростей). Найдите значение скорости спутника в момент прохождения через конец малой оси эллиптической орбиты (в единицах круговой скорости для перигея эллиптической орбиты).

11. *Радиус кривизны эллиптической орбиты в перигее и апогее.* Рассчитайте радиус кривизны эллиптической орбиты в начальной точке, где спутнику сообщается в горизонтальном направлении скорость, составляющая 1.25 круговой скорости для данной высоты. Искомый радиус выразите через расстояние от центра Земли до начальной точки. Каким будет радиус кривизны этой эллиптической орбиты в апогее?

12*. *Годограф скорости для гиперболической траектории.* Рассмотрите тело (скажем, комету), которое приближается к солнцу из бесконечности, проходит через перигелий гиперболической траектории со скоростью, равной 1.5 круговой скорости для этой точки, и затем уходит в бесконечность по другой асимптоте гиперболы. Вычислите радиус годографа скорости для этого гиперболического движения (в единицах круговой скорости для перигелия). Найдите также положение (координаты) центра кругового годографа в пространстве скоростей. В этом движении конец вектора скорости проходит только часть этой окружности. Вычислите центральный угол, который стягивает эту дугу кругового годографа.

13***. *Круговая форма годографа скорости.* Попытайтесь доказать аналитически, что годограф скорости при произвольном кеплеровом движении (т.е. движении под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния от центра) представляет собой окружность (для замкнутых орбит и параболического движения) или дугу окружности (для открытых гиперболических орбит).

14*. *Скорость спутника на половине пути между перигеем и апогеем.* Как найти скорость спутника при прохождении через конец малой оси эллиптической орбиты, если известны скорости в перигее и в апогее орбиты?

15**. *Вертикальный полет баллистического снаряда.* Баллистический снаряд получает на поверхности Земли направленную вертикально начальную скорость, равную первой космической скорости. На какую максимальную высоту поднимется снаряд? Сколько времени пройдет от момента старта до момента падения снаряда на Землю? Проверьте результат расчета в моделирующем эксперименте.

16. *Семейство эллиптических траекторий баллистических снарядов.* Пусть баллистические снаряды запускаются из одной точки на поверхности Земли в разных направлениях (под разными углами к горизонту). Пусть величина начальной скорости всех снарядов равна первой космической скорости. Предположим, что атмосфера отсутствует.

- (а)* Докажите, что большая ось каждой такой орбиты параллельна направлению начальной скорости.
- (б) Докажите, что большая полуось любой из этих орбит равна радиусу Земли.
- (в) Какой максимальной высоты над поверхностью Земли могут достичь эти снаряды?
- (г) Докажите, что вторые фокусы всех эллипсов расположены на окружности, центр которой находится в начальной точке, а радиус равен радиусу Земли.
- (д)** Который из таких снарядов, выпущенных одновременно под разными углами к горизонту, последним упадет на Землю? Сколько времени пройдет от старта до момента его падения на Землю?
- (е)** Пусть снаряд выпущен под углом θ с вертикалью. Рассчитайте угловое положение точки его падения на Землю (относительно начальной точки). Сколько времени продолжится полет этого снаряда? Сделайте численные расчеты для $\theta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ и 60° . Результаты расчета проверьте в моделирующем эксперименте.
- (ж)** Докажите, что огибающая всех траекторий (граница области, в пределах которой лежат траектории рассматриваемого семейства) представляет собой эллипс. Где расположены фокусы этого эллипса? Чему равен его эксцентриситет?

17. *Семейство эллиптических траекторий осколков при одинаковой величине начальной скорости.* Допустим, что поднимающийся вертикально вверх снаряд в высшей точке подъема (расстояние r_0 до которой от центра Земли в несколько раз больше радиуса Земли) разбивается на множество осколков, разлетающихся во всевозможных направлениях с начальными скоростями, равными $1.2V_{кр}$, где $V_{кр}$ – круговая скорость для данной начальной точки (для расстояния r_0 от центра Земли).

- (а) При каком направлении начальной скорости осколок удалится на наибольшее расстояние от центра Земли? Рассчитайте наибольшее расстояние, на которое осколки могут удалиться

от центра Земли.

(б)* При каком направлении начальной скорости осколок удалится на наибольшее расстояние от начальной точки (от точки взрыва)? Рассчитайте это наибольшее расстояние. Где расположена точка наибольшего удаления от начальной точки?

