

Компьютерное моделирование необычных движений обычного маятника

Санкт-Петербургский государственный университет

Если задаться вопросом, какой физический прибор оставил наиболее глубокий след в истории физики, скорее всего первая мысль будет о маятнике. Начиная с опытов Галилея в 16 веке и вплоть до наших дней маятник используется в разнообразных приборах для измерения времени и напряженности гравитационного поля, и, что не менее важно, служит пробным камнем для многих физических теорий. Эта знаменитая механическая система интересна и полезна не только сама по себе как наиболее знакомый пример нелинейного механического осциллятора, но главным образом потому, что многие задачи в разных областях современной физики приводятся к дифференциальному уравнению, описывающему движение маятника. Механические аналоги физических систем допускают прямую визуализацию движения и этим очень полезны для формирования интуитивных представлений о сложных явлениях. Детально разобравшись с поведением механической системы и используя аналогию между колебательными системами разной физической природы, можно значительно продвинуться в понимании разнообразных электромагнитных и оптических нелинейных явлений (скажем, таких как эффекты Джозефсона в слабой сверхпроводимости или процессы генерации лазеров), где все далеко не так наглядно, хотя системы изоморфны, т.е. описываются сходными дифференциальными уравнениями.

Традиционно в существующих учебных курсах имеется значительный перекос в сторону изучения линейных систем, для которых возможны аналитические решения, а вопросам поведения нелинейных систем уделяется недостаточное внимание. В значительной мере такое положение объясняется тем, что существующие аналитические методы исследования нелинейных колебательных систем слишком сложны, и при этом не в состоянии описать наблюдаемое в эксперименте разнообразие их поведения. Реакция нелинейных систем на гармоническое воздействие не является синусоидальной, и относительно этой реакции в общем случае невозможно сформулировать какие-либо универсальные утверждения. Отклик нелинейной системы зачастую неоднозначен (установившееся движение может иметь разный характер в зависимости от начального состояния), а его спектр может содержать субгармонические частоты, выражаемые рациональной дробью частоты вынуждающего воздействия. В некоторых случаях отклик нелинейной системы на регулярное воздействие может быть хаотическим, а малое изменение частоты или амплитуды воздействия может привести к качественному изменению отклика системы. Контраст с поведением линейных систем поистине поразителен.

Использование компьютерного моделирования в учебном процессе позволяет до некоторой степени устранить отмеченный выше существующий перекос в преподавании физики колебаний.

В данном сообщении приводятся некоторые результаты моделирования необычных режимов колебаний и переверотов жесткого маятника в поле тяжести, подверженного воздействию синусоидального внешнего момента. Детальному изучению этой системы посвящено большое число публикаций (см., например, [1] и указанную там литературу). При медленном сканировании частоты внешнего воздействия маятник демонстрирует гистерезисное поведение: при прохождении через резонанс амплитуда установившихся колебаний изменяется скачкообразно, причем эти скачки («срывы» амплитуды) происходят при разных значениях частоты в зависимости от направления сканирования. Скачки на амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиках означают не просто «срыв» амплитуды и фазы колебаний, а фактически полную перестройку режима установившегося вынужденного движения маятника.

Рис. 1 дает представление о том, как разработанная нами моделирующая программа, входящая в состав пакета [2], демонстрирует поведение маятника при сканировании частоты внешнего воздействия. В левом верхнем и нижнем окнах экрана программа сначала строит аналитическую зависимость амплитуды и фазы установившихся колебаний на основе приближенной теории, учитывающей ангармонические члены в дифференциальном уравнении маятника. Такая теория, справедливая при умеренных амплитудах колебаний (см., например, [3]), предсказывает качественные изменения резонансной кривой системы при учете нелинейных членов. В частности, резонансный пик искривляется в соответствии с характером скелетной кривой, показывающей зависимость частоты собственных колебаний маятника от амплитуды. Когда амплитуда внешнего воздействия превосходит некоторое критическое значение, появляется определенная область частот, в которой каждому значению частоты соответствуют три значения амплитуды. Теория предсказывает неустойчивость режима со средним значением амплитуды. Поэтому при медленном увеличении частоты должен произойти «срыв» амплитуды (скачкообразное возрастание амплитуды с переходом на правый склон резонансной кривой), когда касательная к резонансной кривой становится вертикальной. Если затем сканировать частоту в обратном направлении, «срыв» на нижнюю ветвь должен произойти при меньшей частоте и при большем значении амплитуды (вблизи максимума резонансной кривой).

