

# Лаборатория компьютерного моделирования для изучения физики колебаний

Е. И. Бутиков

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: [butikov@spb.runnet.ru](mailto:butikov@spb.runnet.ru)

web: <http://www.ifmo.ru/butikov>

В статье рассматривается разработанный нами комплекс «ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ», состоящий из учебного пособия и цикла моделирующих компьютерных программ. Комплекс предназначен для проведения различных видов учебных занятий и лабораторных работ, а также для организации самостоятельной работы студентов естественнонаучных факультетов университетов, технических и педагогических вузов. Учебный комплекс позволяет расширить использование новых информационных технологий при преподавании теории колебаний как одного из разделов курса физики.

## 1. Введение. Физические модели и вычислительный эксперимент

Окружающий нас мир физических явлений чрезвычайно многообразен и сложен. Чтобы продвинуться в познании этого мира, мы вынуждены использовать упрощенные *математические модели* реальных физических систем. Попытка учесть все сразу сделала бы неразрешимой задачу описания даже весьма простых явлений. Конечно, совершенно необходимо, чтобы выбранная модель сохраняла наиболее важные и самые характерные черты изучаемого реального явления. Можно считать, что мы понимаем физическое явление, если удастся построить для него адекватную математическую модель.

В некоторых случаях в рамках принятой модели удастся получить точное или приближенное аналитическое решение поставленной задачи. К сожалению, точные аналитические решения редко встречаются в физике. В большинстве практически важных задач дифференциальные уравнения движения оказываются неинтегрируемыми. В таких случаях на помощь приходят численные методы решения уравнений, и проверить правильность своих представлений о реальном изучаемом явлении можно с помощью вычислительного эксперимента на компьютере.

*Вычислительный эксперимент – это метод изучения физического явления путем построения его математической модели и последующего численного исследования этой модели, позволяющего «проиграть» ее поведение в различных условиях.*

Компьютерное моделирование может оказать существенную помощь как исследователю, прокладывающему путь в неизведанное, так и учащемуся, осваивающему новые для себя знания. Учебные моделирующие компьютерные программы представляют собой не просто электронное дополнение к традиционному учебнику, а по существу своего рода *настольную лабораторию* для индивидуальной интерактивной работы учащегося с математической моделью изучаемого физического явления. В этом отношении моделирующие программы принципиально отличаются от традиционных компьютерных обучающе-контролирующих программ, так как именно при моделировании физических явлений по-настоящему используются предоставляемые компьютером уникальные возможности. Работа с моделирующими программами по своему характеру во многом сходна с небольшим научным исследованием, в котором студент играет активную роль.

В то же время компьютерный эксперимент выполняет и функции контроля за усвоением теоретических знаний и навыков: полученные при самостоятельном решении задач результаты студент проверяет на опыте, а не по готовому ответу. Такой подход усиливает эмоциональную сторону учебного процесса и стимулирует познавательный интерес.

Подчеркнем, что речь идет о программах, предназначенных для изучения физики, а не информатики. Для работы с ними не нужно уметь программировать. Если проводить параллель с экспериментальной физикой, то этим программам можно сопоставить уже готовые и тщательно отлаженные экспериментальные установки. При работе на них важно лишь понимать, как и что именно измеряет тот или иной прибор, и совсем не обязательно знать детали его внутреннего устройства. Так и с нашими программами: поскольку вся работа по программированию уже выполнена заранее, можно сосредоточиться на физике изучаемых явлений, не отвлекаясь на чисто технические проблемы моделирования.

## 2. Компьютерная лаборатория физики колебаний

Мы используем возможности компьютерного моделирования для преподавания теории колебаний — важного раздела курса физики. Без преувеличения можно сказать, что колебания окружают нас всюду. Осциллирующие электрическое и магнитное поля несут свет к нашим глазам. Вибрирующий воздух приносит звуки к нашим ушам. Благодаря световым и акустическим колебаниям мы получаем большую часть информации об окружающем нас мире. Электромагнитные колебания (в частности, оптические колебания) лежат в основе всех современных электронных средств передачи и обработки информации. Значение колебательных процессов в природе и технике трудно переоценить.

Колебания в различных физических системах могут иметь совершенно разную природу. Тем не менее, колебания разной физической природы имеют много общего. Изучение общих закономерностей всех колебательных процессов составляет предмет теории колебаний.