(в) Сравните найденное в пункте (б) расстояние от начальной точки до точки наибольшего удаления с найденным в пункте (а) наибольшим расстоянием, на которое может удалиться осколок от центра Земли. Как можно объяснить совпадение этих расстояний?

(г)* Один из фокусов эллиптических орбит всех осколков находится в центре Земли. Докажите, что вторые фокусы всех орбит лежат на некоторой сфере. Где расположен центр этой сферы? Чему равен радиус этой сферы?

(д)** Докажите, что граница области, в пределах которой лежат орбиты всех осколков (т.е. огибающая всех орбит), представляет собой вытянутый эллипсоид вращения, фокусы которого расположены в центре Земли и в начальной точке (точке взрыва). Чему равен эксцентриситет этого эллипсоида?

18*. *Орбиты спутников, запущенных из одной точки с общим направлением начальной скорости.* Докажите, что вторые фокусы эллиптических орбит всех спутников, запущенных с разными величинами, но общим направлением начальных скоростей, лежат на одной прямой, проходящей через начальную точку. Докажите, что эта прямая образует с проходящей через начальную точку вертикалью угол, вдвое больший угла, образованного вектором начальной скорости с этой вертикалью (воспользуйтесь «оптическим» свойством эллипса).

19. *Эволюция вытянутой эллиптической орбиты в верхней атмосфере.* Объясните, почему постепенно снижается апогей сильно вытянутой эллиптической орбиты спутника, перигей которой расположен в разреженных верхних слоях атмосферы, так что форма орбиты постепенно приближается к круговой.

20. *Эволюция круговой орбиты в верхней атмосфере.* Обращающийся по низкой круговой орбите спутник непрерывно испытывает действие очень малой силы сопротивления разреженных верхних слоев атмосферы. После большого числа витков радиус орбиты уменьшился на 0.2%. На сколько процентов изменилась за это время скорость спутника? На сколько процентов изменился период его обращения? Каждый отдельный виток траектории спутника можно с высокой точностью считать круговым.

21*. *Аэродинамический парадокс спутника.* Объясните, каким образом из-за действия на спутник тормозящей его движение силы сопротивления в разреженных верхних слоях атмосферы скорость спутника возрастает.

22**. *Высота подъема и время полета.* Баллистический снаряд, начальная скорость которого направлена радиально вверх (от центра планеты), будет замедленно двигаться прямолинейно (удаляться от планеты по вертикали), достигнет некоторой максимальной высоты, и затем начнет падать на планету вдоль той же прямой. На какое максимальное расстояние от центра планеты удалится баллистический снаряд, если начальная точка находится на расстоянии r_0 от центра планеты, а начальная скорость равна круговой скорости для данной начальной точки? Сколько времени пройдет от момента старта до того момента, когда этот баллистический снаряд снова пройдет (в обратном направлении) через начальную точку? Ответ выразите в периодах обращения T по круговой орбите, проходящей через начальную точку.

23*. *Возвращение с орбиты.* Орбитальная станция движется вокруг Земли по низкой круговой орбите ($h \ll R$, где h – высота орбиты над поверхностью Земли, R – радиус Земли). Какой дополнительный импульс скорости Δv (и в каком направлении) должен быть сообщен отстыковавшемуся от станции транспортному кораблю, чтобы обеспечить переход с круговой орбиты на траекторию приземления, оптимальную с точки зрения затрат ракетного топлива? Сделайте численный расчет необходимой дополнительной скорости для $h = 0.1R$. Ответ выразите в единицах скорости орбитальной станции. Проверьте результат расчета в моделирующем эксперименте. Получите также приближенное выражение для Δv , справедливое вплоть до квадратичных членов по малому параметру $h/R \ll 1$.

24*. *Приземление сообщением дополнительной скорости вертикально вниз.* Орбитальная станция движется вокруг Земли по круговой орбите высотой h над поверхностью Земли. Рассчитайте дополнительную скорость Δv , которую нужно сообщить отстыковавшемуся от орбитальной станции спускаемому аппарату в направлении вертикально вниз для того, чтобы он по касательной вошел в плотные слои атмосферы. Выразите ответ в естественных для данной задачи единицах скорости станции на круговой орбите. Результат расчета проверьте в моделирующем эксперименте. В какой точке орбиты нужно сообщить эту дополнительную скорость, чтобы аппарат совершил посадку в заданном месте?

