КОЛЛЕКЦИЯ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ В СИСТЕМАХ МНОГИХ ТЕЛ

Е.И.Бутиков

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: butikov@spb.runnet.ru, Web: http://www.ifmo.ru/butikov

Движения планет и других небесных тел дают наиболее убедительные наблюдательные подтверждения законам классической ньютоновской механики. В этой замечательной небесной лаборатории все явления наблюдаются в наиболее чистом виде, не осложненные побочными факторами вроде трения и сопротивления воздуха, неизбежными в обычной земной лаборатории.

Дифференциальные уравнения, описывающие движение тела в центральном поле тяготения с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния (планета, обращающаяся вокруг звезды, спутник, обращающийся вокруг планеты), имеют точное аналитическое решение (*задача Кеплера*). Отличительной чертой кеплерова движения является замечательная математическая простота возможных траекторий. Любое движение в центральном ньютоновом поле тяготения происходит по одному из *конических сечений* – кривых, образованных пересечением кругового конуса плоскостью. Точные аналитические решения существуют также для движений двух небесных тел под действием взаимных сил гравитационного притяжения – математически такая *задача двух тел* сводится к задаче о движении одного тела в центральном поле тяготения, создаваемом некоторым неподвижным точечным источником.

Самые замечательные явления небесной механики обнаруживаются в движениях систем трех и большего числа тел, связанных гравитационным взаимодействием. Когда к системе двух тел добавляется третье тело, мы имеем дело с *задачей трех тел*, которая в общем случае не имеет точного аналитического решения, т.е. не существует общих формул, которые давали бы возможность рассчитать положения и скорости движущихся тел при произвольных начальных условиях. Можно думать, что отсутствие общих аналитических решений обусловлено не слабостью математики, а скорее сложностью самих возможных движений.

Некоторые примеры сложных движений в системах трех тел можно найти в разработанной нами коллекции Java-апплетов (см. сайт www.ifmo.ru/butikov/Projects/CollectionR.html). Эти примеры иллюстрируют удивительные траектории небесных тел, порой бросающие вызов нашей физической интуиции. Однако среди великого множества разнообразных чрезвычайно сложных движений существует несколько видов очень простых регулярных движений. Некоторые из них также включены в данную коллекцию.

Коллекция замечательных движений в системе трех тел состоит из следующих разделов:

1. Ограниченная задача трех тел (спутник двойной планеты)
2. Примеры ограниченной задачи трех тел (в двух системах отсчета)
3. Плоское периодическое движение трех одинаковых тел по «восьмерке»
4. Периодическое движение трех одинаковых тел по «восьмерке» (в двух системах отсчета)
5. Вариации на тему плоского движения по «восьмерке»
6. Движения трех тел в равносторонней конфигурации
7. Плоские регулярные движения четырех тел одинаковой массы

Задачу трех тел называют *ограниченной*, если масса оного из тел много меньше масс двух других тел. В этом случае можно пренебречь влиянием легкого тела на движения массивных тел. Это значит, что массивные тела синхронно описывают геометрически подобные конические сечения в точности так, как это происходит в системе двух тел. Однако движение третьего (легкого) тела под действием сил тяготения двух массивных тел может быть чрезвычайно сложным несмотря на то, что движение последних происходит по сравнительно простым известным траекториям. В первом разделе коллекции приведено несколько примеров движения спутника (тела пренебрежимо малой массы) в системе двойной планеты, подобной системе Земля – Луна, но с иными (произвольными) массами компонент. Программа может отображать движение небесных тел либо в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс системы тел, либо в «геоцентрической» системе, т. е. системе, связанной с телом наибольшей массы. Размеры небесных тел на изображении сильно преувеличены (по сравнению с расстояниями между телами). При определенных условиях спутник в системе двойной планеты может время от времени менять своего «хозяина». Пример такого движения показан на рис. 1. Этот «комический баскетбол» может закончиться падением спутника на планету либо на «Луну», либо выбрасыванием спутника из системы.