Для облегчения понимания общих закономерностей колебательных процессов целесообразно начинать их изучение с наиболее наглядных и интуитивно понятных примеров, в которых движение доступно непосредственному зрительному восприятию. Это прежде всего такие знакомые всем механические колебательные системы, как груз на пружине и простой маятник. Электромагнитным аналогом этих механических систем может служить замкнутая цепь, содержащая конденсатор и катушку индуктивности. Изменение во времени физических величин, характеризующих разные колебательные системы, описывается одинаковыми дифференциальными уравнениями. Разобравшись в происходящих на наших глазах колебаниях груза на пружине, мы по аналогии легко освоимся с закономерностями колебаний в электромагнитном контуре, где все далеко не так наглядно.

Для компьютерного моделирования в рассматриваемых программах выбраны механические колебательные системы, потому что их движение можно непосредственно отобразить на экране. Моделирование позволяет получить наглядные, запоминающиеся иллюстрации изучаемых физических явлений во всей их динамике, воспроизвести тонкие детали явлений, ускользающие обычно при непосредственном наблюдении. Можно по своему усмотрению изменять временной масштаб, варьировать в широких пределах параметры и условия эксперимента, моделировать ситуации, недоступные для изучения в натурном эксперименте. Моделирующие программы позволяют строить графики временной зависимости описывающих систему переменных, получать фазовую траекторию, отображать энергетические превращения при колебаниях. Графический способ отображения результатов моделирования облегчает усвоение больших объемов получаемой информации. Графики зависимости всех переменных от времени выводятся на экран одновременно с отображением движения самой системы. Это придает графикам особую наглядность и облегчает понимание закономерностей изучаемых процессов.

Использование компьютерного моделирования позволяет значительно расширить круг изучаемых вопросов и сделать более современным содержание курса физики за счет включения проблем, не допускающих решения традиционными аналитическими методами. В теории колебаний это относится прежде всего к большому числу нелинейных задач, важных как в принципиальном отношении, так и для многих практических приложений.

В 1996 году разработанный нами комплекс PHYSICS OF OSCILLATIONS (Физика колебаний) стал лауреатом Европейского конкурса образовательных компьютерных программ (European Academic Software Award, EASA'96) и демонстрировался на выставке «Информационные технологии в образовании» (Стокгольм, Швеция). Англоязычная версия комплекса программ (включающая пособие для учащихся и руководство для преподавателя) опубликована в США [1] и распространяется Американским институтом физики (издательство Physics Academic

Software, см. web-сайт <http://www.aip.org/pas>). В 1998 году пакет "Physics of Oscillations" победил на ежегодном конкурсе США на лучшую компьютерную программу, проводимом американским журналом Computers in Physics.

Комплекс моделирующих программ реализован на основе средств, предоставляемых операционным окружением системы MS Windows. Поэтому пользователь имеет возможность одновременно открывать несколько окон, прибегать к помощи других прикладных программ (таких как математические пакеты и калькуляторы). Предусмотрен поиск необходимой справочной информации в гипертекстовых help-файлах по ключевым словам. Можно делать закладки и записи, получать твердую копию текстовой информации, а также графических материалов, отображающих результаты выполненных моделирующих экспериментов для включения их в отчет о проделанной работе.

В учебном пособии [1] – [3] предлагается широкий спектр теоретических задач и формулируются конкретные задания для экспериментальной работы на компьютере. При самостоятельном выполнении лабораторной работы студент имеет возможность варьировать параметры моделируемой физической системы и выбирать наиболее подходящие в каждом случае способы представления информации, получаемой в процессе моделирования.

Материал комплекса структурирован на основе классификации колебательных явлений по способу их возбуждения. Каждая программа содержит встроенный компактный учебник (tutorial), вводящий студента в курс дела. В нем дается краткое изложение теоретических основ, а также описание моделируемой физической системы с динамическими иллюстрациями ее поведения в типичных ситуациях. Часть 1 комплекса программ включает следующие лабораторные работы:

- Собственные колебания торсионного линейного осциллятора
- Торсионный осциллятор с сухим и вязким трением
- Собственные колебания и перевероты жесткого маятника
- Вынужденные колебания при синусоидальном внешнем воздействии
- Несинусоидальная (прямоугольная) внешняя сила в линейной системе
- Параметрическое возбуждение торсионного линейного осциллятора
- Параметрический резонанс при синусоидальной модуляции параметра

В настоящее время близка к завершению Часть 2 комплекса, в которой рассматриваются более сложные и глубокие вопросы физики колебаний. В частности, моделируется движение маятника с осциллирующей точкой подвеса и маятника с модулируемой длиной, а также других нелинейных динамических систем, демонстрирующих многообразные регулярные режимы (в том числе субгармонические и супергармонические резонансы), а также хаотическое поведение. Планируется включение в комплекс и систем с несколькими степенями свободы.