25*. *Сравнение двух способов возвращения с орбиты.* Покажите расчетом и проверьте в

моделирующем эксперименте, что для выполнения «мягкой» посадки сообщением дополнительной скорости в направлении, противоположном орбитальному движению по низкой круговой орбите, требуется приблизительно в четыре раза меньшая дополнительная скорость, чем при сообщении ее в вертикальном направлении.

26*. *Возвращение на Землю после направленного вверх дополнительного импульса.* Можно ли посадить спускаемый аппарат, сообщая ему дополнительную скорость вертикально вверх (по радиусу от центра Земли)? Если да, то какой должна быть необходимая для этого дополнительная скорость Δv ? В какой точке исходной круговой орбиты нужно сообщать эту скорость для того, чтобы спускаемый аппарат совершил посадку в заданной точке земной поверхности?

27*. *Относительное движение орбитальных тел.* Орбитальная станция движется вокруг Земли по круговой орбите. Космонавт, вышедший в открытый космос, бросает рукой небольшой предмет в горизонтальном направлении перпендикулярно вектору скорости станции. Как этот предмет будет двигаться относительно орбитальной станции? На какое максимальное расстояние от станции он удалится? Космонавт сообщает предмету начальную скорость 15 м/с.

28**. *Относительное движение в плоскости орбиты.* Орбитальная станция движется вокруг Земли по круговой орбите. Космонавт, вышедший в открытый космос, бросает рукой небольшой предмет в направлении вертикально вниз (в сторону Земли). Как этот предмет будет двигаться относительно орбитальной станции? На какое максимальное расстояние от станции он удалится? Начальная скорость предмета 15 м/с. Дайте ответы на те же вопросы, если предмет брошен вертикально вверх.

Программа, моделирующая относительное движение орбитальных тел, позволяет составить представление о характере свободного движения любого предмета, выброшенного с орбитальной станции. Каким увидят это движение космонавты, находящиеся на борту станции? При такой постановке задачи существенно, что начальная скорость предмета относительно станции невелика по сравнению с орбитальной скоростью. Сделайте качественные предсказания относительно формы траектории предмета относительно станции и проверьте свои предсказания в моделирующем эксперименте.

29***. *Относительное движение орбитальных тел.* Выведите приближенные дифференциальные уравнения относительного движения орбитальных тел (т.е. уравнения движения предмета, брошенного с небольшой скоростью относительно орбитальной станции, движущейся по круговой орбите). Проинтегрируйте эти уравнения для разных начальных условий (начальная скорость направлена вертикально вниз, вертикально вверх, горизонтально поперек плоскости орбиты станции, горизонтально по направлению движения станции и в противоположном направлении), и найдите для этих случаев траектории относительного движения.

30*. *Зонды с разными периодами обращения.* Наиболее экономичный с точки зрения затрат ракетного топлива способ запуска космического зонда для приближения к поверхности и исследования планеты со станции, движущейся вокруг планеты по круговой орбите, состоит в сообщении зонду дополнительной скорости в направлении, противоположном орбитальной скорости станции. При этом зонд переходит на приближающуюся к планете эллиптическую орбиту, которая имеет единственную общую точку с круговой орбитой станции, где и должна произойти последующая встреча зонда со станцией. Для такой встречи периоды зонда и станции должны относиться как небольшие целые числа, т.е. период зонда T_0 может быть равен $(m/n)T$. Какие (целые) значения m и n допустимы? Возможна ли орбита с $T_0 = T/2$? При каких значениях отношения радиуса орбиты станции и радиуса планеты возможен такой зонд? Какой должна быть дополнительная скорость, необходимая для запуска такого зонда? Проверьте свои расчеты в моделирующем эксперименте. Возможна ли орбита с $T_0 = T/3$?

31**. *Орбита космического зонда.* Орбитальная станция движется вокруг планеты по круговой орбите, радиус которой r_0 вдвое больше радиуса планеты R ($r_0 = 2R$). Для запуска зонда на нужную эллиптическую орбиту он должен получить после отстыковки от станции некоторую дополнительную скорость. Наиболее экономичный (с точки зрения затрат ракетного топлива) способ соответствует сообщению зонду дополнительной скорости в направлении, противоположном орбитальному движению станции.

