Задача трех тел

К пакету моделирующих программ «Движение космических тел»

Самые удивительные эффекты в небесной механике проявляются при исследовании задачи трех (и многих) тел, тяготеющих друг к другу. Система трех взаимодействующих тел моделируется в нескольких программах пакета «Движение космических тел». В частности, рассматривается движение спутника вокруг планеты, которая в свою очередь обращается вокруг звезды; моделируется движение планеты в системе двойной звезды; изучаются взаимные возмущения планет, обращающихся вокруг одиночной звезды.

В нескольких программах пакета моделируются системы, относящиеся к ограниченной задаче трех тел, в которой масса одного из тел пренебрежимо мала по сравнению с массами двух других тел. В таком случае можно пренебречь влиянием тела малой массы («легкого» тела) на движение массивных тел. Поэтому движение массивных тел будет в точности кеплеровым движением, и движение легкого тела будет происходить под действием сил тяготения, создаваемых массивными телами, движение которых точно известно. Оказывается, что даже ограниченная задача трех тел в общем случае не имеет аналитического решения. Отсутствие аналитических решений дифференциальных уравнений для столь простой системы связано, по-видимому, с необычайной сложностью возможных ее движений. При некоторых значениях параметров системы и/или начальных условий движение легкого тела становится нерегулярным, хаотическим, несмотря на детерминистский характер задачи. Хаотическое поведение нелинейных систем, подчиняющихся простым детерминистским физическим законам, связано с чрезвычайной чувствительностью дифференциальных уравнений, описывающих систему, к малым изменениям параметров и начальных условий: ничтожные различия в начальном состоянии системы могут привести к гигантским изменениям будущих состояний в долговременном поведении системы. Небесная механика дает один из многочисленных примеров хаоса в физических системах.

Планета со спутником – обзор

В данной программе моделируется система, математическая модель которой соответствует *ограниченной задаче трех тел*: масса одного из тел пренебрежимо мала по сравнению с массами двух других тел. В такой системе можно не принимать во внимание влияние тела малой массы («легкого» тела) на движение двух других («массивных», «тяжелых») тел. Поэтому движение тяжелых тел – это в точности кеплерово движение, происходящее так, как описано в программе «Двойная звезда». По отношению к инерциальной системе отсчета, в которой центр масс системы неподвижен, массивные тела синхронно описывают геометрически подобные кеплеровы орбиты, линейные размеры которых обратно пропорциональны массам тел. Общий фокус этих орбит находится в центре масс системы, и радиусы-векторы массивных тел, проведенные из центра масс, направлены противоположно друг другу. Каждый из них описывает равные площади за равные промежутки времени, в соответствии со вторым законом Кеплера.

В ограниченной задаче трех тел наибольший интерес представляет вопрос о движении легкого тела. Это движение происходит под действием сил тяготения, создаваемых массивными телами, движение которых точно известно. Оказывается, что даже ограниченная задача трех тел в общем случае не имеет аналитического решения, которое описывало бы движение легкого тела при произвольных начальных условиях.

Моделирующая программа «Планета со спутником» позволяет получить численное решение задачи для любых начальных условий при произвольных параметрах системы, и наблюдать движение тел, описываемое этим решением, на экране компьютера. Движение можно отображать как в системе отсчета, связанной с одним из двух массивных тел, т.е. либо в геоцентрической (планетоцентрической) системе отсчета, либо в гелиоцентрической системе, так и в инерциальной системе отсчета (системе центра масс). Можно также наблюдать движение одновременно в двух системах отсчета.

Подчеркнем, что программа может моделировать не только спутник, обращающийся вокруг планеты, которая в свою очередь обращается вокруг звезды, но также и различные другие системы, поведение которых описывается решением ограниченной задачи трех тел. Например, можно моделировать движение внутренней планеты в системе двойной звезды, либо движение космического корабля на пути к Луне под действием сил тяготения как Земли, так и Луны. Или же можно исследовать лунные или солнечные возмущения движений искусственных спутников Земли. И, наконец, с помощью этой программы можно моделировать движение в тех интересных экзотических частных случаях, для которых ограниченная задача трех тел имеет точные решения. Можно, например, исследовать движение спутника в окрестности лагранжевых точек либрации в системе двух массивных тел, обращающихся одно вокруг другого под действием сил взаимного притяжения (Земля и Луна, или Солнце и Юпитер дают приближенные примеры таких систем).

При воспроизведении описываемых ниже моделирующих экспериментов можно избежать трудоемкого процесса ввода параметров системы и начальных условий, если воспользоваться наборами заранее заготовленных примеров, поставляемыми вместе с программой. Для выбора примеров нужно открыть панель с их описанием, выбрав в меню программы пункт «Примеры». Во время моделирования можно переходить от одной системы отсчета к другой, или открывать одновременно две системы отсчета, чтобы получить представление о том, как моделируемое движение выглядит для разных наблюдателей.

Разумеется, программа дает возможность проводить моделирующие эксперименты самостоятельно. Для этого необходимо вводить параметры системы и задавать начальные условия для всех тел, используя панель ввода параметров, которая открывается при выборе соответствующего пункта меню программы. Для двух массивных тел нужно задать отношение их масс и начальную скорость, определяющую характер их относительного движения. По условию эта скорость направлена трансверсально (перпендикулярно отрезку, соединяющему центры тел). Поэтому нужно ввести лишь ее величину, выразив ее в единицах круговой скорости (т.е. скорости, при которой относительное движение этих тел и их движения в системе отсчета центра масс будут круговыми). Это значит, что когда для относительной скорости вводится значение 1, тела будут двигаться по окружностям. Затем нужно ввести начальное положение и скорость спутника. Для этого можно выбрать одну из следующих систем отсчета: либо систему отсчета, связанную с планетой (далее мы будем для краткости называть ее «геоцентрической»), либо систему, связанную со звездой («гелиоцентрическую»), либо инерциальную систему отсчета, связанную с центром масс системы тел. Которая из этих систем удобнее, зависит от характера задачи, которую Вы собираетесь исследовать. Выбор той или иной системы отсчета производится с помощью специальных кнопок.

Начальное положение спутника задается либо указанием его расстояния от центра планеты-хозяина, либо от звезды, либо от центра масс системы, в зависимости от того, какую Вы выбрали систему отсчета. Это расстояние нужно выражать в единицах начального расстояния между звездой и планетой. Кроме того, нужно указать угол (в градусах), образуемый радиусом-вектором начального положения спутника (проведенным либо из центра планеты, либо звезды, либо из центра масс) с прямой, проведенной от звезды к планете. Аналогично вводится начальная скорость спутника. Сначала вводится ее величина. Если используется геоцентрическая система отсчета, величина начальной скорости выражается либо в единицах невозмущенной круговой скорости спутника для выбранного начального расстояния его от планеты (т.е. скорости, с которой спутник двигался бы вокруг планеты по круговой орбите в отсутствие звезды), либо в единицах круговой скорости планеты (для заданного начального расстояния между звездой и планетой). Выбор между указанными возможностями делается с помощью соответствующей кнопки, которая появляется, когда окно для ввода скорости получает фокус. Если Вы используете систему отсчета центра масс или геоцентрическую, величина начальной скорости спутника должна выражаться в единицах круговой скорости планеты (в выбранной системе отсчета).

И, наконец, нужно ввести размеры (значения радиусов) звезды и планеты, выраженные в единицах расстояния между центрами звезды и планеты. При моделировании размеры массивных тел могут оказаться существенными в ситуациях, когда траектория спутника проходит очень близко от звезды или планеты. В зависимости от введенных Вами радиусов этих небесных тел спутник может либо благополучно миновать их, либо врезаться в их поверхность.

Планета со спутником – примеры моделирования

В Солнечной системе массы планет очень малы по сравнению с массой Солнца. Поэтому притяжение планет Солнцем играет гораздо более важную роль, чем взаимное притяжение между планетами. Последнее вызывает лишь весьма небольшие отклонения от законов Кеплера В случае звезды с единственной планетой ее движение было бы в точности кеплеровым.

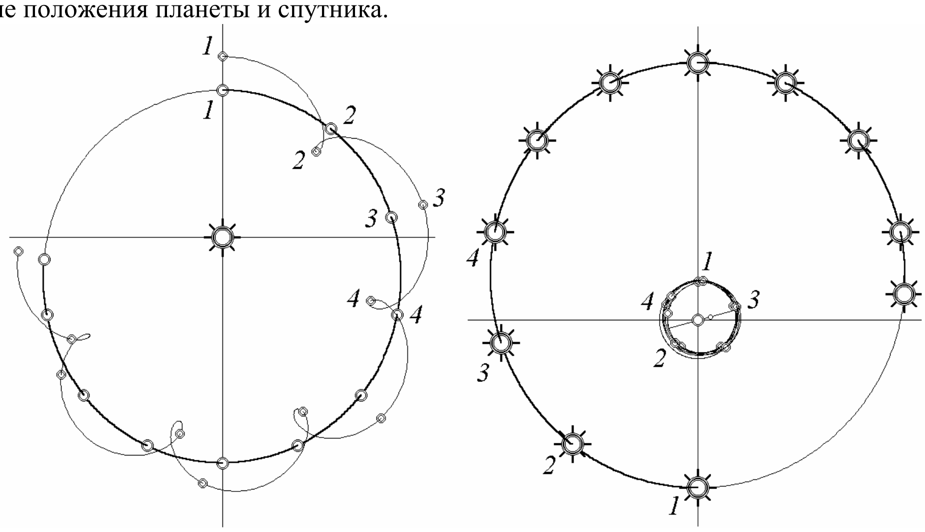
Но что можно сказать о движении спутника планеты? В какой мере это движение можно считать кеплеровым? Ведь помимо силы притяжения к планете на спутник действует сила притяжения к Солнцу. Например, сила притяжения к Солнцу нашего естественного спутника – Луны, как легко подсчитать, превосходит силу притяжения к Земле. В каком же смысле можно говорить об обращении Луны вокруг Земли?