Однако такой приближенный аналитический анализ системы, качественно правильно предсказывающий гистерезисное поведение системы, не в состоянии дать правильных значений частоты, при которых происходят «срывы» амплитуды. И тем более остаются вне поля зрения многие интересные особенности перехода системы из одного режима в другой при таких «срывах». Моделирование позволяет наблюдать эту перестройку во всех деталях и дает представление о сложном характере переходного процесса, сопровождающего скачки амплитуды и фазы.

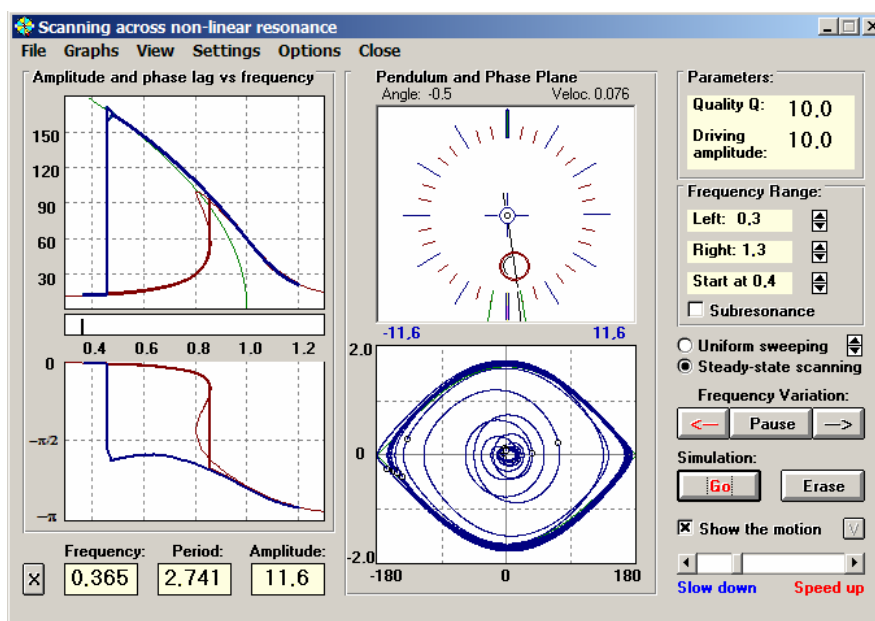


Рис. 1. Гистерезисное поведение амплитуды и фазы установившихся вынужденных колебаний маятника при медленном сканировании частоты внешнего воздействия.

В показанном на рис. 1 эксперименте моделирование начинается при нулевых начальных условиях (маятник покоится в положении равновесия) и при частоте, меньшей резонансной. Через некоторое время устанавливаются колебания малой амплитуды, происходящие практически в одинаковой фазе с синусоидальным внешним моментом. Затем производится медленное сканирование по следующему алгоритму: частота увеличивается скачком на малую величину, и программа ждет, пока не закончится переходный процесс и

не установятся колебания неизменной амплитуды. Только после установления амплитуды вынужденных колебаний соответствующие значения амплитуды и фазы отмечаются в окнах программы и производится очередное малое увеличение частоты внешнего момента. Из рис. 1 видно, что вплоть до частоты, превышающей 0,8 собственной, экспериментальные значения практически точно ложатся на теоретические кривые. Частота, при которой происходит «срыв» амплитуды, также близка к теоретическому значению. «Скачкообразный» переходный процесс фактически представляет собой весьма длительные затухающие биения, при которых амплитуда поочередно возрастает и убывает, пока не установится ее значение, достаточно точно совпадающее с теоретическим, соответствующим данной частоте на правом склоне резонансной кривой. При дальнейшем увеличении частоты также наблюдается хорошее совпадение экспериментальных результатов с теоретическими кривыми. Установившиеся колебания маятника после «скачка» амплитуды вверх происходят практически в противофазе с внешним моментом.