(а) Рассчитайте дополнительную скорость Δv , потребную для маневра, обеспечивающего максимальное приближение зонда к поверхности планеты (с последующим возвращением к станции). Сколько процентов от скорости станции составляет эта дополнительная скорость?

(б) На какое минимальное расстояние зонд приближается к планете? Рассчитайте расстояние от центра планеты до ближайшей к ее поверхности точки орбиты. Выразите это расстояние в единицах радиуса круговой орбиты станции и попробуйте запустить такой зонд в моделирующем эксперименте.

(в) Чему равно отношение периодов обращения такого зонда и орбитальной станции?

Сколько раз зонд приблизится к планете с момента запуска до первой встречи с орбитальной станцией? Какой вид имеет орбита зонда для космонавтов на борту орбитальной станции?

32*. *Зонды с горизонтальной и радиальной начальными скоростями.* Орбитальная станция движется вокруг планеты по круговой орбите. Попробуйте запустить зонд, который возвратился бы к станции, совершив четыре оборота вокруг планеты за то время, пока станция совершит пять оборотов. Какую дополнительную скорость в направлении орбитального движения станции нужно сообщить зонду для этого? Как выглядит траектория зонда с точки зрения космонавтов, находящихся на орбитальной станции? Какая дополнительная скорость в радиальном направлении необходима для достижения того же результата (четыре оборота за пять оборотов станции)? Чем отличаются траектории космического зонда в этих двух случаях?

33*. *Пример орбитального маневрирования.* Перевод отстыковавшегося от орбитальной станции космического корабля в противоположную со станцией точку той же круговой орбиты можно осуществить с помощью двухимпульсного маневра с использованием промежуточных эллиптических орбит с периодами обращения, например, $3/2$ или $3/4$ периода обращения станции. В первом случае, получив при отделении от станции дополнительную скорость в направлении орбитального движения, корабль перейдет на эллиптическую орбиту, за время одного оборота по которой станция совершит полтора оборота. Это значит, что корабль выйдет в общую точку этих орбит в тот момент, когда станция будет находиться в диаметрально противоположной точке своей круговой орбиты. Если в этот момент повторным включением реактивного двигателя погасить избыток скорости над значением круговой скорости, корабль будет дальше двигаться по той же круговой орбите, что и станция, но уже в диаметрально противоположной точке.

(а) Рассчитайте значения дополнительной скорости, необходимые для выполнения таких маневров (в первом и во втором импульсах). Выразите эти значения в единицах круговой скорости (скорости орбитальной станции).

(б) Попробуйте выполнить эти маневры в моделирующем эксперименте. Для успеха очень важно точно выдержать момент сообщения второго (тормозного) импульса. Выберите режим автоматического выполнения маневров и введите расчетное значение момента времени сообщения второго импульса, выразив его в единицах периода обращения станции. Как выглядит промежуточная орбита корабля относительно Земли и относительно орбитальной станции?

(в) Какие маневры необходимы для того, чтобы корабль возвратился к станции? Попробуйте выполнить их в эксперименте.

(г) Поставленной цели можно добиться и с помощью промежуточной эллиптической орбиты с периодом обращения, например, в $3/4$ периода обращения по круговой орбите. В каком случае (промежуточная орбита в $3/2$ или $3/4$ периода) расход ракетного топлива будет меньше?

34. *Внешний космический зонд.* Орбитальная станция обращается вокруг планеты по низкой круговой орбите. Для фотографирования сразу возможно большей части полушария поверхности планеты необходим автоматический зонд, который удалится бы от центра планеты на расстояние, по крайней мере вдвое превышающее радиус орбиты станции, и затем вернулся к станции. Как можно запустить такой зонд при наименьших затратах ракетного топлива? Рассчитайте величину необходимой для этого дополнительной скорости, выразив ее в процентах от скорости орбитальной станции. Для мягкого причаливания зонда к станции при возвращении нужно уравнять их скорости повторным кратковременным включением ракетного двигателя зонда. Какими должны быть величина и направление необходимой для этого маневра дополнительной скорости? Проверьте свой расчет в моделирующем эксперименте в режиме автоматического выполнения маневров по введенной заранее программе. Какой вид имеет орбита зонда для космонавтов на борту орбитальной станции?