Некоторые из программ комплекса описаны в литературе [4] – [6]. Чтобы создать представление о характере комплекса, ниже в этой статье приводится подробное описание программы, в которой моделируются вынужденные колебания торсионного пружинного осциллятора, возбуждаемого периодическим внешним моментом с прямоугольной зависимостью от времени.

### 3. Колебания осциллятора под действием несинусоидальной силы

В рассматриваемой программе моделируются вынужденные крутильные колебания механического торсионного пружинного осциллятора при периодических принудительных мгновенных изменениях положения равновесия. Такое воздействие на осциллятор эквивалентно приложению внешнего крутящего момента с кусочно-постоянной зависимостью от времени, имеющей вид прямоугольных импульсов. Это пример кинематического возбуждения вынужденных колебаний периодическим, но негармоническим внешним воздействием.

### 3.1 Моделируемая физическая система

Для изучения вынужденных колебаний линейного осциллятора при несинусоидальном периодическом внешнем воздействии рассматривается механический торсионный пружинный осциллятор, подобный балансовому механизму механических карманных или наручных часов (рис. 1). Упругая спиральная пружина, прикрепленная к ротору (маховику), обеспечивает ему устойчивое положение равновесия. Второй конец пружины соединен с шатуном, который можно поворачивать вокруг оси, общей с осью маховика. Поворот шатуна на некоторый угол смещает положение равновесия маховика на такой же угол. При неподвижном шатуне осциллятор может совершать около (смещенного) положения равновесия затухающие собственные колебания. В случае слабого и умеренного трения частота этих крутильных колебаний почти совпадает с частотой  $\omega_0$  собственных колебаний в отсутствие трения, зависящей от жесткости  $D$  пружины и момента инерции  $I$  маховика:  $\omega_0^2 = D/I$ . При заданном периодическом движении шатуна ротор совершает вынужденные колебания. Такой способ возбуждения вынужденных колебаний можно назвать *кинематическим*, потому что внешнее воздействие выражается в заданном движении некоторой части системы, в противоположность силовому возбуждению, для которого характерно явное задание действующей на систему внешней силы как функции времени.

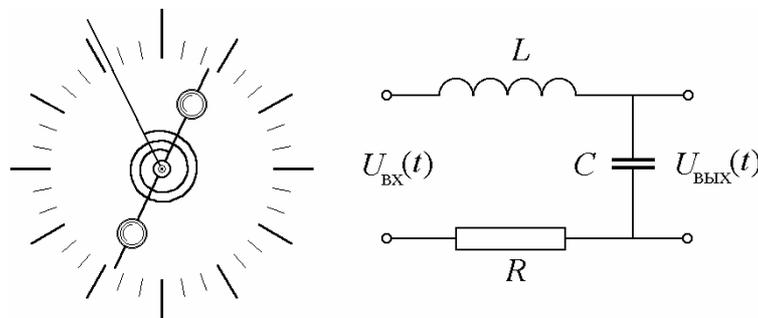


Рис. 1. Торсионный пружинный осциллятор, возбуждаемый периодическим движением шатуна (слева), и его электромагнитный аналог – последовательный колебательный контур, возбуждаемый подаваемым на вход переменным напряжением (справа).

Справа на рис. 1 показан колебательный контур, аналогичный моделируемому механическому осциллятору. Катушка с током (индуктивность  $L$ ) аналогична инертному ротору (энергия магнитного поля катушки – аналог кинетической энергии ротора), конденсатор (емкость  $C$ ) аналогичен упругой пружине механической системы (энергия электрического поля в конденсаторе – аналог потенциальной энергии деформированной пружины). Подаваемое на вход контура переменное напряжение  $U_{\text{вх}}(t)$  можно рассматривать как аналог заданного периодического движения возбуждающего шатуна (угла  $\beta(t)$  отклонения шатуна от вертикали), а напряжение на конденсаторе, т.е. выходное напряжение  $U_{\text{вых}}(t)$  – как аналог колебательного движения ротора (угла  $\varphi(t)$  его отклонения от вертикали). Джоулевы потери в резисторе контура аналогичны рассеянию механической энергии осциллятора из-за вязкого трения.