Дело в том, что при описании движения спутника планеты мы рассматриваем его движение *относительно планеты*, а не относительно Солнца. А система отсчета, связанная с планетой, не является инерциальной: она вместе с планетой подвержена ускорению, направленному к Солнцу. Когда спутник находится близко к планете, солнечное притяжение сообщает ему почти такое же ускорение, как и самой планете. Поэтому вмешательство Солнца в движение спутника относительно планеты оказывается незначительным: в главных чертах это движение описывается законами Кеплера. Тяготение к Солнцу проявляется в *возму-*

щающем ускорении, которое равно не ускорению, сообщаемому спутнику Солнцем, а *разности ускорений*, сообщаемых Солнцем спутнику и планете. Кеплерово движение спутника относительно Земли возмущается не самим по себе солнечным тяготением, а лишь его *неоднородностью* на расстояниях порядка удаления спутника от центра планеты. В земных делах (в неинерциальной планетоцентрической системе отсчета) неоднородность поля тяготения Солнца обнаруживает себя (вместе с неоднородностью поля тяготения Луны) в виде *приливообразующих сил*, возмущающих орбиты спутников Земли и вызывающих океанские приливы.

На протяжении околоземной орбиты спутника неонородность поля тяготения Солнца сравнительно невелика. Поэтому при расчете движения спутника вблизи планеты оказывается возможным в первом приближении учитывать его притяжение только планетой, т.е. исследовать движение спутника относительно планеты в рамках ограниченной задачи двух тел. Для спутника, масса которого много меньше массы планеты, это будет просто кеплерово движение в ньютоновском центральном поле тяготения. Орбита спутника относительно планеты может быть эллипсом или окружностью, а пролетная траектория космического аппарата – параболой или гиперболой.

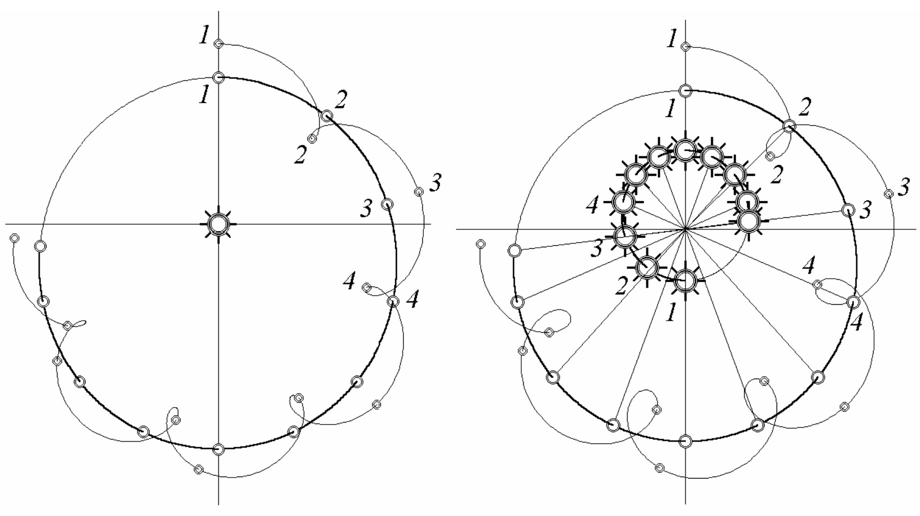
Моделирующая программа «Планета со спутником» позволяет изучить общий характер и многие особенности влияния звезды на движение спутников вокруг планеты. Ниже на рисунке в двух системах отсчета показано движение спутника по сравнительно низкой почти круговой орбите. Совпадающими цифрами отмечены одновременные положения планеты и спутника.



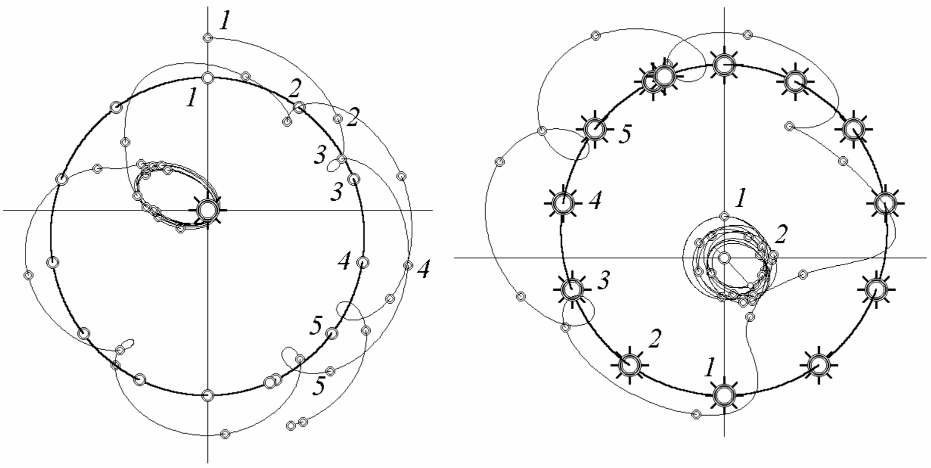
Сложная петлеобразная или волнообразная траектория спутника в системе отсчета, связанной со звездой, объясняется сложением двух относительно простых движений: регулярного движения по большой окружности (или эллипсу) вместе с планетой вокруг звезды, и одновременного обращения вокруг планеты по малой окружности (или малому эллипсу). Правая часть рисунка ясно показывает, что геоцентрическое движение спутника действительно происходит по простой почти кеплеровой орбите, которая лишь слегка возмущается звездой. Мы видим, что влияние массивной звезды на орбитальное движение спутника относительно планеты гораздо менее существенно, чем влияние планеты на гелиоцентрическое движение спутника. В системе отсчета, связанной со звездой, вместо простой эллиптической орбиты получается сложная петлеобразная или волнообразная кривая.

Чтобы отчетливее выявить эти особенности, здесь для моделирования выбраны значения параметров, далекие от ситуации, характерной для реальных планетных систем: масса планеты составляет почти треть массы звезды, так что моделируемая ситуация скорее применима к движению внутренней планеты вокруг одной из компонент двойной звезды. Впрочем, различие здесь скорее количественное, чем качественное.

Когда масса второго тела сопоставима с массой наиболее тяжелого тела системы (в данном моделирующем эксперименте отношение масс равно 1/3), «гелиоцентрическая» система отсчета неинерциальна. На приводимом здесь втором рисунке то же самое движение показано как в гелиоцентрической, так и в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс.

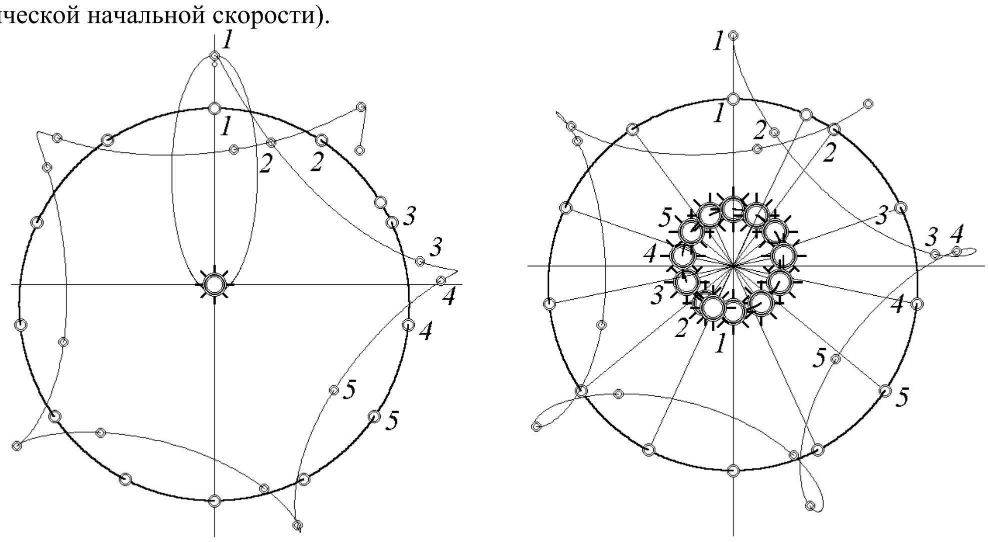


В рассмотренной выше ситуации движение легкого тела устойчиво в том смысле, что спутник обращается вокруг своего «хозяина» неограниченно долго. Однако в подобных системах трех тел возможны также неустойчивые движения. В зависимости от параметров системы и начальных условий, геоцентрическая орбита спутника может приближаться к границе *сферы гравитационного действия* планеты, где движение спутника будет сильно возмущаться полем тяготения звезды. Может случиться так, что после нескольких витков вокруг планеты поле тяготения звезды вырвет спутник из гравитационных «объятий» планеты, так что он превратится в независимую планету, обращающуюся вокруг звезды по почти кеплеровой гелиоцентрической орбите, лишь слегка возмущаемой планетой. Подобный случай показан на приведенном ниже рисунке, где изображено одно и то же движение легкого тела в «гелиоцентрической» и «геоцентрической» системах отсчета.