35. *Радиальная дополнительная скорость.* Орбитальная станция движется вокруг планеты по круговой орбите. Чтобы исследовать поверхность планеты с близкого расстояния и удаленные от планеты области межпланетного пространства с помощью одного зонда, можно использовать эллиптическую орбиту, получающуюся при сообщении зонду дополнительной скорости в радиальном (вертикальном) направлении. Какой должна быть величина этой дополнительной скорости, чтобы период обращения зонда был в 1.5 раза больше периода обращения станции? Рассчитайте минимальное и максимальное расстояния такого зонда от центра планеты. Какой вид имеет орбита зонда для космонавтов на борту орбитальной станции? Чем различаются орбиты стартующего со станции зонда, получающегося при сообщении ему дополнительной скорости в направлениях вертикально вниз и вертикально вверх?

36. *Переход на более высокую орбиту.* Придумайте двухимпульсные маневры, с помощью которых можно перевести транспортный космический корабль с исходной круговой орбиты станции на новую более высокую круговую орбиту (с последующим возвращением на ста-

цию совершением новых двухимпульсных маневров). При выборе из нескольких возможностей предпочтение должно отдаваться вариантам, оптимальным с точки зрения экономии топлива (т.е. вариантам, требующим наименьшего расхода ракетного топлива).

(а) Сделайте расчет необходимой дополнительной скорости в каждом импульсе для перехода на круговую орбиту с вдвое большим периодом обращения, чем орбита станции. Рассчитайте время t_2 второго импульса (в единицах периода обращения станции), считая время первого импульса $t_1 = 0$.

(б) После того, как корабль совершит по меньшей мере один полный оборот по новой круговой орбите, необходимо выполнить маневры для возвращения на станцию. Попробуйте придумать маневры, которые позволили бы осуществить сближение и стыковку корабля с орбитальной станцией. Рассчитайте возможный момент t_3 для совершения перехода на траекторию возвращения и необходимую для этого дополнительную скорость, а также момент t_4 сообщения последнего импульса для уравнивания скоростей корабля и станции после их сближения перед причаливанием.

(в) Введите все необходимые параметры (дополнительные скорости и моменты времени) для автоматического выполнения маневров по заранее рассчитанной программе. Проверьте правильность Ваших расчетов в моделирующем эксперименте.

37. *Переход на орбиту вдвое большего радиуса.* Рассмотрите предыдущее задание, заменив в нем требование перехода корабля на круговую орбиту с вдвое большим периодом (чем период орбитальной станции) требованием перехода на круговую орбиту вдвое большего радиуса, чем орбита станции. Проверьте правильность расчетов в моделирующем эксперименте.

38. *Чтобы догнать, нужно тормозить.* Орбитальная станция движется вокруг Земли по круговой орбите. При наземном старте транспортного корабля, который должен состыковаться со станцией, произошла непредвиденная задержка, из-за которой он с небольшим опозданием вышел на круговую орбиту станции, оказавшись *позади* станции на некотором расстоянии L . Это расстояние много меньше радиуса r орбиты станции ($L \ll r$). Чтобы догнать станцию через один ее оборот по орбите, требуется сообщить кораблю дополнительный импульс кратковременным включением ракетного двигателя.

(а) Каким должно быть направление этого импульса? Рассчитайте необходимую дополнительную скорость Δv , которую нужно сообщить кораблю. Выразите ее через расстояние L и период обращения станции T . Выразите также Δv через орбитальную скорость станции и отношение L/r .

(б) Какую дополнительную скорость Δv нужно сообщить кораблю, чтобы он догнал станцию после двух оборотов по орбите?

(в) Ответьте на те же вопросы для ситуации, когда корабль вышел на круговую орбиту станции, *опережая* ее на расстояние L .

39. *Относительное и «абсолютное» движение компонент двойной звезды.* Допустим, что одна из компонент двойной звезды движется относительно другой звезды (т.е. относительно неинерциальной системы отсчета, связанной со второй звездой) по кеплерову эллипсу, в одном из фокусов которого находится вторая звезда. Докажите, что в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс системы, обе звезды описывают геометрически подобные эллиптические орбиты с общим фокусом в центре масс системы. Чему равно отношение линейных размеров этих орбит?