Смещение положения равновесия маховика равносильно приложению к нему дополнительного внешнего момента. Внешнее периодическое воздействие на осциллятор в виде симметричных прямоугольных импульсов можно реализовать, если через равные промежутки времени принудительно поворачивать шатун поочередно то в одну, то в другую сторону на один и тот же угол. В принятой математической модели системы предполагается, что эти принудительные повороты шатуна, а значит и смещения положения равновесия ротора, происходят настолько быстро, что маховик за это время не успевает ни повернуться на сколько-нибудь заметный угол, ни изменить своей угловой скорости. Вынужденные колебания линейного осциллятора, происходящие в результате такого внешнего воздействия, могут служить удобным примером для изучения поведения линейной колебательной системы под действием периодической, но *негармонической* внешней силы. Угол отклонения ротора  $\varphi(t)$  при этих вынужденных колебаниях полностью аналогичен напряжению на конденсаторе колебательного контура (правая часть рис. 1), на вход которого подается переменное напряжение в виде прямоугольных импульсов.

### 3.2 Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний осциллятора

Пусть скачкообразные повороты шатуна происходят поочередно вправо и влево через равные промежутки времени  $T/2$ , так что на протяжении интервала  $(0, T/2)$  положение равновесия маховика смещено вправо на некоторый угол  $\beta_{\max}$ , а в течение следующего интервала  $(T/2, T)$  положение равновесия смещено влево на такой же угол (т.е. смещение шатуна равно  $-\beta_{\max}$ ). Затем все повторяется сначала. Таким образом,  $T$  – это полный период внешнего воздействия.

Будем считать, что стрелка, прикрепленная к маховику, при ненапряженной пружине ориентирована параллельно шатуну. Другими словами, шатун и стрелка показывают на одно и тоже деление шкалы, если пружина, соединяющая шатун с маховиком, не деформирована. Нулевое деление шкалы соответствует среднему положению шатуна (вертикальному на условном изображении системы в моделирующей программе), из которого он поочередно смещается в точки шкалы  $\pm\beta_{\max}$ . Когда стрелка, указывающая ориентацию маховика, показывает на деление шкалы, характеризуемое углом  $\varphi$ , деформация пружины определяется углом  $\varphi - \beta_{\max}$ , если шатун отклонен вправо, и углом  $\varphi + \beta_{\max}$ , если шатун отклонен влево.

Таким образом, пока шатун смещен вправо, на маховик со стороны пружины действует момент упругой силы, равный  $-D(\varphi - \beta_{\max})$ , и на этом интервале времени вращательное движение маховика с моментом инерции  $I$  в отсутствие трения описывается дифференциальным уравнением:

$$I\ddot{\varphi} = -D(\varphi - \beta_{\max}). \quad (1)$$

После переноса члена  $-D\varphi$  (часть момента упругой силы) в левую часть уравнения (1) в правой части останется постоянный момент сил  $D\beta_{\max}$ , обусловленный смещением шатуна из среднего положения вправо на угол  $\beta_{\max}$ . Разделив обе части уравнения на  $I$  и добавив еще один член, пропорциональный угловой скорости маховика (тормозящий момент вязкого трения), получаем следующее линейное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \omega_0^2\beta_{\max}, \quad (0, T/2). \quad (2)$$

Вращение маховика в течение последующего интервала времени  $(T/2, T)$  описывается аналогичным уравнением, отличающимся от уравнения (2) лишь знаком постоянного члена в правой части. Здесь постоянная затухания  $\gamma$  характеризует интенсивность вязкого трения в системе. Из-за трения колебания осциллятора, происходящие на собственной частоте  $\omega_0$ , постепенно затухают, и по истечении некоторого интервала времени после начала действия внешней силы происходит установление колебаний: угол  $\varphi(t)$ , характеризующий мгновенную ориентацию маховика, будет изменяться периодически с периодом  $T$  в ритме изменения внешнего воздействия. Переходный процесс установления вынужденных колебаний в системе в общем случае продолжается тем дольше, чем большее время  $\tau$  требуется для затухания собственных колебаний осциллятора:  $\tau = 1/\gamma$ . Как известно, в случае синусоидальной внешней силы установившиеся вынужденные колебания принимают не только период внешнего воздействия, но и повторяют его форму (т.е. тоже характеризуются синусоидальной зависимостью от времени). При любой другой периодической внешней силе (в том числе рассматриваемой здесь прямоугольной) установившиеся вынужденные колебания имеют такой же период, как и у вынуждающей силы, но иную форму временной зависимости.

### 3.3 Гармоники внешней силы и установившихся колебаний осциллятора

Для нахождения формы установившихся колебаний линейного осциллятора под действием периодической кусочно-постоянной силы можно воспользоваться двумя принципиально различными способами.