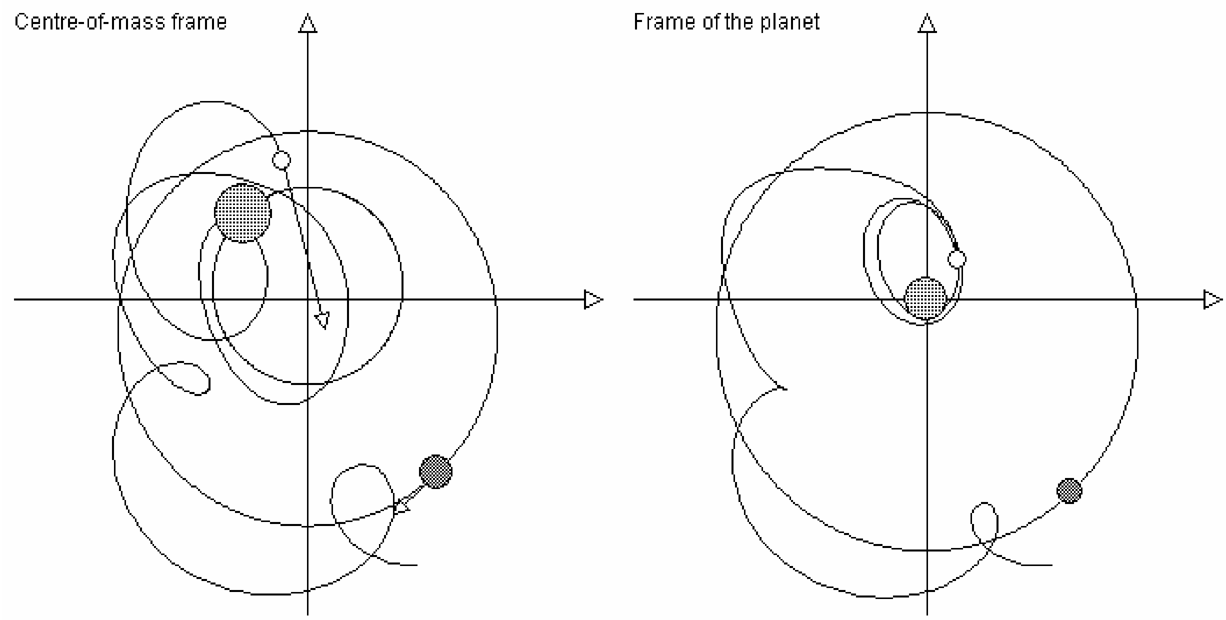

Рис. 1. Пример сложного движения в ограниченной задаче трех тел. Легкий спутник поочередно обращается вокруг каждой из компонент двойной планеты. Массивные тела синхронно совершают регулярные движения по кеплеровым эллипсам.

Три тела одинаковой массы, связанные гравитационным взаимодействием, могут совершать удивительно простое плоское периодическое движение, гоняясь друг за другом по высоко симметричной замкнутой траектории, имеющей вид цифры 8, как показано на рис. 2. Такое динамически устойчивое движение по-видимому впервые было упомянуто в статье C. Moore “*Braids in Classical Dynamics*,” Phys. Rev. Lett. **70**, 3675 – 3679, 1993, и недавно было описано детально в статье A. Chenciner and R. Montgomery “*A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses*” (см. в сети http://orca.ucsc.edu/~rmont/annals.pdf).