40*. *Двойная звезда и эффективный неподвижный силовой центр.* Покажите, что в задаче двух тел, связанных взаимным тяготением, движение каждого из тел в инерциальной системе отсчета (системе центра масс) можно рассматривать как происходящее в некотором стационарном центральном гравитационном поле, т.е. в поле, создаваемом не движущимся вторым телом, а некоторым эффективным неподвижным источником (силовым центром). Покажите, что напряженность этого эффективного поля тяготения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния тела от центра масс системы. Какие выводы можно сделать на основе такого подхода о возможных траекториях компонент двойной звезды? Докажите, что ускорения тел в таких движениях относятся как их расстояния до центра масс системы: $a_1/a_2 = r_1/r_2$ (т.е. ускорения прямо пропорциональны расстояниям от центра масс).

41. *Двойная звезда и масштабные преобразования (скейлинг).* Компоненты двойной звезды имеют одинаковые массы и движутся по общей круговой орбите, находясь в каждый момент на противоположных концах ее диаметра.

(а) Во сколько раз изменится период обращения компонент двойной звезды по орбите, если пространственный размер системы (расстояние между компонентами) увеличить в 2 раза, сохранив прежние массы и характер движения (т.е. сохранив круговую орбиту)?

(б) Во сколько раз изменится период обращения, если массы компонент увеличить в 4 раза, сохранив пространственные размеры (и круговую орбиту)?

(в) Ответьте на аналогичные вопросы для двойной звезды, компоненты которой имеют неравные массы и обращаются по эллиптическим орбитам.

42**. *Поле тяготения несферической планеты.* Покажите, что дополнительный член в выражении для силы тяготения планеты, обусловленный небольшим осевым сжатием (или растяжением) планеты, убывает с расстоянием r от центра планеты (в экваториальной плоскости) обратно пропорционально четвертой степени расстояния, т.е. что силу тяготения в экваториальной плоскости можно приближенно описать формулой $F(r) = (GmM/r^2)(1 + bR^2/r^2)$, где R – радиус планеты, а безразмерный параметр b характеризует величину осевой деформации планеты. Для сжатой планеты примите модель однородного шара радиуса R с массивным «обручем» вдоль экватора, считая, что небольшая часть ΔM от общей массы M планеты приходится на этот экваториальный обруч. Для вытянутой планеты примите модель однородного шара радиуса R с дополнительными точечными массами на полюсах (полярными «шапками»), на которые приходится небольшая часть ΔM от общей массы M планеты.

43. *Круговая экваториальная орбита и оскулирующий эллипс.* Какую скорость нужно сообщить спутнику в экваториальной плоскости планеты с осевым сжатием (характеризуемым параметром $b > 0$), чтобы движение происходило по круговой орбите? По какой траектории стал бы двигаться этот спутник, если бы деформация планеты внезапно исчезла? (Такая невозмущенная кеплерова орбита, соприкасающаяся в данной точке с действительной орбитой, называется оскулирующей).

44*. *Максимальное и минимальное удаления экваториального спутника несферической планеты.* Спутнику, находящемуся на заданном расстоянии r_0 от центра сжатой вдоль оси планеты (сжатие планеты характеризуется параметром $b > 0$), сообщается некоторая скорость V_0 в направлении, перпендикулярном радиусу-вектору (в экваториальной плоскости). Как можно рассчитать максимальное и минимальное расстояния его орбиты от центра планеты?

45*. *Круговые движения массивных планет.* Пусть две планеты имеют одинаковые массы $m = M/4$ (где M – масса звезды) и в начальный момент находятся с противоположных сторон от звезды на одинаковых расстояниях r . Других планет в этой системе нет. Какие начальные скорости нужно сообщить планетам, чтобы в дальнейшем они двигались по круговым орбитам? Проверьте полученный Вами результат в вычислительном моделирующем эксперименте на компьютере. Напомним, что при вводе начальных скоростей планет их значения нужно выражать в единицах круговой скорости, которая соответствовала бы системе звезды с единственной планетой (при заданных значениях масс), т.е. без учета возмущений со стороны второй планеты.