Первый способ основан на разложении периодической временной зависимости внешней силы в ряд Фурье, т.е. на представлении этой силы в виде суперпозиции синусоидальных составляющих, называемых *гармониками*. Совокупность таких синусоидальных составляющих с дискретными частотами образует *спектр* периодического колебания сложной формы. Благодаря линейности дифференциального уравнения осциллятора действие каждой из гармонических составляющих вынуждающей силы можно рассмотреть по отдельности и найти соответствующее данной гармонике синусоидальное вынужденное колебание осциллятора. Результирующее

вынужденное колебание находится как наложение (как сумма) этих синусоидальных колебаний с разными частотами (рис. 2).

Таким образом, каждой гармонике «входного» внешнего периодического воздействия на осциллятор соответствует своя гармоническая составляющая той же частоты в «выходных» установившихся колебаниях осциллятора. Однако благодаря избирательной реакции осциллятора на гармонические воздействия разных частот отношения амплитуд гармоник в спектре выходного колебания будут иными, нежели отношения амплитуд тех же гармоник в спектре входного периодического воздействия. Поэтому и график установившихся колебаний на выходе будет отличаться по форме от графика временной зависимости входного воздействия.

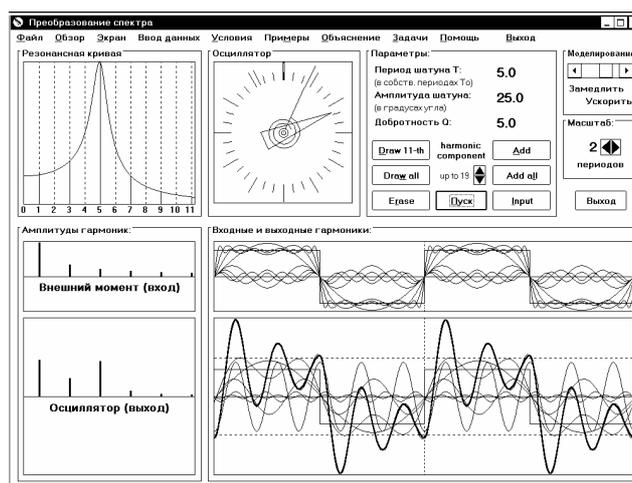


Рис. 2. Преобразование спектра внешнего входного момента с прямоугольной зависимостью от времени в спектр установившихся выходных вынужденных колебаний осциллятора.

В частности, может оказаться, что какая-либо  $n$ -я гармоническая составляющая вынуждающей силы с относительно небольшой амплитудой вызывает особенно сильные колебания осциллятора. Так происходит, когда частота  $\omega_n = n\omega = n \cdot 2\pi/T$  этой гармоники близка к собственной частоте осциллятора  $\omega_0$ , так как вынужденные колебания осциллятора под действием такой синусоидальной силы происходят в условиях, близких к резонансным. Напротив, относительный вклад гармонических составляющих вынуждающей силы, частоты которых лежат далеко от максимума резонансной кривой (амплитудно-частотной характеристики осциллятора), на «выходе» системы будет заметно ослаблен благодаря резонансной селективности реакции осциллятора – в спектре его результирующих колебаний далекие от резонанса гармоники оказываются в значительной мере подавленными.

Отличие формы установившихся колебаний от формы вынуждающей силы обусловлено не только изменением соотношения амплитуд гармоник на «входе» и на «выходе», но и различиями в изменении фаз разных гармоник при их передаче с «входа» на «выход». В случае высокочастотного ( $Q \gg 1$ ) осциллятора, имеющего «острую» амплитудно-частотную характеристику и почти ступенчатую фазо-частотную характеристику, гармоники с частотами ниже резонансной ( $\omega_n < \omega_0$ ) имеют на выходе практически такие же фазы, как и на входе, но высокочастотные гармоники ( $\omega_n > \omega_0$ ) имеют на выходе инвертированные фазы (в выходных колебаниях осциллятора эти гармоники представлены с противоположными по отношению к вынуждающей силе фазами). Гармоника внешней силы, частота которой близка к  $\omega_0$ , имеет на выходе заметно увеличенный относительный вклад, и отстает по фазе почти на  $\pi/2$  от соответствующих ей синусоидальных колебаний в составе внешней силы.

Приведем аналитическое решение дифференциального уравнения колебаний, основанное на разложении входящей в его правую часть периодической кусочно-постоянной ступенчатой функции в ряд Фурье. Это разложение содержит только нечетные гармоники (при сделанном выборе начала отсчета времени – только синусы) с частотами  $\omega_k = k\omega$  ( $k = 1, 3, 5 \dots$ ), где  $\omega = 2\pi/T$  – частота внешнего воздействия:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4\beta_{\max}\omega_0^2}{\pi k} \sin \omega_k t. \quad (3)$$

Отметим, что амплитуды последовательных гармоник в разложении периодической кусочно-постоянной функции убывают с увеличением их номера  $k$  и частоты  $\omega_k = k\omega$  сравнительно медленно – как  $1/k$ . Рассматриваемый случай дает пример действительно полигармонического внешнего воздействия на осциллятор, так как спектр ступенчатой внешней силы богат гармониками.