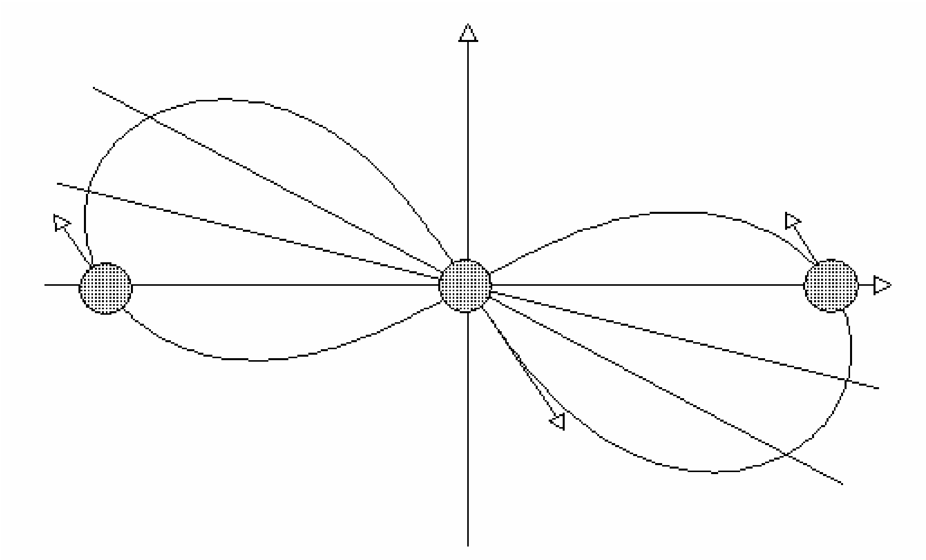

Рис. 2. Устойчивое регулярное движение трех тел одинаковой массы по траектории в виде цифры 8.

Для данного движения характерны нулевое значение полного момента импульса, и чрезвычайно богатый набор элементов симметрии. Тела начинают движение, находясь в коллинеарной конфигурации на равных расстояниях друг от друга, и возвращаются в точно такую же конфигурацию через некоторый интервал времени T, на протяжении которого каждое тело описывает целиком одну и ту же замкнутую восьмерку. Через интервал $T/3$ (треть полного периода) тела опять оказываются на той же прямой, что и в начальной коллинеарной конфигурации, но располагаются в ином порядке. Еще одна прямая линия, на которой три тела оказываются одновременно через интервал времени $T/6$ после начальной коллинеарной конфигурации, расположена симметрично начальной конфигурации (относительно оси восьмерки). В промежутке между этими коллинеарными конфигурациями (через $T/12$) тела образуют равнобедренный треугольник.

Три тела под действием взаимных гравитационных сил могут совершать синхронно поразительно простые (кеплеровы) движения. Простейший пример такого движения можно наблюдать, когда три тела одинаковой массы синхронно движутся по общей круговой траектории, находясь на равных расстояниях друг от друга. Образованный телами равносторонний треугольник равномерно вращается вокруг своего центра подобно твердому телу, оставаясь вписанным в эту круговую траекторию. Возможность такого движения легко понять, опираясь на соображения симметрии. Если же начальные скорости трех одинаковых тел в равносторонней конфигурации имеют одинаковую величину, но отличающуюся от круговой скорости, тела синхронно описывают равные эллипсы, большие оси которых образуют одна с другой углы по 120 градусов. В этом случае образуемый телами равносторонний треугольник вращается вокруг своего центра неравномерно, и длины его сторон периодически изменяются со временем. Это движение иллюстрирует левая часть рис. 3.

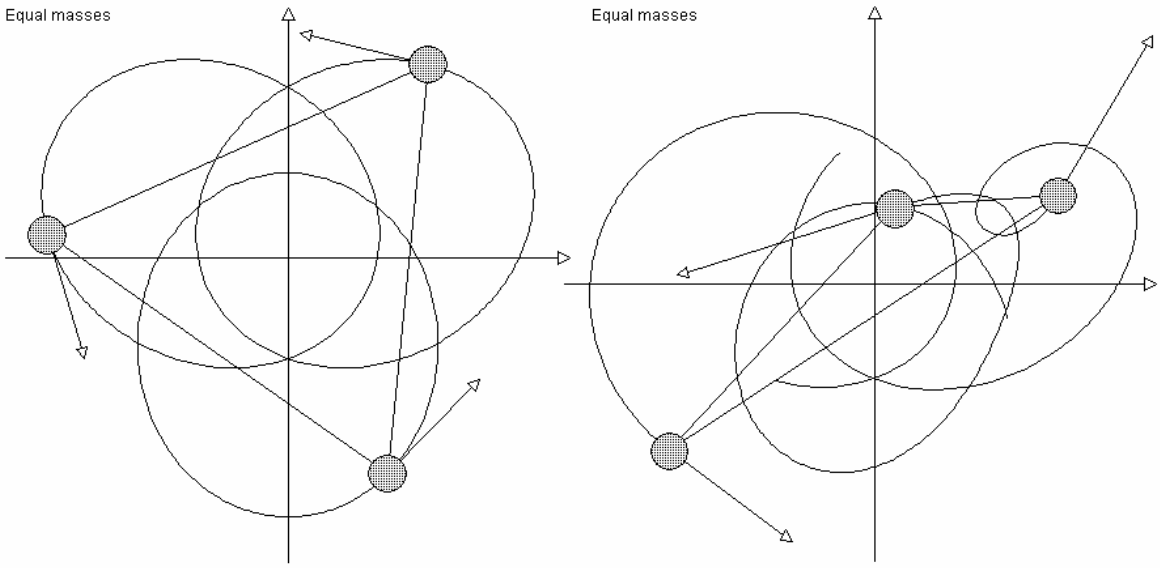

Рис. 3. Эллиптические траектории трех одинаковых тел в равносторонней конфигурации (слева) и неустойчивость таких движений, развивающаяся при малом нарушении симметрии системы.