Может случиться так, что потерянный планетой спутник после нескольких независимых оборотов вокруг звезды будет снова «захвачен» планетой. На приведенном здесь рисунке эта «реституция» происходит приблизительно через год (один оборот планеты вокруг звезды) независимого существования спутника. Аналогичная «перепасовка» спутником между планетой и звездой в таком «космическом баскетболе» может повторяться неоднократно. Эти «странствования» в конце концов заканчиваются падением спутника на планету или на звезду, или выбрасыванием спутника за пределы системы. Аналогично, внутренняя планета в системе двойной звезды может время от времени совершать переходы от обращения вокруг одной из компонент к другой и обратно. Несмотря на простые детерминистские физические законы, управляющие системой, ее долговременное поведение выглядит беспорядочным, хаотическим. Такие нерегулярности в движении связаны с высокой чувствительностью нелинейной физической системы к малым изменениям параметров и начальных условий.

Следующий рисунок иллюстрирует интересную ситуацию обращения спутника вокруг планеты в направлении, противоположном обращению планеты вокруг звезды. Такое движение называют *попятным* или *ретроградным*, в противоположность *прямому* обращению. Для того, чтобы смоделировать попятное движение, нужно выбрать противоположное направление скорости спутника при задании начальных условий в геоцентрической системе отсчета. Узкий вытянутый эллипс – это оскулирующая орбита, по которой обращался бы спутник вокруг звезды в отсутствие планеты (при тех же значениях начального положения и гелиоцентрической начальной скорости).



Орбита спутника с ретроградным обращением более устойчива к возмущениям со стороны гравитационного поля звезды по сравнению с орбитой такого же радиуса с прямым обращением. Увеличение устойчивости объясняется большей скоростью спутника относительно звезды в области между звездой и планетой, где спутник ближе всего подходит к звезде.

Рассмотренные примеры показывают, насколько сложным может быть движение в сравнительно простой системе всего трех взаимодействующих небесных тел. Следующий раздел дает еще один яркий пример очень сложных движений в системе трех тел.

Кометы – межпланетные странники

Кометы, несмотря на их ничтожные массы по сравнению с массами планет, обычно видны даже невооруженным глазом, когда они приближаются к Солнцу. Ядра большинства комет представляют собой, по-видимому, нечто вроде глыбы грязного снега диаметром не более нескольких километров. Ядра комет окружены *комой* – туманным облаком газа и пыли. При прохождении вблизи Солнца некоторые кометы обретают *хвост*, который всегда вытянут в сторону, противоположную Солнцу. При нагревании ядра кометы излучением Солнца образуется шлейф из испарившихся (сублимированных) газов, который простирается на большие расстояния под действием светового давления и солнечного ветра. Длина хвоста кометы может превышать расстояние от Земли до Солнца. Длинный яркий хвост в сочетании с крошечной массой дал повод окрестить этих небесных странников «видимое ничто».

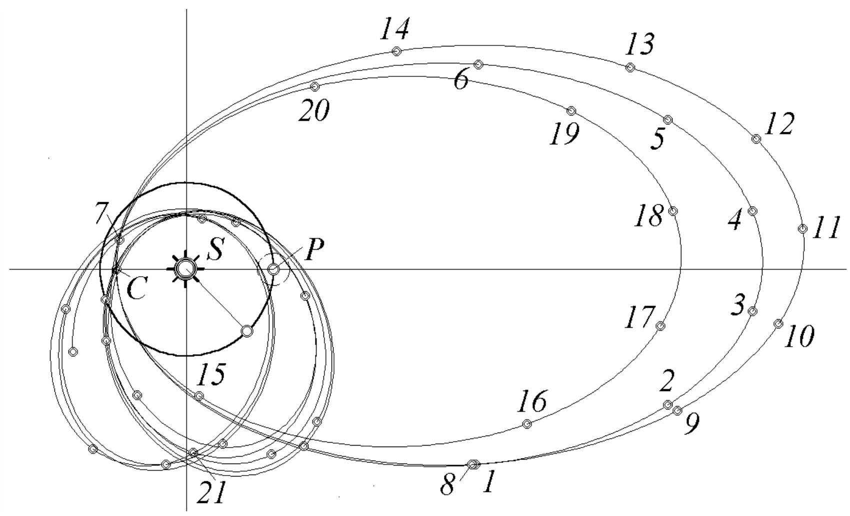
Входя в состав Солнечной системы, кометы движутся вокруг Солнца по чрезвычайно сильно вытянутым орбитам. Некоторые из комет имеют очень длинные периоды обращения, превышающие 100 000 лет. Столь сильно вытянутые эллиптические орбиты таких *долгопериодических* комет почти невозможно отличить от парабол, тем более, что мы можем наблюдать только малые части их орбит, которые проходят в окрестности Солнца. Эти кометы появляются неожиданно, непредсказуемо, в противоположность *короткопериодическим* кометам с орбитальными периодами менее 150 лет.

Самая известная из короткопериодических комет – комета Галлея – названа в честь английского астронома Эдмунда Галлея (Edmund Halley, 1656 – 1742), который впервые осознал, что кометы, наблюдавшиеся в 1531, 1607 и 1682 годах фактически были одним и тем же небесным телом, периодически возвращавшимся к Солнцу приблизительно каждые 76 лет. Последнее посещение кометой Галлея окрестностей Солнца состоялось в 1986 году. Афелий ее эллиптической орбиты (с ретроградным обращением) находится за пределами орбиты Нептуна, самой удаленной из планет-гигантов Солнечной системы. В настоящее время известно много короткопериодических комет с периодами обращения от трех до десяти лет.

Массы комет слишком малы для того, чтобы влиять на движение планет даже в тех случаях, когда они проходят в непосредственной близости от планет. Напротив, массивные планеты, такие, как Юпитер, существенно изменяют орбиты комет. В зависимости от взаимного расположения планеты и кометы при их сближении, такой «гравитационный удар» может значительно повлиять на вытянутость орбиты кометы. Если орбита становится более протяженной, период ее обращения тоже возрастает. Комета может даже перейти на гиперболическую орбиту и тем самым оказаться выброшенной из Солнечной системы. И наоборот, если протяженность орбиты уменьшается, долгопериодическая комета может оказаться захваченной на небольшую орбиту с коротким периодом обращения.

Подобно большинству планет Солнечной системы, орбиты многих короткопериодических комет имеют сравнительно небольшие наклоны к плоскости земной орбиты (к эклиптике). Программа «Планета со спутником», в которой моделируется планарное (происходящее в одной плоскости) движение трех тел, позволяет воспроизвести возмущения, испытываемые такими кометами со стороны планет. При постановке такой задачи моделирования «спутник» (тело пренебрежимо малой массы) играет роль кометы. Чтобы эффект гравитационных возмущений со стороны планет был легко наблюдаем, нужно для первоначальной вытянутой орбиты кометы выбрать расстояние до перигелия меньшим, чем радиус орбиты планеты, так, чтобы орбиты планеты и кометы пересекались.

Результаты такого моделирования показаны на следующем рисунке. В начале моделирования комета ***C*** находится недалеко от Солнца ***S*** на стороне, противоположной планете ***P*** (это может быть, например, Юпитер), которая движется вокруг Солнца (против часовой стрелки) по круговой орбите. Комета делает один оборот по своей первоначальной вытянутой эллиптической орбите приблизительно за семь оборотов планеты, т.е. за семь юпитерианских лет. Маленькие кружки с цифрами показывают положение кометы каждый раз в моменты времени, когда планета завершает очередной оборот и возвращается в точку ***P***.



Если комета проходит вблизи Солнца (через перигелий своей орбиты) в момент, когда планета находится далеко от этой точки (скажем, на противоположной стороне от Солнца), орбита кометы лишь слегка возмущается планетой. Именно так происходит после первого оборота кометы, который длится почти целое число юпитерианских лет (положение *7* на рисунке, а планета в этот момент в точке ***P***). Поэтому на втором витке комета движется по орбите, лишь слегка отличающейся от первоначальной. Однако период ее обращения немного увеличился, так что при следующем ее проходе через перигелий (между положениями *14* и *15*) планета оказывается ближе и сильнее возмущает орбиту кометы. Такие весьма скромные возмущения, искажающие вытянутую гелиоцентрическую орбиту кометы вблизи ее перигелия, вызывают нерегулярные вариации периода обращения кометы. Большинство известных короткопериодических комет испытывают такие вариации. Например, период обращения кометы Галлея колеблется между 74 и 79 земными годами.

Раньше или позже обращение по пересекающимся орбитам с несоизмеримыми периодами приведет комету в близкую окрестность планеты. В моделировании, показанном на рисунке, такая встреча происходит после третьего витка кометы, между положениями *20* и *21*. Комета входит в сферу гравитационного действия планеты с гиперболической скоростью относительно планеты. Это означает, что комета не может быть захвачена планетой на планетоцентрическую орбиту, т.е. она не может стать спутником планеты.

Прочертив отрезок гиперболы (в системе отсчета планеты), комета покидает сферу гравитационного действия планеты (если, разумеется, гипербола не пересекла поверхность планеты) с такой же по модулю скоростью (относительно планеты), но иначе направленной. Это изменение направления планетоцентрической скорости кометы можно образно назвать *гравитационным ударом*, хотя тела при этом не входят в непосредственное соприкосновение. Возникающее в результате гравитационного удара изменение направления и модуля гелиоцентрической скорости кометы вызывает значительное изменение ее орбиты.

В некоторых успешно осуществленных проектах космических экспедиций подобные гравитационные взаимодействия использовались для преднамеренного изменения траектории космического аппарата. Например, проект «Вояджер» был предложен и осуществлен NASA с намерением использовать преимущество необычного взаимного расположения внешних планет в течение 1970-х и 1980-х годов. С помощью серии последовательных гравитационных ударов с внешними планетами, которую позволило осуществить это расположение планет группы Юпитера, удалось в одной экспедиции послать Вояджер исследовать с близкого расстояния несколько далеких планет. Большой Тур «Вояджера» значительно расширил наши знания о далеких планетах Солнечной системы и их многочисленных спутниках.