46*. *Простое частное решение задачи трех тел.* Для системы трех массивных тел, два из которых имеют одинаковые массы, возможно сравнительно простое движение с сохранением симметричной коллинеарной конфигурации системы, в которой тела одинаковой массы все время расположены на равных расстояниях по обе стороны третьего тела. В инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс системы, центральное тело может быть неподвижно: действующие на него силы притяжения двух других тел уравновешены. Покажите, что два тела равной массы могут при этом синхронно двигаться по конгруэнтным кеплеровым эллипсам (или параболам, или гиперболам) так, как если бы каждое из них находилось в стационарном центральном поле тяготения, создаваемом неподвижным источником. Какова эффективная масса такого источника, если масса центрального тела равна M , а одинаковые массы двух других тел равны m ?

47. *Устойчивость простого частного решения.* Проверьте описанную в задаче 46 возможность кеплеровых движений в системе двух планет конечной массы с помощью моделирующего эксперимента на компьютере, задав соответствующие параметры системы и начальные условия. Затем несколько измените параметры либо начальные условия и выясните, к каким изменениям в характере движения приводят такие изменения. Устойчива ли рассматриваемая система? Другими словами, будут ли малые отклонения в начальных условиях или в значениях параметров приводить к малым отклонениям в описанных выше кеплеровых движениях планет, или эти малые начальные отклонения будут нарастать со временем?

48**. *Равносторонняя конфигурация трех тел одинаковой массы.* Покажите, что система из трех точечных (или сферических) небесных тел одинаковой массы, находящихся в вершинах равностороннего треугольника, может под действием сил взаимного тяготения равномерно вращаться как целое вокруг центра масс. Рассчитайте угловую скорость такого вращения. Воспроизведите круговое движение трех тел одинаковой массы в моделирующем эксперименте, используя программу «Система планет».

При вводе параметров следует задать массы двух «планет» равными массе «звезды» и должным образом задать их начальные положения. Значения начальных скоростей планет, которые необходимы для реализации рассматриваемого кругового движения, нужно пересчитать

предварительно в «гелиоцентрическую» (т.е. в связанную со «звездой») систему отсчета. Для ввода начальная скорость каждой планеты должна быть выражена в единицах ее невозмущенной круговой скорости, т.е. скорости обращения планеты по круговой орбите под действием только силы притяжения со стороны звезды (в отсутствие второй планеты). Как будет выглядеть такое симметричное движение в «гелиоцентрической» или в «геоцентрической» системе отсчета (т.е. в системе отсчета, связанной с одним из этих тел)? Устойчиво ли рассматриваемое движение?

49**. *Одинаковые тела в вершинах квадрата.* Покажите, что система из четырех небесных тел одинаковой массы, находящихся в вершинах квадрата, может под действием сил взаимного тяготения равномерно вращаться как целое вокруг центра масс. Рассчитайте угловую скорость такого вращения. Воспроизведите круговое движение четырех тел одинаковой массы в моделирующем эксперименте, используя программу «Система планет». При вводе параметров следует задать массы трех «планет» равными массе «звезды» и должным образом задать их начальные положения. Значения начальных скоростей планет, которые необходимы для реализации рассматриваемого кругового движения, нужно пересчитать предварительно в «гелиоцентрическую» (т.е. в связанную со «звездой») систему отсчета. Для ввода начальная скорость каждой планеты должна быть выражена в единицах ее невозмущенной круговой скорости, т.е. скорости обращения планеты по круговой орбите под действием только силы притяжения со стороны звезды (в отсутствие второй планеты). Как будет выглядеть такое симметричное движение в «гелиоцентрической» или в «геоцентрической» системе отсчета (т.е. в системе отсчета, связанной с одним из этих тел)? Устойчиво ли рассматриваемое движение?

50**. *Эллиптические движения в равносторонних конфигурациях.* Покажите, что система небесных тел одинаковой массы, находящихся в вершинах правильного треугольника или квадрата, может под действием сил взаимного тяготения совершать синхронное движение по конгруэнтным эллиптическим орбитам (а также по параболическим или гиперболическим траекториям), сохраняя во время движения равностороннюю конфигурацию. Стороны образуемого телами правильного многоугольника в таком движении непрерывно изменяются, а сам многоугольник, сохраняя правильную форму, неравномерно вращается вокруг своего центра. Воспроизведите такие движения в моделирующем эксперименте. Устойчивы ли такие движения?