Периодическое частное решение уравнения (3) для зависимости угла отклонения маятника осциллятора от времени  $\varphi(t)$  при установившихся вынужденных колебаниях имеет вид:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4\beta_{\max}}{\pi k} \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_k^2)^2 + 4\gamma^2\omega_k^2}} \sin(\omega_k t + \alpha_k). \quad (4)$$

Фазы  $\alpha_k$  отдельных гармоник в (4) определяются соотношениями  $\operatorname{tg} \alpha_k = 2\gamma\omega_k/(\omega_k^2 - \omega_0^2)$ . Из формулы (4) для  $\varphi(t)$  можно увидеть отмеченные выше особенности реакции линейного осциллятора на периодическое внешнее воздействие с прямоугольной зависимостью от времени, а именно, каким образом амплитуды и фазы гармоник «входного» спектра внешней силы преобразуются при переходе к характеристикам спектра «выходных» установившихся колебаний осциллятора. Видно, в частности, что при совпадении частоты  $\omega_k = k\omega$  одной из гармоник внешнего момента с резонансной частотой осциллятора знаменатель соответствующего члена суммы оказывается очень малым, особенно для осциллятора с малым показателем затухания ( $\gamma \ll \omega_0$ ), т.е. с высокой добротностью ( $Q \gg 1$ ). Иными словами, реакция осциллятора в этом случае имеет характер *резонанса*. Напомним, что при слабом и умеренном трении резонансная частота очень близка к частоте  $\omega_0$  собственных колебаний в отсутствие трения.

Преобразование спектра прямоугольного входного воздействия в спектр колебаний на выходе иллюстрирует рис. 2, где приведен вид экрана при работе в разделе программы «Спектр установившихся колебаний». Резонансная кривая в левом верхнем углу экрана (амплитудно-частотная характеристика) характеризует реакцию осциллятора с данными параметрами на отдельные гармонические составляющие внешней силы.

При плавном изменении (сканировании) частоты  $\omega$  внешнего синусоидального воздействия резонансная реакция осциллятора возможна только при совпадении этой частоты с  $\omega_0$ . Другими словами, возможен только один резонанс, наступающий при совпадении периода  $T$  синусоидального воздействия с периодом  $T_0$  собственных колебаний осциллятора. Однако при внешнем воздействии с прямоугольной зависимостью от времени у осциллятора обнаруживается множество резонансов: резонанс наступает, когда период внешнего воздействия как совпадает с собственным периодом осциллятора, так и тогда, когда он втрое, впятеро и вообще в нечетное число раз больше собственного периода, т.е. при  $T = (2n + 1) T_0$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Высшие резонансы с  $n > 1$  наступают, когда собственная частота осциллятора совпадает с частотой одной из нечетных гармоник внешней силы.

Ступенчатую функцию можно представить как сумму других функций разными способами. Возможно разложение в ряд не только по синусам и косинусам, но и по другим полным системам функций. С математической точки зрения все такие разложения одинаково допустимы. Целесообразность разложения именно в ряд Фурье, т.е. на сумму гармонических составляющих, связана с *физикой*: только при синусоидальной форме внешнего воздействия реакция осциллятора будет выражаться в результирующем движении, имеющем такую же форму временной зависимости.

Кроме того, линейный осциллятор с высокой добротностью  $Q$  (т.е. с острой резонансной кривой) будет заметным образом реагировать только на ту гармонику сложного внешнего воздействия (сигнала), частота которой близка к его собственной частоте. В этом отношении осциллятор можно рассматривать как своего рода спектральный прибор, выделяющий в сложном сигнале определенную гармоническую составляющую. Иначе говоря, высокодобротный перебираемый по частоте осциллятор производит фактическое разложение сложного входного воздействия в ряд Фурье на *физическом уровне*. Именно поэтому для осциллятора синусоидаль-

ные функции оказываются физически выделенными по сравнению с различными полными системами других функций.