Нетрудно понять, почему столь простые движения могут происходить в системе трех тел, поведение которой в общем случае оказывается чрезвычайно сложным и не может быть описано аналитическим решением уравнений движения. Когда три тела одинаковой массы расположены в вершинах равностороннего треугольника, действующая на каждое из тел результирующая сила тяготения двух других тел направлена к центру этого треугольника. Величина этой силы обратно пропорциональна квадрату расстояния тела от центра треугольника. Это значит, что тело может вести себя так, как если бы оно находилось в центральном гравитационном поле, создаваемом единственным неподвижным источником, находящимся в центре треугольника, а не двумя другими движущимися телами. То же самое справедливо для каждого из трех тел до тех пор, пока во время их движения сохраняется равносторонняя конфигурация. Таким образом, три одинаковых тела в равносторонней конфигурации могут синхронно двигаться по одинаковым коническим сечениям. В частности, они могут двигаться по общей круговой орбите, описанной вокруг образуемого телами треугольника.

Движения в равносторонней конфигурации неустойчивы по отношению к сколь угодно малым возмущениям положений и скоростей тел, если эти возмущения нарушают симметрию системы. Справа на рис. 3 приведен пример, в котором начальная скорость одного из тел немного отличается от скоростей двух других тел. Это крошечное нарушение симметрии через некоторое время приводит к искажению системы, нарастающему со временем. Движения тел становятся хаотическими. Но если скорости всех трех тел в некоторый момент одновременно изменить на противоположные, система вернется к исходной (почти равносторонней) конфигурации.

Замечательно, что три тела с *различными* массами тоже могут совершать синхронные движения в равносторонней конфигурации по концентрическим круговым траекториям. В данном случае образуемый телами равносторонний треугольник равномерно вращается как целое вокруг *центра масс* системы. Такое движение показано в левой части рис. 4. Правая часть этого рисунка иллюстрирует неустойчивость круговых движений в равносторонней конфигурации.

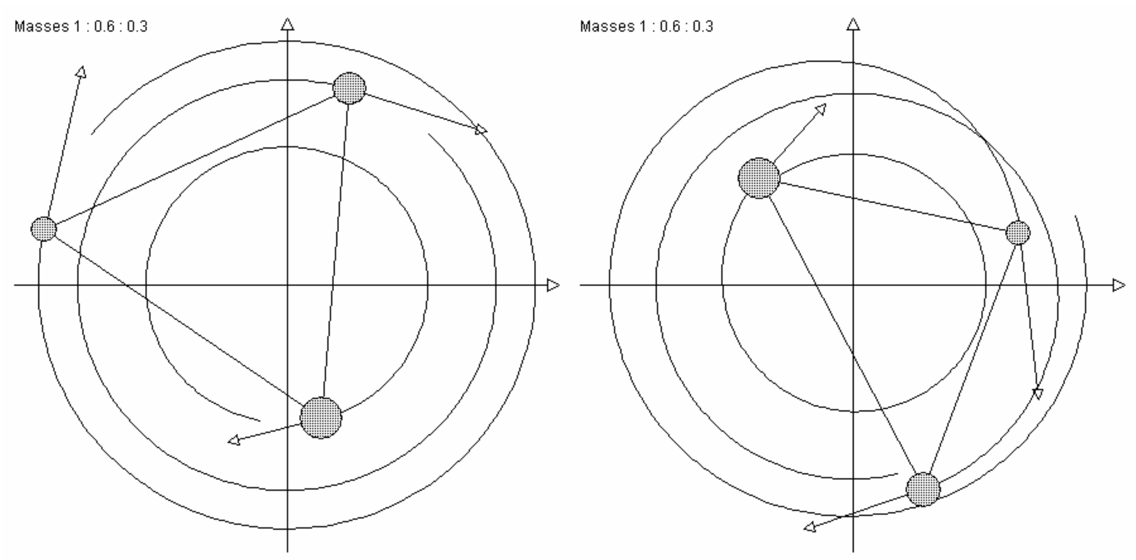

Рис. 4. Круговые движения трех тел разных масс в равносторонней конфигурации (слева) и иллюстрация неустойчивости таких движений (справа).