51**. *Треугольные точки либрации.* Два массивных тела одинаковой массы (компоненты двойной звезды) совершают круговые движения, находясь на неизменном расстоянии друг от друга. Покажите, что третье тело (планета, спутник), масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массами двух других тел, тоже может двигаться по окружности синхронно с массивными телами, находясь все время в вершине правильного (равностороннего) треугольника, основанием которого служит отрезок, соединяющий массивные тела. Реализуйте такое круговое движение системы трех тел (описываемое точным частным решением ограниченной задачи трех тел) в моделирующем эксперименте, используя программу «Двойная звезда с планетой» или «Планета со спутником». Какую начальную скорость нужно сообщить третьему телу? Будет ли устойчиво движение малого тела в треугольной точке либрации по отношению к малым отклонениям в параметрах системы или в начальных условиях?

52***. *Треугольные точки либрации при неравных массах.* Покажите, что тело пренебрежимо малой массы, находясь в вершине равностороннего треугольника, основанием которого служит отрезок, соединяющий (неодинаковые) массивные тела, может двигаться синхронно с массивными телами, совершающими круговые движения под действием взаимного тяготения, оставаясь все время в такой треугольной точке либрации. Реализуйте такое круговое движение трех тел, образующих равностороннюю конфигурацию, в моделирующем эксперименте, используя программу «Двойная звезда с планетой» или «Планета со спутником». Какую начальную скорость нужно сообщить третьему телу? Будет ли устойчиво движение малого тела в треугольной точке либрации по отношению к малым отклонениям в параметрах системы или в начальных условиях?

53***. *Коллинеарные точки либрации.* Два массивных тела (компоненты двойной звезды) совершают круговые движения вокруг центра масс, находясь на неизменном расстоянии друг от друга. Покажите, что в такой системе на линии, проходящей через тела, существуют три точки, в которых третье тело (планета, спутник), масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массами двух других тел, тоже может двигаться по окружности синхронно с массивными телами, так что коллинеарная конфигурация системы сохраняется во время движения. Рассчитайте положения внутренней и двух внешних коллинеарных точек либрации. Воспроизведите описанное круговое движение в моделирующем эксперименте. Устойчиво ли движение малого тела в коллинеарных точках либрации?

54***. *Эллиптические движения в ограниченной задаче трех тел.* Покажите, что в случае эллиптических движений двух массивных тел, третье тело пренебрежимо малой массы, находящееся в треугольной точке либрации, может синхронно с массивными телами двигаться по геометрически подобному эллипсу, так что равносторонняя конфигурация системы сохраняется во время движения. При этом стороны треугольника испытывают непрерывные периодические

изменения, а сам треугольник неравномерно вращается вокруг центра масс системы. Воспроизведите описанное эллиптическое движение в моделирующем эксперименте.

55***. *Эллиптические движения в коллинеарной конфигурации.* Покажите, что в случае эллиптических движений двух массивных тел, третье тело пренебрежимо малой массы, находящееся в одной из коллинеарных точек либрации, может синхронно с массивными телами двигаться по геометрически подобному эллипсу, так что коллинеарная конфигурация системы сохраняется во время движения (расстояния между телами периодически изменяются при таком движении, но отношение расстояний остается неизменным). Воспроизведите такое эллиптическое движение в моделирующем эксперименте.

56***. *Эллиптические кеплеровы движения в неограниченной задаче трех тел.* Покажите, что три массивных тела (с произвольным соотношением масс) могут синхронно совершать кеплеровы эллиптические (круговые, параболические, гиперболические и даже прямолинейные) движения по геометрически подобным траекториям (с общим фокусом в центре масс системы), сохраняя равностороннюю конфигурацию. Стороны треугольника при этом непрерывно изменяются (периодически в случае эллиптических движений тел), а сам треугольник неравномерно вращается вокруг центра масс (вращается периодически в случае ограниченных движений или поворачивается в противном случае). Доказательство можно провести на основе концепции эффективного стационарного центрального гравитационного поля, в котором движется каждое из тел: несмотря на то, что каждое из тел движется под действием сил тяготения со стороны двух других движущихся тел, при равносторонней конфигурации эти силы складываются таким образом, что их сумма направлена к центру масс всей системы, и убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра масс. Этим обеспечивается возможность синхронных кеплеровых движений трех тел в равносторонней конфигурации. Воспроизведите такие эллиптические движения в моделирующем эксперименте. Устойчивы ли рассматриваемые движения в равносторонней конфигурации?