### 3.4 Вынужденные колебания осциллятора как собственные колебания около чередующихся смещенных положений равновесия

Другой способ нахождения установившихся колебаний при действии на осциллятор ступенчатой внешней силы основан на представлении установившегося движения как сменяющихся друг друга затухающих собственных колебаний осциллятора около чередующихся положений равновесия  $\beta_{\max}$  и  $-\beta_{\max}$ . На протяжении первого полуцикла от  $t = 0$  до  $t = T/2$  положение равновесия находится при  $\varphi = \beta_{\max}$ . Для этого полуцикла зависимость  $\varphi(t)$  от  $t$  может быть представлена следующим образом:

$$\varphi(t) = \beta_{\max} + Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta), \quad (0, T/2). \quad (5)$$

В этой формуле  $\omega_1 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$  – частота собственных затухающих колебаний, а  $A$  и  $\theta$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий для первого полуцикла установившихся колебаний. В течение следующего полуцикла ( $T/2, T$ ) затухающие собственные колебания происходят около смещенного в противоположную сторону положения равновесия, и для этого интервала времени описывающая колебания функция  $\varphi(t)$  имеет вид:

$$\varphi(t) = -\beta_{\max} - Ae^{-\gamma(t-T/2)} \cos(\omega_1(t-T/2) + \theta), \quad (T/2, T). \quad (6)$$

Здесь постоянные  $A$  и  $\theta$  имеют те же значения, что и в формуле (5). Так будет потому, что при установившихся колебаниях график движения в течение второй половины периода, когда шатун смещен влево, будет со сдвигом по времени на  $T/2$  повторять в зеркальном отражении график движения в течение первой половины периода. Это соотношение отчетливо видно из рисунка 3, на котором приведены графики установившихся колебаний при  $T = 3T_0$  (период  $T$  вынуждающей силы втрое больше собственного периода  $T_0$ ).

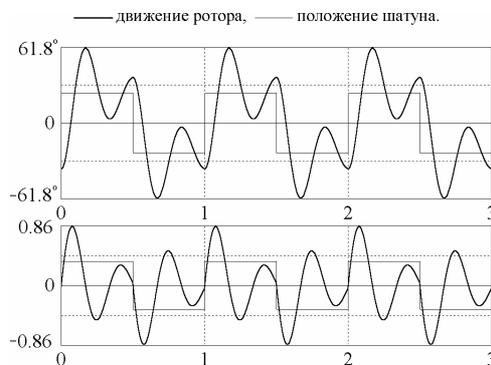


Рис.3. Графики угла отклонения (вверху) и угловой скорости (внизу) для установившихся колебаний осциллятора при резонансе  $T = 3T_0$  (добротность  $Q = 3$ , амплитуда шатуна  $\beta_{\max} = 25^\circ$ ).

Постоянные  $A$  и  $\theta$  можно рассчитать, пользуясь тем, что при скачкообразном (мгновенном) повороте шатуна из одного положения в другое угол отклонения маятника и его угловая скорость не успевают измениться. Это требование дает два уравнения для нахождения  $A$  и  $\theta$ .

Приведенные выше выражения (5) – (6) описывают установившееся движение только на промежутке времени от 0 до  $T$ , т.е. в них нельзя формально подставлять значения аргумента  $t$ , превышающие  $T$ . Тем не менее, имея график периодической функции  $\varphi(t)$  для интервала  $[0, T]$ , ее значение для произвольного момента времени  $t$  можно получить простым сдвигом на соседние промежутки времени  $[T, 2T]$ ,  $[2T, 3T]$  и т.д., учитывая, что  $\varphi(t + T) = \varphi(t)$ .

Трактовка установившихся вынужденных колебаний как собственных колебаний, происходящих около чередующихся положений равновесия, дает особенно наглядное объяснение весьма сложного поведения осциллятора (как механического, так и электромагнитного) под действием возбуждающих прямоугольных импульсов, длительность которых много больше пе-

риода собственных колебаний. На рис. 4 показаны графики установившихся колебаний при  $T = 7T_0$  и сравнительно сильном трении ( $Q = 5$ ). В левом верхнем углу показана фазовая траектория, рядом с ней справа находится график зависимости угловой скорости от времени, а ниже фазовой траектории показан график угла отклонения, на котором ось времени направлена вниз. Такое взаимное расположение облегчает сопоставление графиков временной зависимости с движением изображающей точки по фазовой траектории при наблюдении моделирования.