После перемены направления сканирования частоты амплитуда и фаза установившихся колебаний опять практически точно ложатся на соответствующие теоретические кривые. Но после достижения частоты, при которой ранее произошел «скачок» вверх, амплитуда продолжает нарастать. Здесь уже начинают проявляться заметные расхождения экспериментальных и теоретических результатов. Амплитуда растет и после прохождения через значение, при котором согласно теории должен произойти «срыв» на нижнюю ветвь резонансной кривой. Зависимость амплитуды установившихся колебаний от частоты практически повторяет ход скелетной кривой маятника.

Наиболее интересные особенности в поведении маятника обнаруживаются, когда амплитуда вынужденных колебаний приближается к 180 градусам. Как и должно быть при резонансе, колебания маятника отстают здесь по фазе от внешнего момента примерно на четверть периода. Первая из таких особенностей – бифуркация нарушения симметрии: в установившихся колебаниях размах отклонения маятника в одну сторону становится больше, чем в противоположную, например, 173 градуса против 165. В спектре таких асимметричных колебаний присутствуют гармоники четных порядков, включая нулевую (постоянную составляющую). На рис.1 бифуркация нарушения симметрии проявляется в «раздвоении» экспериментальной амплитудно-частотной характеристики при приближении частоты к критическому значению, соответствующему «срыву» вниз. Эта бифуркация при дальнейшем понижении частоты сопровождается бифуркацией удвоения периода: последовательные отклонения маятника в одну сторону немного различаются, так что одному периоду маятника соответствуют два цикла внешнего воздействия.

Если на этом этапе эксперимента уменьшить шаг, с которым производится сканирование частоты, то можно наблюдать целую последовательность бифуркаций удвоения периода, завершающуюся переходом к хаотическому поведению. Хаотичность заключается в том, что в каждом цикле (состоящем из двух периодов внешнего воздействия) максимальное отклонение отличается от некоторого среднего значения на (малую) случайную величину. Образующий сечениями Пуанкаре странный аттрактор такого хаотического режима состоит из двух близких островков фазовой плоскости. Фазовая траектория проходит через эти островки поочередно, но в пределах каждого островка изображающая точка «скачет» случайным образом от посещения к посещению.

Практически любое малое возмущение (в частности, очередное уменьшение частоты при сканировании) выводит маятник из этого хаотического режима, вызывая «срыв» в нестационарный режим перехода на нижнюю ветвь резонансной кривой. Характер и длительность переходного процесса установления колебаний малой амплитуды, соответствующих этой ветви, зависит от многих факторов, в частности, от величины шага сканирования частоты. Фазовая траектория на рис. 1 (под изображением маятника) дает представление о переходе маятника к малым почти синусоидальным колебаниям, совпадающим по фазе с внешним моментом. Начало хаотического переходного процесса может иметь вид перемежаемости: маятник довольно долго совершает асимметричные колебания, размах

которых, скажем, в левую сторону больше, чем в правую, а затем за несколько циклов картина меняется на противоположную – длительные колебания с большим размахом в правую сторону. Такая нерегулярная смена режимов происходит несколько раз перед тем, как маятник круто срывается в режим малых колебаний. Иногда такому «срыву» предшествует полный переворот. Приводимый на рис. 2 график показывает три последних колебания маятника перед переворотом и «срывом» в режим малых колебаний. При дальнейшем уменьшении частоты внешнего момента значения амплитуды и фазы установившихся колебаний опять хорошо ложатся на теоретическую кривую (см. рис. 1).