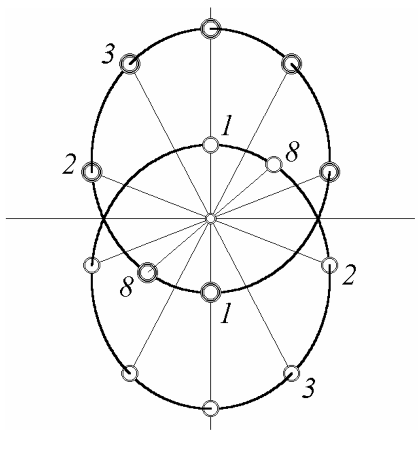
В моделировании, показанном на рисунке, комета испытывает сильный гравитационный удар с планетой после трех оборотов по своей первоначальной почти эллиптической орбите, которая на протяжении трех витков испытывала лишь слабые возмущения со стороны планеты. В результате гравитационного удара комета оказалась захваченной на небольшую короткопериодическую гелиоцентрическую орбиту. Такая орбита тоже долго не просуществует, потому что она пересекается с орбитой планеты. После нескольких оборотов по новой орбите комета вновь встречается с планетой, и этот второй гравитационный удар снова значительно изменяет орбиту кометы.

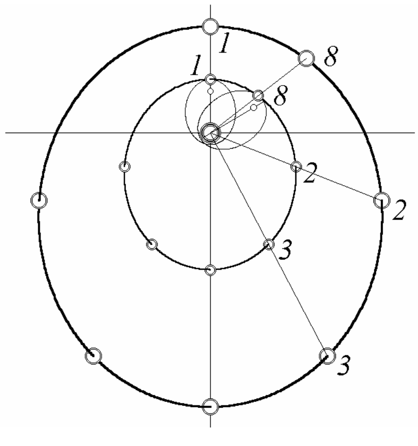
Очевидно, что судьба кометы чрезвычайно чувствительна к начальным условиям. Это еще один пример динамического хаоса: ничтожно малое различие в начальных условиях может привести к драматическим различиям в дальнейшем движении системы. Например, гравитационный удар с планетой может настолько увеличить гелиоцентрическую скорость кометы, что она окажется выброшенной из системы. Или же гравитационный удар так изменит орбиту кометы, что через несколько витков она врежется в планету.

Короткопериодические кометы можно моделировать также, используя программу «Система планет».

Точные частные решения задачи трех тел

Когда массы «тяжелых» тел одинаковы, ограниченная задача трех тел имеет очевидное *точное решение*, в котором третье тело находится ровно посередине между двумя другими (т.е. в центре масс системы), и его скорость относительно центра масс равна нулю. Поскольку в этой симметричной коллинеарной конфигурации силы тяготения, действующие на тело в центре со стороны двух других тел, равны и противоположны, т.е. уравновешивают друг друга, то находящееся в центре масс неподвижное тело остается там неограниченно долго. Это заключение справедливо при произвольных движениях массивных тел, включая случаи, когда эти тела описывают эллиптические орбиты, для которых центр масс системы является общим фокусом (как показано на приведенном ниже рисунке).



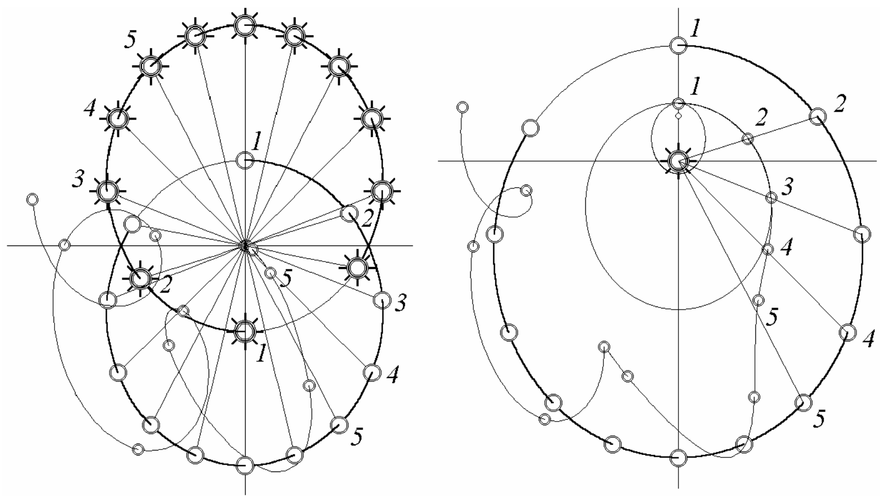


Более того, это частное решение существует даже для системы, у которой третье (находящееся посередине) тело имеет конечную массу, т.е. такое решение справедливо и для *неограниченной* задачи трех тел. Единственное отличие от предыдущего случая здесь заключается в том, что третье тело произвольной массы, находясь на полпути между двумя другими телами одинаковой массы, своим притяжением оказывает влияние на их движение: полная сила, приложенная к каждому из крайних тел в этой коллинеарной конфигурации, представляет собой сумму двух сил тяготения – одной со стороны второго симметричного партнера, и второй со стороны центрального тела. Но как легко показать, эта полная сила, действующая на каждое из крайних тел, обратно пропорциональна квадрату расстояния от центрального тела. Поэтому в системе отсчета центра масс движение каждого из крайних тел в симметричной конфигурации будет кеплеровым, а среднее тело произвольной массы будет оставаться посередине между ними в покое в состоянии равновесия.

С точки зрения наблюдателя, находящегося на одном из крайних тел (т.е. в системе отсчета, связанной с этим телом, см. правую часть рисунка), центральное тело описывает эллипс, геометрически подобный эллипсу, описываемому вторым партнером пары, что можно увидеть на левой стороне рисунка. Линейные размеры этого эллипса вдвое меньше, чем у эллипса относительного движения парных тел. Для такого наблюдателя второй партнер пары находится в состоянии перманентного затмения, так как центральное тело, двигаясь синхронно со вторым партнером симметричной пары, все время находится в середине отрезка, соединяющего парные тела.

Еще два небольших тонких эллипса на правом рисунке соответствуют невозмущенным траекториям (для начального и конечного расположений тел в данном моделировании), вдоль которых двигалось бы малое центральное тело при отсутствии второго партнера массивной пары.

Однако положение равновесия центрального тела (как и все это простое движение тел) неустойчиво. Если среднее тело чуть сместить из центра масс системы или сообщить ему сколь угодно малую скорость относительно центра масс, оно будет удаляться от центра с прогрессивно возрастающей скоростью. Приведенный здесь рисунок иллюстрирует неустойчивость рассматриваемого движения.

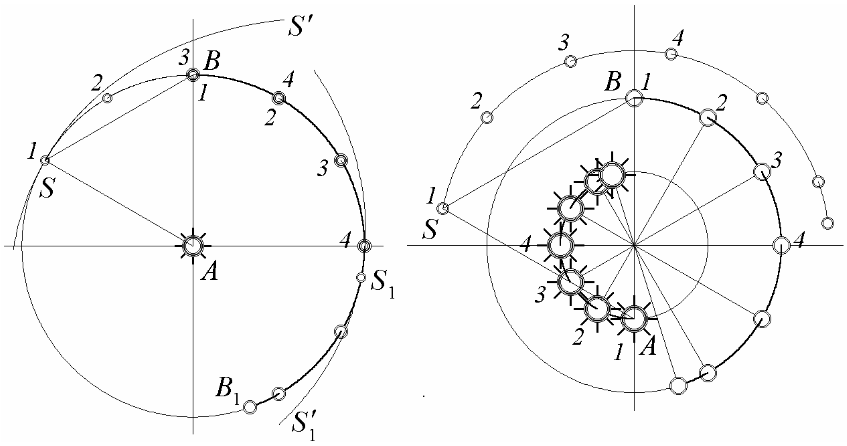


Спутники в точках либрации

Круговая ограниченная задача трех тел имеет ряд интересных точных частных решений. Можно показать, что когда два массивных тела, связанные гравитационным взаимодействием, совершают круговые движения, существует пять точек, в которых легкое тело может находиться в равновесии в системе отсчета, вращающейся вместе с прямой, соединяющей массивные тела. Таким образом, вся система трех тел может сохранять неизменную конфигурацию, равномерно вращаясь в одной плоскости как единое твердое тело вокруг своего центра масс. Эти пять точек называют *точками либрации* или *лагранжевыми точками*, так они были известны еще Лагранжу. Равновесие тела в точках либрации обеспечивается совместным действием сил тяготения со стороны массивных сил и центробежной силой инерции, обусловленной вращением связанной с массивными телами системы отсчета. Лагранжевы точные решения представляют некоторый практический интерес для космической динамики благодаря возможности (хотя бы принципиальной) запуска стационарного спутника в треугольные точки либрации системы Земля – Луна.

Три точки либрации расположены на прямой линии, проходящей через массивные тела. Их называют *коллинеарными* точками либрации. Две другие точки расположены в вершинах равносторонних треугольников, основанием для которых служит отрезок, соединяющий массивные тела. Их называют *треугольными* точками либрации. Следующий рисунок иллюстрирует стационарное движение спутника в треугольной точке либрации для системы, в которой масса одного из тяжелых тел втрое больше массы другого.

В начальной конфигурации (перед моделированием) три тела расположены в вершинах равностороннего треугольника ***BAS***. В системе отсчета, связанной с телом ***A*** наибольшей массы (левая сторона рисунка), тело ***B*** движется по окружности с центром в ***A***. Угловая скорость этого движения зависит от расстояния ***AB*** между телами и от масс этих тел.