Три тела с различными массами в равносторонней конфигурации могут синхронно двигаться под действием сил взаимного тяготения не только по концентрическим окружностям, но и по геометрически подобным коническим сечениям, в частности, по эллипсам (рис. 5). В данном случае образуемый телами равносторонний треугольник вращается вокруг центра масс системы трех тел неравномерно, и длины его сторон периодически изменяются со временем.

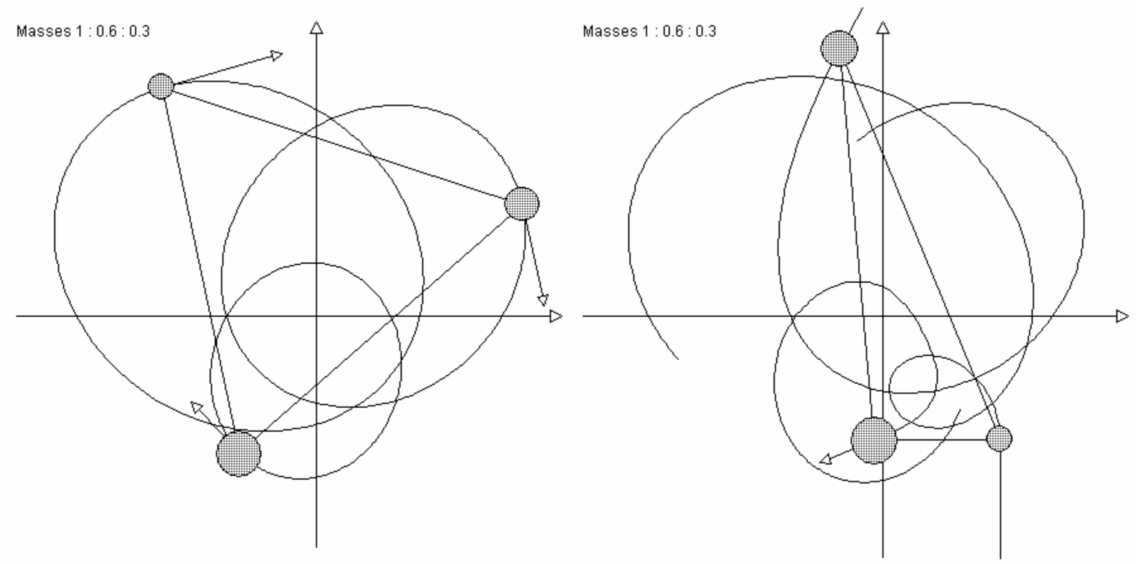

Рис. 5. Эллиптические движения трех тел разных масс в равносторонней конфигурации (слева) и иллюстрация неустойчивости таких движений (справа).

Равносторонняя конфигурация может сохраняться во время движения даже для тел различной массы потому, что в такой конфигурации результирующая гравитационная сила, действующая на каждое из тел со стороны двух других тел, направлена к центру масс системы и обратно пропорциональна квадрату расстояния данного тела от центра масс. Другими словами, можно считать, что каждое из тел движется в некотором эффективном центральном гравитационном поле, источник которого расположен в *неподвижном* центре масс системы, несмотря на то, что на самом деле это поле создается двумя *движущимися* телами. Поэтому тела могут двигаться синхронно по трем геометрически подобным кеплеровым эллипсам (коническим сечениям) с общим фокусом в центре масс системы. Строгое доказательство можно найти в статье автора "*Regular Keplerian Motions in Classical Many-Body Systems*," European Journal of Physics, v. **21**, pp. 465 – 482, 2000.