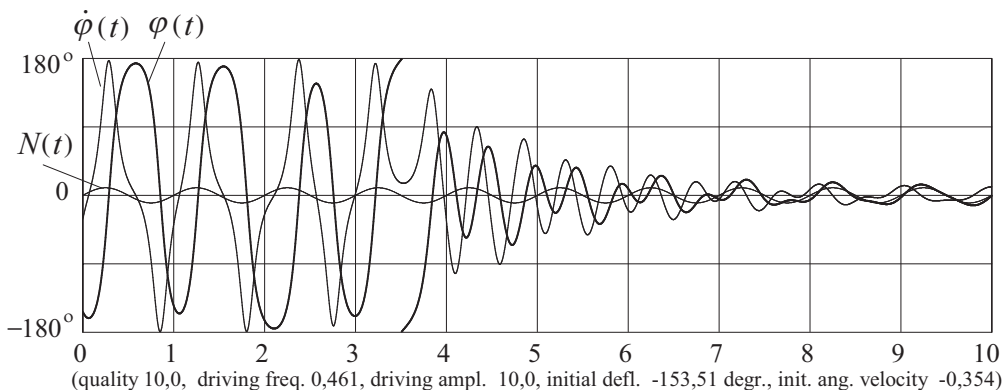


Рис. 2. Графики угла отклонения, угловой скорости и внешнего момента в процессе «срыва» маятника в режим колебаний, соответствующих нижней ветви резонансной кривой.

Другой пример необычного поведения маятника под действием синусоидального внешнего момента иллюстрируется графиками на рис. 3. Частота внешнего воздействия составляет здесь 0,9 собственной частоты малых колебаний. Так как эти условия близки к резонансу, амплитуда первоначально малых колебаний начинает расти. Из графиков на рис. 3 видно, что на начальном этапе внешний момент почти все время направлен по скорости. Такие фазовые соотношения благоприятны для передачи энергии маятнику.

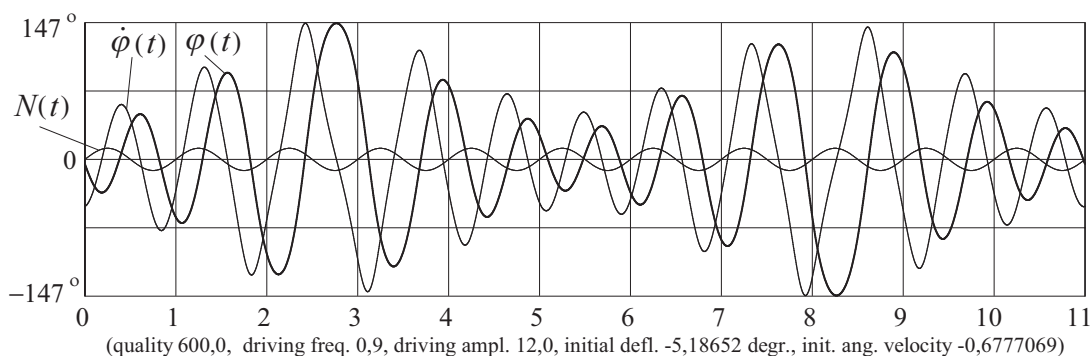


Рис. 3. Необычный режим стационарных вынужденных колебаний переменной амплитуды, период которых составляет ровно 11 циклов внешнего воздействия.

Но с увеличением амплитуды возрастает собственный период, что приводит к изменению фазовых соотношений между колебаниями маятника и изменениями внешнего момента $N(t)$: через некоторое время изменения $N(t)$ оказываются в противофазе с колебаниями угловой скорости (см. рис. 3), и амплитуда начинает убывать, так как маятник отдает энергию источнику внешнего момента. Затем убывание амплитуды снова сменяется ее ростом, и колебания приобретают характер биений. Но самое удивительное в описываемом режиме заключается в том, что эти биения не затухают – колебания маятника имеют стационарный характер. Маятник совершает одно колебание за каждый период