Чтобы получить регулярное движение легкого тела в точке либрации, его начальную скорость нужно задать равной орбитальной скорости второго тела **B**. Если бы этого второго тела **B** не было, спутник **S** при такой начальной скорости двигался бы под действием только силы тяготения тела **A** вдоль эллиптической орбиты, ближний фокус которой находится в **A**, потому что эта начальная скорость больше, чем круговая скорость. Часть такой оскулирующей орбиты (невозмущенной вторым телом **B**) показана на левой части рисунка. Но действительное движение спутника **S** происходит вдоль той же самой круговой орбиты, по которой движется тело **B**. Силы тяготения, действующие на спутник **S** со стороны обоих массивных тел, создают как раз такое центростремительное ускорение, какое необходимо для кругового движения спутника **S** с той же угловой скоростью, что и у прямой **AB**. Поэтому начальная равносторонняя конфигурация системы остается неизменной во время движения. Если бы тело **B** внезапно исчезло в некоторый момент, то дальнейшее орбитальное движение спутника вокруг тела **A** происходило бы по эллипсу, касающемуся окружности в точке **S**, лежащей впереди **B** на 60 градусов (в этой точке находится перигей оскулирующего эллипса).

Таким образом, в системе отсчета, связанной с одним из массивных тел, например **A**, два других тела обращаются (по часовой стрелке на рисунке) вдоль одной и той же круговой орбиты, на которой одно из тел (спутник **S** на приведенном рисунке) движется на 60 градусов впереди другого тела (**B**). Во второй треугольной точке либрации спутник двигался бы по той же круговой орбите, отставая от другого тела на 60 градусов. Движение тел в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс, показано на правой части рисунка. Равносторонний треугольник **ABS**, в вершинах которого находятся тела, равномерно вращается как целое (как твердое тело) около центра масс системы тел.

Движение спутника в треугольной точке либрации (или равновесие во вращающейся системе отсчета) устойчиво лишь тогда, когда отношение масс тяжелых тел достаточно мало ($m/M < 0{,}04$). Поскольку масса Земли приблизительно в 81,3 раза больше массы Луны (отношение масс $m/M = 0{,}0123$), для системы Земля – Луна эти точки устойчивы.

В Солнечной системе устойчивые треугольные точки либрации образованы совместным действием сил тяготения Солнца и наиболее массивной планеты – Юпитера. По наблюдениям астрономов, две группы астероидов (получившие названия «Греки» и «Троянцы») захвачены в окрестностях этих точек и движутся по орбите Юпитера, соответственно опережая его и отставая на 60 градусов.

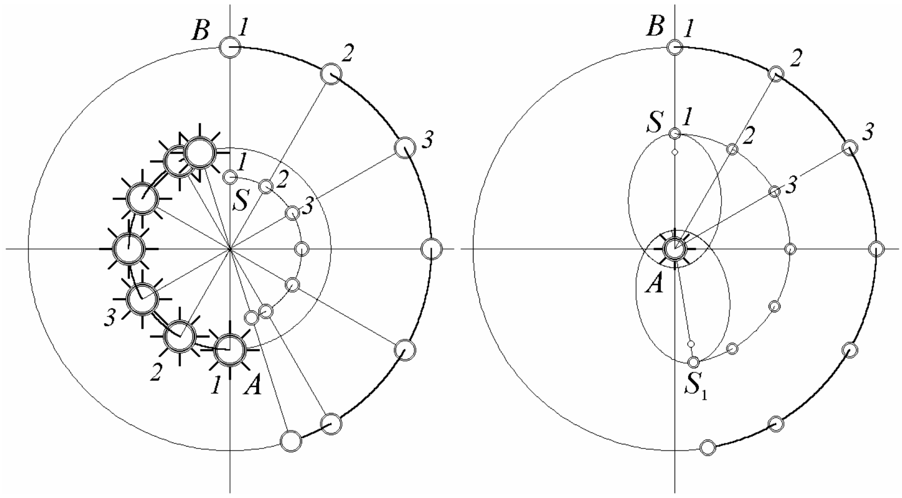
Для гипотетической системы с $m/M = 1/3$, движение которой показано на приведенном выше рисунке, треугольные точки либрации неустойчивы. Если спутник чуть-чуть сместить из точки неустойчивого равновесия, вскоре он начнет удаляться от нее. Регулярное движение, которое начиналось как твердотельное вращение всей системы вокруг цента масс, сменяется беспорядочным, хаотическим обращением спутника вокруг массивного тела **A**.

Коллинеарные точки либрации

Когда два массивных тела, связанные гравитационным взаимодействием, совершают круговые движения, на соединяющей их прямой существуют три точки, в которых третье тело пренебрежимо малой массы также может описывать круговую орбиту вокруг центра масс системы в той же плоскости и с той же угловой скоростью, что и массивные тела. Такие точки называют *коллинеарными точками либрации*. (сравните с треугольными точками либрации.)

Одна из коллинеарных точек либрации лежит между телами. Если массы тел равны ($m/M = 1$), эта точка находится точно в середине соединяющего тела отрезка, т.е. совпадает с центром масс системы. Этот частный случай уже обсуждался в разделе «Точные частные решения в задаче трех тел». Для системы с $m/M = 1/2$ (см. следующий рисунок) внутренняя точка либрации смещена из центра масс в направлении тела меньшей массы на 0,237 долей расстояния **AB** между телами. Расстояние этой точки от тела меньшей массы **B** равно приблизительно 0,43 *AB*, в то время как расстояние *SB* от тела большей массы равно 0,57 *AB*.

В этом положении приложенная к спутнику результирующая сила гравитационного притяжения телами **A** и **B** направлена к центру масс системы, а ее величина такова, что центростремительное ускорение спутника имеет значение, необходимое для движения по окружности вокруг центра масс с той же самой угловой скоростью, с какой происходит равномерное вращение линии **AB**, соединяющей массивные тела.

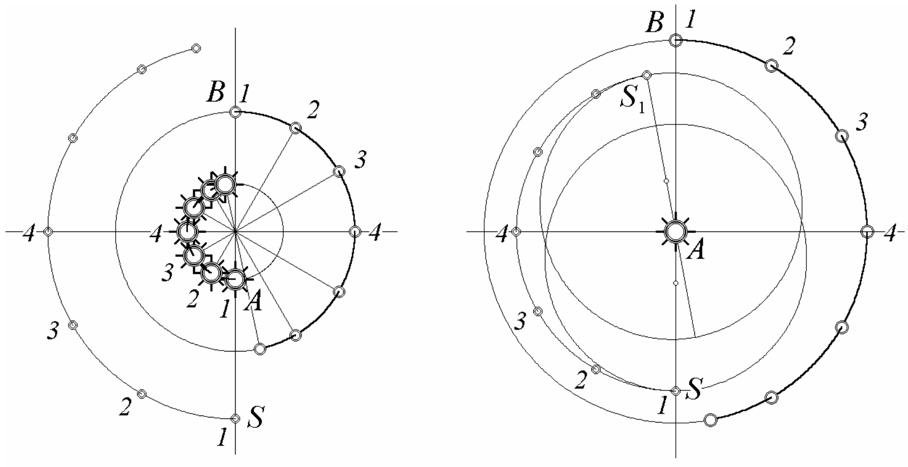


Таким образом, при надлежащим образом заданной начальной угловой скорости спутника, помещенного в эту точку, коллинеарная конфигурация трех тел системы сохраняется во время движения.

С точки зрения наблюдателя, находящегося на теле большей массы ***A*** (см. правую часть рисунка), менее массивное тело ***B***, двигаясь вокруг ***A*** по круговой орбите, постоянно находится в состоянии затмения спутником ***S***, поскольку видимое положение ***S*** всегда совпадает с ***B***. Подобным же образом, наблюдатель на теле ***B*** воспринимает эту ситуацию как равномерное обращение спутника ***S*** вокруг себя по круговой орбите радиуса 0,43 *AB*. При этом видимое положение спутника перманентно совпадает с положением тела ***A***, обращающегося вокруг ***B***.

Эллипсы на правой половине рисунка показывают оскулирующие орбиты, по которым происходило бы дальнейшее движение спутника вокруг тела ***A*** при внезапном исчезновении тела ***B***. Первый эллипс соответствует начальному моменту, второй – конечному моменту моделирования. Действительно, круговая скорость невозмущенного кругового движения вокруг тела ***A*** больше, чем круговая скорость действительного движения, в котором спутник подвержен также действию гравитационного притяжения телом ***B***. Эта дополнительная сила уменьшает центростремительное ускорение спутника, и поэтому действительное движение спутника по окружности происходит с меньшей линейной скоростью.

Две другие коллинеарные точки либрации лежат на соединяющей массивные тела прямой за пределами отрезка ***AB***. Для системы, в которой массы тяжелых тел равны, эти точки расположены симметрично на расстоянии 1,198 *AB* от центра масс, то есть на расстоянии 0,698 *AB* с внешней стороны от каждого из массивных тел (за пределами отрезка ***AB***). Если масса тела ***B*** меньше массы ***A***, одна из внешних точек либрации расположена ближе к телу ***B***. При $m/M = 1/2$ ее расстояние от центра масс равно 1,249 *AB*, так что эта точка либрации находится на расстоянии 0,582 *AB* от тела меньшей массы ***B***. Противоположная коллинеарная точка либрации расположена на расстоянии 1,136 *AB* от центра масс, так что ее расстояние от тела большей массы ***A*** равно 0,803 *AB*.