В случае системы произвольного числа n взаимно тяготеющих одинаковых тел также возможны регулярные кеплеровы движения. Для этого тела должны сохранять при движении симметричную конфигурацию, находясь в вершинах правильного n-угольника. В такой конфигурации результирующая всех сил тяготения, действующая на каждое из тел, направлена к геометрическому центру многоугольника, образуемого телами, а ее величина обратно пропорциональна квадрату расстояния тела от этого центра. Это означает, что движение каждого из тел может происходить так, как если бы на него действовала сила тяготения, создаваемая единственным *неподвижным* точечным источником, расположенным в центре многоугольника, а не силы тяготения всех остальных *движущихся* тел. Так будет для каждого из n тел при условии, что их равносторонняя конфигурация сохраняется при движении. Поэтому тела могут синхронно двигаться по конгруэнтным (равным) коническим сечениям. В частности, они могут двигаться вдоль общей окружности, описанной вокруг правильного многоугольника, в вершинах которого расположены тела. В таком случае этот многоугольник равномерно вращается вокруг своего центра.

Если начальные скорости тел, будучи равными по величине (и направленными перпендикулярно радиусам-векторам тел, проведенным из центра масс) отличаются от значения, обеспечивающего круговое движение системы, тела движутся синхронно по конгруэнтным эллиптическим орбитам. Рис. 6 иллюстрирует возможные регулярные эллиптические движения в системе четырех одинаковых тел.

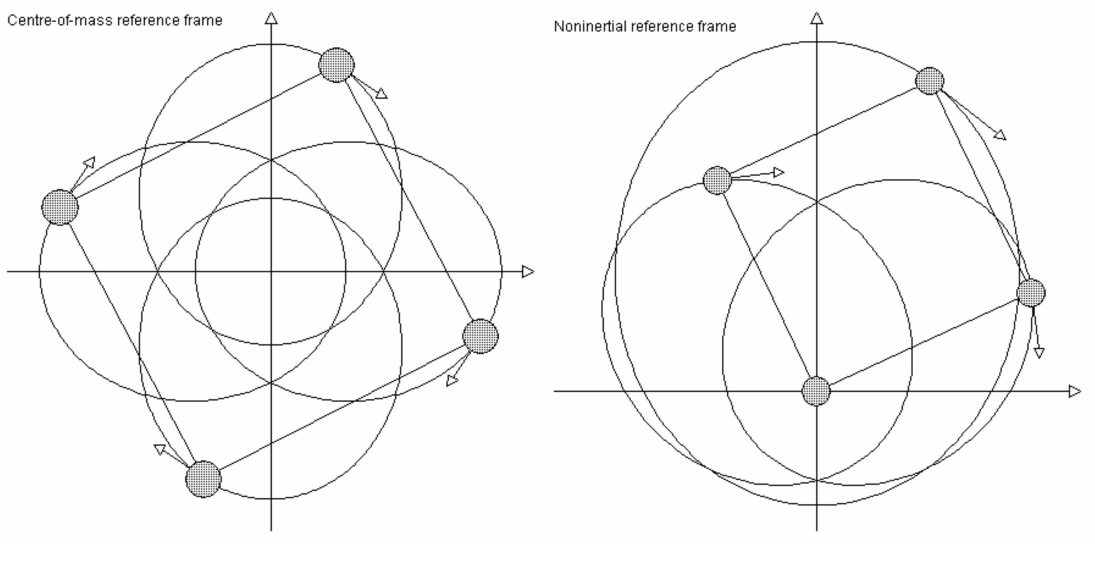

Рис. 6. Кеплеровы движения четырех одинаковых тел в симметричной равносторонней конфигурации. Слева показаны орбиты тел в системе центра масс, справа – в системе отсчета одного из тел.

Большие оси соседних эллипсов образуют углы по 90 градусов одна с другой. В данном случае квадрат, в вершинах которого находятся тела, вращается вокруг своего центра неравномерно, и длины его сторон периодически изменяются. Правая часть рис. 6 показывает эти же движения в неинерциальной системе отсчета, связанной с одним из тел.

В отличие от системы трех тел, кеплеровы движения в системе четырех и более тел невозможны, если массы тел неодинаковы. Исключение составляет лишь тривиальный случай «хоровода» одинаковых планет вокруг центрального светила, когда n одинаковых тел при движении расположены в вершинах правильного n-угольника, а еще одно тело произвольной массы покоится в центре этого многоугольника.