внешнего воздействия, но амплитуда колебаний меняется от цикла к циклу, и только через одиннадцать циклов внешнего момента полностью воспроизводится начальное состояние системы. Для данного режима характерна синхронизация (фазовый «захват») колебаний маятника и внешнего момента с установлением стационарного процесса, в котором вложение энергии в систему за один период (за 11 циклов внешнего воздействия) несколько больше возвращаемой энергии. Этим обеспечивается компенсация потерь энергии из-за трения. Для установления описываемого режима (при данных значениях частоты и амплитуды внешнего момента) начальное состояние должно лежать в одном из 11 «островков» фазовой плоскости. Эти области притяжения данного периодического режима весьма малы. Сравнительно слабое возмущение может нарушить стационарный режим с периодом в 11 циклов, и после длительного переходного процесса устанавливаются обычные вынужденные колебания маятника с периодом, равным одному циклу внешнего воздействия.

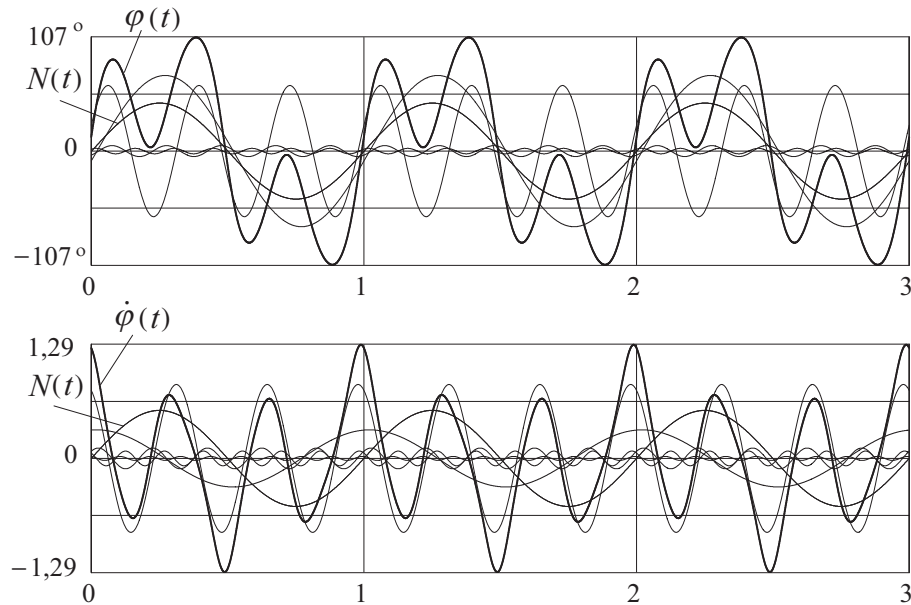


Рис. 4. Стационарные вынужденные колебания маятника, в которых доминирует третья гармоника внешнего момента.

Приведем еще один интересный пример необычного поведения маятника, который позволяет понять на интуитивном уровне механизм генерации высших гармоник в различных (не только механических) устройствах. На рис. 4 показаны графики временной зависимости угла отклонения и угловой скорости колебаний маятника, возбуждаемого периодическим внешним моментом $N(t)$ с чисто синусоидальной зависимостью от времени. Графики гармонических составляющих установившихся колебаний маятника также показаны на рис. 4 (тонкие линии) вместе с синусоидой возбуждающего момента. В данном случае период установившихся колебаний равен периоду $N(t)$, но в их спектре преобладает третья гармоника, частота которой близка к собственной частоте маятника (супергармонический резонанс третьего порядка). В целом движение маятника напоминает здесь собственные колебания около среднего положения, которое медленно смещается поочередно вправо и влево вслед за изменениями внешнего момента. Причина, по которой внешний момент «подпитывает» именно третью гармонику, ясна из графика угловой скорости на рис. 4: каждый второй максимум третьей гармоники приходится на максимум внешнего момента, и направления момента и угловой скорости при этом совпадают.

Литература

1. D.D'Humieres *et al.* *Chaotic states and routes to chaos in the forced pendulum*. Phys. Rev. A, **26**, 3483 (1982)
2. Eugene Butikov. *Nonlinear oscillations (simulation programs)*. <http://www.ifmo.ru/butikov/Nonlinear.html>
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика*. М., Физматлит, 1958.