Движение системы массивных тел с легким спутником, помещенным во внешнюю коллинеарную точку либрации, показано на левой стороне этого рисунка (в системе отсчета центра масс). Суммарная сила притяжения к телам ***A*** и ***B*** сообщает спутнику ускорение, необходимое для движения по круговой орбите с той же угловой скоростью, с которой происходит взаимное обращение тел ***A*** и ***B***.

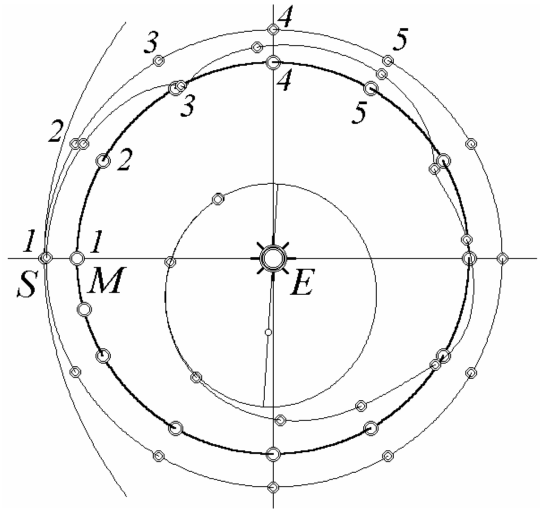
Круговое движение спутника в этой коллинеарной точке либрации с точки зрения системы отсчета более массивного тела ***A*** показано на правой стороне рисунка. Оскулирующие эллипсы, касающиеся круговой орбиты спутника в начальной точке и в последней точке моделирования – это траектории, по которым продолжалось бы движение спутника при внезапном исчезновении тела ***B*** в моменты, когда спутник проходит через эти точки.

На первый взгляд может показаться странным, что присутствие тела ***B***, которое создает дополнительную силу, направленную к центру, уменьшает центростремительное ускорение спутника вместо того, чтобы увеличивать его. Однако нужно иметь ввиду, что здесь движение отнесено к неинерциальной системе отсчета, связанной с телом ***A***. Поле тяготения, создаваемое телом ***B***, сообщает ускорение не только спутнику, но даже большее по величине ускорение оно сообщает телу ***A*** и тем самым всей системе отсчета, связанной с телом ***A***. Поэтому присутствие второго массивного тела ***B***, как ни странно, уменьшает (а не увеличивает) ускорение спутника в его движении относительно тела ***A***.

Для системы Земля – Луна расстояние внутренней точки либрации от Луны равно приблизительно 58 000 км, что составляет 0,15 среднего расстояния *AB* между Землей и Луной (384 000 км). Расстояние внешней точки либрации от Луны равно 65 000 км, или 0,17 *AB*. Третья коллинеарная точка лежит на противоположной (по отношению к Луне) стороне Земли. Ее расстояние от Земли равно 380 600 км, или 0,993 *AB*.

Движение спутника в любой из коллинеарных точек либрации, как и равновесие в этих точках во вращающейся системе отсчета, неустойчиво при любом соотношении масс тяжелых тел. Приведенный ниже рисунок иллюстрирует неустойчивость внешней точки. Показано движение в системе отсчета, связанной с телом большей массы ***E***. Начальное положение спутника выбрано вблизи внешней точки либрации. Если бы меньшего тела ***M*** не было, в поле тяготения тела ***E*** спутник двигался бы вдоль оскулирующего эллипса, касающегося действительной круговой орбиты в начальной точке ***S***. Дополнительная сила тяготения со стороны тела ***M*** заставляет спутник двигаться по круговой орбите.

Однако спутник движется в непосредственной близости к точке либрации (при данном начальном отклонении от точки либрации) лишь на протяжении приблизительно одного оборота. В начале второго витка он уходит из окрестности точки либрации и становится спутником тела ***M***. Его орбитальное движение вокруг ***M*** испытывает сильные возмущения со стороны тела ***E***. После совершения нескольких витков по орбите вокруг ***M*** гравитационное поле тела ***E*** вырывает спутник из «объятий» тела ***M***, и он становится спутником тела ***E***. Его почти замкнутая орбита вокруг ***E*** в свою очередь испытывает сильные возмущения со стороны тела ***M***.

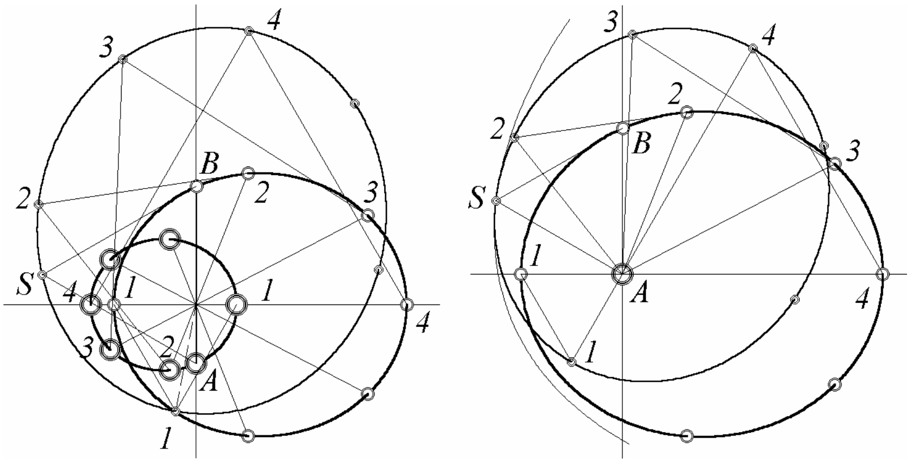


Внешняя коллинеарная точка либрации

Точки либрации и эллиптические движения

Точные частные решения задачи трех тел могут описывать не только круговые движения, как в рассмотренных выше примерах. Когда два массивных тела движутся вокруг центра масс, синхронно описывая геометрически подобные эллиптические орбиты, третье тело пренебрежимо малой массы, будучи помещенным в одну из пяти лагранжевых точек либрации, тоже может двигаться по замкнутой эллиптической орбите синхронно с массивными телами, если только сообщить ему необходимую для этого начальную скорость. Во время таких периодических движений расстояния между телами системы подвержены периодическим вариациям. Все три тела при этом описывают геометрически подобные эллиптические орбиты с общим фокусом в центре масс системы. Программа «Планета со спутником» позволяет наблюдать моделирование таких необычных движений.

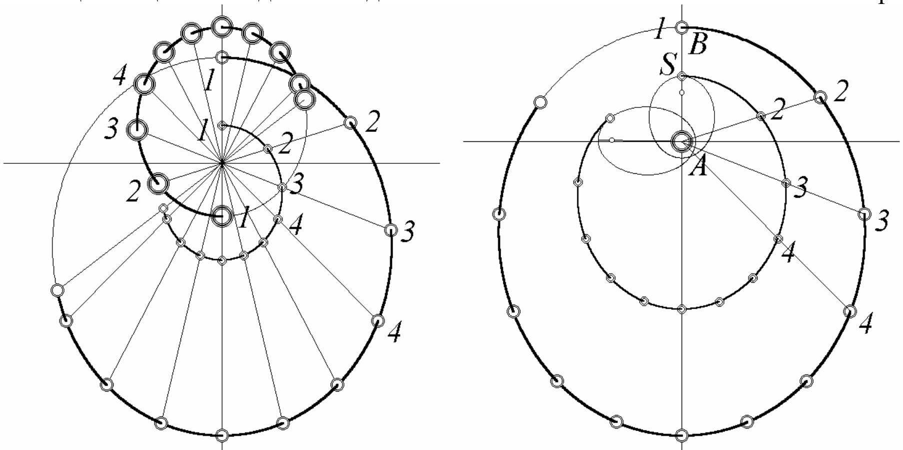
На приведенном рисунке показаны периодические движения трех тел, описываемые точным частным решением, в котором спутник ***S*** находится в вершине равностороннего треугольника ***ABS***, основание которого образовано отрезком ***AB***, соединяющим массивные тела ***A*** и ***B***. Левая часть рисунка соответствует инерциальной системе отсчета центра масс, в которой все три тела системы синхронно описывают геометрически подобные эллиптические орбиты. Правая часть показывает движения спутника ***S*** и тела ***B*** в (неинерциальной) системе отсчета, связанной с наиболее массивным телом ***A***.



Такая равносторонняя конфигурация системы сохраняется во время движения, т.е. спутник все время находится в треугольной точке либрации системы тел ***A*** и ***B***. Однако, в противоположность случаю круговых движений, на этот раз образованный телами треугольник вращается неравномерно вместе с отрезком ***AB***, соединяющим тела ***A*** и ***B***. Поведение тел ***A*** и ***B*** и этого отрезка описывается хорошо известным решением задачи двух тел. Действительно, третье тело пренебрежимо малой массы не оказывает никакого влияния на движение двух массивных тел. Поэтому и здесь стороны образованного тремя телами равностороннего треугольника периодически изменяются, как это происходит с расстоянием между телами в задаче двух тел. Большая ось эллиптической орбиты спутника образует некоторый угол с большими осями эллипсов, по которым движутся тела ***A*** и ***B***. Все три тела одновременно проходят через соответствующие точки своих эллиптических орбит. В точках, соответствующих началу моделирования (помеченных как ***A***, ***B*** и ***S*** на рисунке), тела находятся на кратчайших расстояниях от центра масс системы, а их угловая скорость (одинаковая для всех тел) наибольшая. Когда тела проходят через наиболее удаленные точки своих орбит, стороны образуемого ими треугольника имеют максимальную длину, а угловая скорость его вращения минимальна.

В системе отсчета, связанной с телом ***A*** (правая часть рисунка), тело ***B*** и спутник ***S*** движутся по конгруэнтным эллипсам вокруг тела ***A***. Большая ось эллипса, описываемого спутником ***S***, образует угол 60 градусов с большой осью эллипса, описываемого телом ***B***. Если бы тело ***B*** внезапно исчезло, спутник сошел бы со своей эллиптической орбиты и начиная с этого момента стал бы двигаться по более крупному оскулирующему эллипсу.

Движение, описываемое рассмотренным точным частным решением, неустойчиво. Спутник движется некоторое время в окрестности треугольной точки либрации (продолжительность этого регулярного движения зависит от той точности, с которой были введены необходимые для моделирования начальные условия), а затем начинает беспорядочно обращаться вокруг одного из массивных тел. Это движение спутника сильно возмущается другим телом. В конце концов он падает на одно из массивных тел или оказывается выброшенным из системы.



Движение спутника во внутренней коллинеарной точке либрации

Движение спутника во внутренней лагранжевой точке либрации, когда в своем орбитальном движении массивные тела описывают эллиптические траектории, показано на приведенном здесь рисунке. В этом движении легкий спутник все время остается между массивными телами на соединяющем их отрезке. Этот отрезок неравномерно вращается, когда массивные тела движутся по своим эллиптическим орбитам, как в задаче двух тел. Положение спутника делит отрезок на две части в постоянном отношении, поэтому спутник движется по эллипсу, геометрически подобному эллипсам, описываемым массивными телами.

Положение внутренней точки либрации между массивными телами зависит от масс тел точно так же, как и для круговой задачи. Например, для системы, в которой масса тела ***A*** ровно вдвое превышает массу тела ***B***, внутренняя точка либрации смещена из центра масс системы по направлению к легкому телу ***B*** приблизительно на 0,237 расстояния *AB* между телами. Ее расстояние от более легкого тела ***B*** равно приблизительно 0,43 *AB*, а расстояние *SA* от наиболее массивного тела ***A*** равно 0,57 *AB*.

С точки зрения наблюдателя, находящегося на теле наибольшей массы ***A*** (см. правую часть рисунка), небесное тело меньшей массы ***B***, двигаясь вокруг тела ***A*** по эллиптической орбите, находится в состоянии перманентного затмения спутником ***S***, поскольку видимое положение спутника ***S*** всегда совпадает с положением тела ***B***. Небольшие эллипсы на левой части рисунка показывают оскулирующие орбиты, по которым спутник стал бы двигаться вокруг тела ***A***, если бы тело ***B*** внезапно исчезло. Первый эллипс соответствует начальному моменту, второй – конечному моменту моделирования.

Движение спутника в любой из коллинеарных точек либрации всегда неустойчиво. Спутник движется некоторое время в окрестности точки либрации (продолжительность этого регулярного движения зависит от той точности, с которой были введены необходимые для моделирования начальные условия), а затем регулярное движение неизбежно переходит в хаотическое, при котором спутник начинает беспорядочно обращаться вокруг одного из массивных тел. Это движение спутника сильно возмущается другим телом. В конце концов он падает на одно из массивных тел или оказывается выброшенным из системы.

Двойная звезда с планетой

Моделирующая программа «Двойная звезда с планетой» аналогична программе «Планета со спутником», обсуждавшейся в предыдущих разделах. Обе программы имеют дело с ограниченной задачей трех тел, в которой рассматривается движение тела пренебрежимо малой массы под действием сил тяготения двух массивных тел, обращающихся одно вокруг другого по окружностям либо кеплеровым эллипсам. Как уже отмечалось, эти ситуации (спутник планеты, обращающейся вокруг звезды и планета в системе двойной звезды) различаются скорее количественно чем качественно. Поэтому моделирование спутника массивной планеты, которая обращается вокруг звезды, может рассматриваться и как моделирование внутренней планеты, которая обращается вокруг одной из компонент двойной звезды. Однако метод задания параметров системы и начальных условий, предлагаемый в программе «Двойная звезда с планетой», более удобен для моделирования внешней планеты, т.е. планеты, обращающейся по орбите, охватывающей обе звезды.

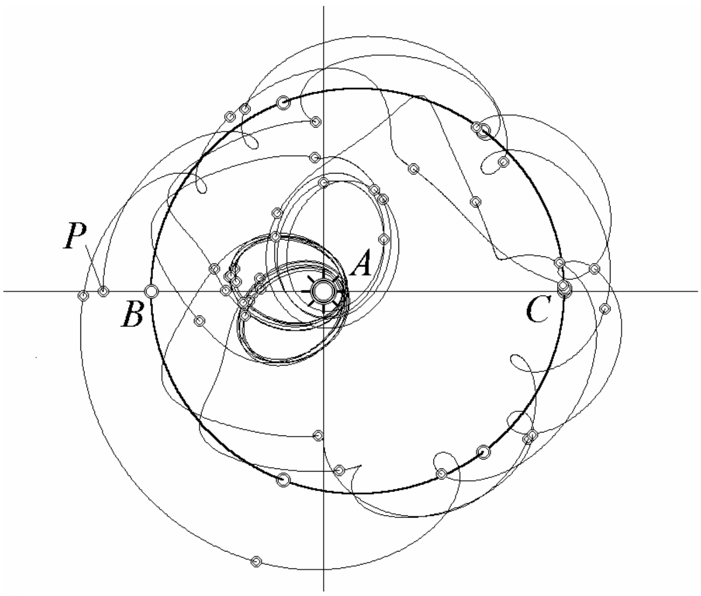
Чтобы моделировать орбитальное движение планеты, сначала нужно ввести параметры системы и начальные условия с помощью панели «Ввод параметров», которая открывается выбором соответствующего пункта меню. Сначала вводятся отношение масс компонент двойной звезды и начальная скорость, определяющая их относительное движение. Эта скорость по условию направлена трансверсально (т.е. перпендикулярно линии, соединяющей центры звезд). Поэтому нужно ввести лишь величину относительной скорости в единицах круговой скорости (т.е. скорости, при которой относительное движение звезд и их движения в системе центра масс будут происходить по окружностям).

Затем нужно ввести начальное положение и скорость планеты. Для этого можно выбрать одну из двух систем отсчета: либо связанную с одной из звезд (любой из них), либо инерциальную систему отсчета, связанную с центром масс. Система центра масс удобна для моделирования внешней планеты, орбита которой охватывает обе звезды. Для выбора системы отсчета на панели ввода имеется специальная кнопка.

Начальное положение планеты задается указанием ее расстояния от соответствующей звезды (или от центра масс системы, если выбрана система отсчета центра масс) в единицах расстояния между звездами, и указанием угла, образуемого радиусом-вектором планеты, проведенным из соответствующей звезды (или из центра масс), с прямой, соединяющей звезды.

Начальная скорость планеты указывается аналогичным образом. Сначала нужно ввести ее величину. Когда используется система отсчета, связанная с одной из звезд, начальная скорость планеты должна быть выражена в единицах невозмущенной круговой скорости планеты при ее движении вокруг соответствующей звезды (т.е. в единицах скорости, с которой планета обращалась бы по круговой орбите вокруг этой звезды в отсутствие гравитационного притяжения другой звездой). Такие единицы скорости удобны при моделировании внутренней планеты, обращающейся вокруг одной из звезд. Если же выбрана система отсчета центра масс, то величина начальной скорости планеты должна быть выражена в единицах круговой скорости, с которой происходило бы обращение планеты вокруг центра масс системы в предположении, что массы обеих звезд сосредоточены в этом центре. Затем нужно указать угол между направлением начальной скорости и радиусом-вектором планеты (проведенным из соответствующей звезды либо из центра масс системы).

Поведение планеты в системе двойной звезды может быть очень сложным. На рисунке приведен пример нерегулярной петлеобразной траектории, описываемой планетой ***P*** в системе отсчета одной из звезд. Первоначально планета беспорядочно обращается вокруг меньшей из звезд ***B***, которая движется вокруг большей звезды ***A*** по эллиптической кеплеровой орбите. Затем звезда ***A*** захватывает планету, и она в течение некоторого времени обращается вокруг ***A*** по небольшой почти эллиптической орбите. Совершив в одиночестве один оборот вокруг звезды ***A***, меньшая звезда ***B*** перехватывает планету на свою орбиту, и в течение следующего витка ***B*** вокруг ***A*** планета обращается вокруг своего прежнего «хозяина» по небольшой орбите, следуя за ним в его орбитальном движении вокруг ***A***.

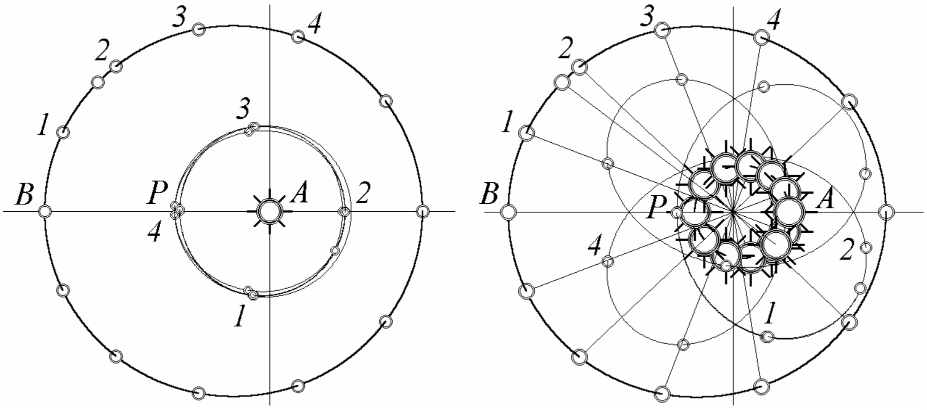


Поочередное обращение планеты вокруг звезд ***A*** и ***B***

В приведенном здесь примере моделирования переходы планеты от обращения вокруг одной из звезд к другой происходят несколько раз. Такое нерегулярное, хаотическое движение планеты заканчивается падением на одну из звезд. Долговременное поведение моделируемой системы очень чувствительно к начальным условиям. При слегка измененных начальных условиях планета может закончить свое существование падением на другую звезду, либо может быть выброшена из системы. Во включенном в программу списке моделирующих экспериментов можно найти множество других примеров нерегулярного поведения планеты в системе двойной звезды.

Но наряду с таким хаотическим поведением планета в системе двойной звезды может двигаться регулярным образом по стационарной орбите. Низкие, почти круговые орбиты вокруг одной из звезд вполне устойчивы. Низкие внутренние орбиты лишь слегка возмущаются другой звездой, и движение планеты по ним может продолжаться неопределенно долго. Петлеобразная траектория планеты в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс, образуется в результате сложения регулярного, почти кеплерова движения вокруг звезды-хозяина и строго регулярного движения «хозяина» вокруг центра масс всей системы. Такая ситуация вполне аналогична рассмотренным ранее примерам ограниченной задачи трех тел, в которых спутник (Луна) обращается вокруг планеты (Земли), обращающейся в свою очередь вокруг звезды (Солнца). Но большие орбиты внутренних планет в системе двойной звезды испытывают сильные возмущения со стороны другой звезды.

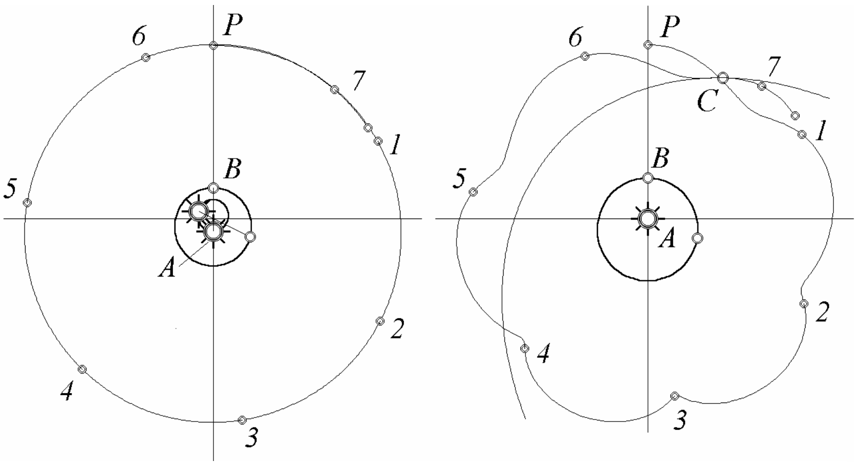
После всего, что было сказано выше, может показаться удивительной возможность для внутренней планеты в системе двойной звезды двигаться по большой, регулярной периодической орбите, которую никоим образом нельзя рассматривать без учета возмущений со стороны второй звезды. Приведенный здесь рисунок показывает пример внутренней планеты ***P***, движущейся (против часовой стрелки) вокруг звезды ***A*** большей массы по сравнительно большой орбите, размеры которой достигают почти половины орбиты относительного движения звезд (происходящего по часовой стрелке). В системе отсчета, связанной со звездой ***A*** (левая часть рисунка), планета совершает ровно три оборота вокруг ***A*** на протяжении одного оборота относительного движения звезд. Несмотря на сильные возмущения со стороны второй звезды, орбита планеты все же замыкается после трех оборотов. В момент, когда звезда меньшей массы ***B*** завершает свой оборот, планета возвращается в исходную точку пространства и имеет там такую же скорость, как и в начале моделирования. Начальное состояние системы воспроизводится, т.е. ее движение периодическое.



Замкнутая орбита внутренней планеты

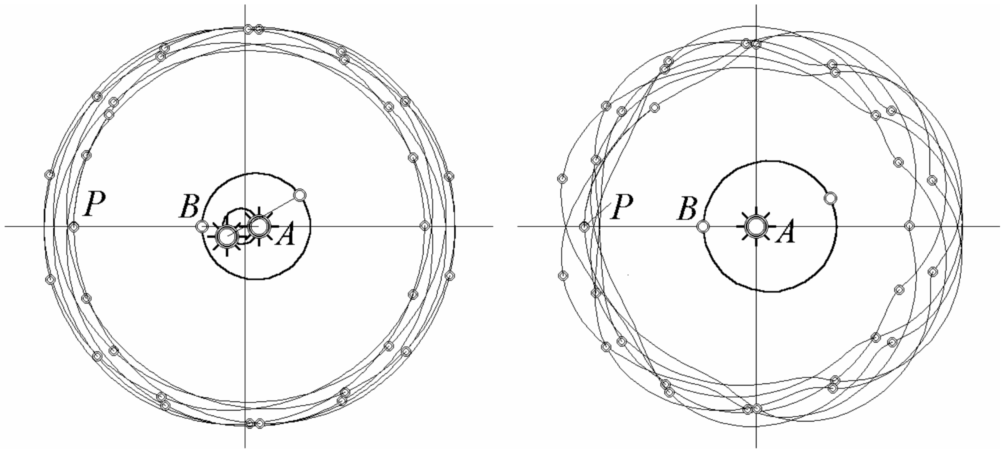
В инерциальной системе отсчета центра масс (правая часть рисунка) это регулярное движение системы представляется еще более своеобразным. Замкнутая траектория планеты похожа на контур красивого цветка. Все его четыре лепестка планета обходит за один период взаимного обращения звезд.

Движение планеты по внешней орбите, охватывающей обе звезды, также может быть устойчивым. Если размеры орбиты много больше расстояния между компонентами двойной звезды, в системе отсчета центра масс орбита может быть почти эллиптической (или почти круговой) и практически замкнутой. На приведенном здесь рисунке показан пример такой орбиты, охватывающей сразу обе звезды, которые движутся по эллиптическим орбитам вокруг общего центра масс. Хотя в общем случае период обращения планеты несоизмерим с периодом взаимного обращения компонент двойной звезды, движение внешней планеты вполне устойчиво и может продолжаться неопределенно долго. Правая часть рисунка показывает это движение в системе отсчета более массивной звезды ***A***. Волнообразная форма траектории планеты в этой системе отсчета объясняется периодическим движением звезды ***A*** (т.е. выбранной системы отсчета, а не самой планеты) по небольшому (в масштабах орбиты планеты) эллипсу относительно центра масс.



Внешняя планета, обращающаяся вокруг двойной звезды.

Для внешних планет, обращающихся вокруг двойной звезды, периодическое движение по замкнутой орбите также возможно. Следующий рисунок показывает удивительный пример такого движения. В начальный момент моделирования звезды ***A*** и ***B*** находятся в перицентрах эллиптических орбит, по которым они обращаются вокруг общего центра масс. Начальное положение планеты выбрано на одной линии со звездами, и начальная скорость планеты перпендикулярна этой линии. В этом примере внешнюю орбиту, охватывающую обе звезды, нельзя считать большой по сравнению с расстоянием между звездами.



Маленькие кружки на траектории планеты фиксируют ее положение через каждую половину оборота и каждый целый оборот звезд, когда звезды снова оказываются с начальной конфигурации. Отдельные витки траектории планеты не замыкаются, поскольку под действием сил притяжения двумя движущимися центрами ее движение не будет кеплеровым. Тем не менее, после семи оборотов вокруг звезд планета ***P*** оказывается в начальной точке и имеет там ту же скорость, что и в начале моделирования, и ее траектория замыкается. Самое удивительное, что в этот момент звезды тоже оказываются в тех же положениях, что и в начале. За то время, пока планета совершает семь оборотов вокруг двойной звезды, компоненты звезды совершают ровно тридцать взаимных оборотов, и начальное состояние системы воспроизводится. Правая часть рисунка показывает волнообразную замкнутую траекторию планеты в системе отсчета, связанной с более массивной компонентой ***A*** двойной звезды.

Когда компоненты двойной звезды имеют равные массы, существует простое точное решение: если планета находится ровно посередине между звездами (и центре масс системы) и ее скорость в системе центра масс равна нулю, планета остается там и дальше, в то время как звезды синхронно движутся по конгруэнтным эллиптическим орбитам с общим фокусом в центре масс системы (или движутся по общей круговой орбите, находясь на противоположных концах диаметра орбиты). Это точное решение соответствует неустойчивому движению: если массы звезд не точно равны, или симметричные начальные условия чуть нарушены, какое-то время планета остается в окрестности центра масс, но затем покидает эту точку и начинает беспорядочно обращаться вокруг одной из звезд.

Точные частные решения задачи трех тел (например, планета в системе двойной звезды) существуют также для систем, в которых тяжелые компоненты имеют неравные массы. Пять типов таких решений связаны с точками Лагранжа. Если планета находится в одной из точек Лагранжа и имеет определенную начальную скорость, все три тела системы движутся синхронно по геометрически подобным эллипсам, так что при движении конфигурация системы остается подобной начальной конфигурации. Три из этих решений характеризуются коллинеарным расположением трех тел. В одном из них планета находится между компонентами двойной звезды (во внутренней точке Лагранжа). Рассмотренное выше точное решение представляет собой частный случай внутренней коллинеарной точки Лагранжа для двойной звезды с одинаковыми массами компонент. Две другие коллинеарные точки Лагранжа расположены с внешних сторон отрезка, соединяющего звезды. Точные частные решения двух других типов характеризуются треугольным равносторонним расположением трех тел.