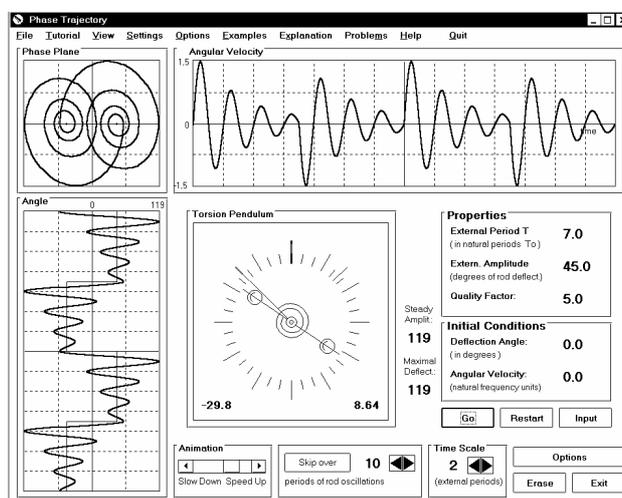


Рис. 4. Графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости вместе с фазовой траекторией для установившихся вынужденных колебаний осциллятора под действием прямоугольных импульсов с периодом  $T = 7T_0$ .

На рис. 4 отчетливо видно, как после каждого очередного скачкообразного перемещения возбуждающего шатуна ротор совершает несколько циклов постепенно затухающих собственных колебаний около смещенного положения равновесия. Эти быстрые осцилляции на «выходе» системы, происходящие на собственной частоте осциллятора, замещают собой крутые фронты «входных» возбуждающих импульсов, искажая их прямоугольную форму при прохождении «сигнала» с «входа» системы на «выход». Мы здесь воспользовались терминологией, применяемой обычно при описании прохождения импульсов напряжения через электромагнитную цепь.

### 3.5 Оценка размаха установившихся колебаний

На основе приведенного выше описания установившихся колебаний осциллятора под действием кусочно-постоянной вынуждающей силы можно сделать количественную оценку максимальных отклонений ротора для случаев, когда период внешнего воздействия кратен собственному периоду осциллятора. (В сопровождающем программы учебном пособии студенту предлагается сделать такие теоретические оценки самостоятельно, и затем проверить свои результаты в моделирующих экспериментах на компьютере.)

Рассмотрим сначала основной резонанс, когда период вынуждающей силы равен периоду собственных колебаний:  $T = T_0$ . Оценка  $\varphi_{\max}$  можно сделать следующим образом. Замкнутая фазовая траектория установившихся колебаний в этом случае состоит из одного витка, пересекающего ось  $\varphi$  в точках  $-\varphi_{\max}$  и  $\varphi_{\max}$ , соответствующих одинаковым максимальным отклонениям маховика вправо и влево от среднего положения. Эти точки находятся на угловых удалениях от  $\beta_{\max}$  на  $|\varphi_{\max} + \beta_{\max}|$  влево и на  $\varphi_{\max} - \beta_{\max}$  вправо.

Верхняя половина фазовой траектории образована отрезком эллиптической спирали (полувитком) с фокусом в точке  $\beta_{\max}$ , смещенной вправо из начала координат. При прохождении изображающей точки по этому участку траектории осциллятор совершает половину периода затухающего собственного колебания относительно смещенного вправо положения равновесия: от максимального отклонения  $|\varphi_{\max} + \beta_{\max}|$  влево (измеренного от  $\beta_{\max}$ ) до максимального

отклонения  $\varphi_{\max} - \beta_{\max}$  вправо. В момент достижения крайней правой точки положение равновесия переключается в фокус  $-\beta_{\max}$ , и дальше изображающая точка проходит по нижнему полувитку, замыкая фазовую траекторию. (Заметим, что в случае малого трения эта составная замкнутая фазовая траектория почти не отличается от эллипса. Это значит, что установившимся откликом высокодобротного осциллятора на внешнее воздействие с прямоугольной формой зависимости от времени в условиях основного резонанса  $T = T_0$  будет почти синусоидальное колебание на частоте  $\omega_0$  – вклад высших гармоник в колебание на выходе оказывается ничтожным.)

Относительное изменение амплитуды из-за трения за половину периода  $t = T_0/2$  затухающего собственного колебания составляет  $q = \exp(-\gamma T_0/2) = \exp(-\pi/2Q)$ . (Здесь произведение постоянной затухания  $\gamma$  и периода собственных колебаний  $T_0$  выражено через добротность  $Q$ :  $\gamma T_0/2 = \gamma\pi/\omega_0 = \pi/2Q$ , поскольку  $Q = \omega_0/2\gamma$ .) Другими словами, каждое крайнее отклонение от равновесия в одну сторону равно умноженному на  $q < 1$  предыдущему крайнему отклонению в противоположную сторону. Поэтому для верхнего полувитка левое и правое крайние отклонения от равновесия связаны соотношением  $(\varphi_{\max} + \beta_{\max})q = \varphi_{\max} - \beta_{\max}$ , откуда для искомого размаха колебаний получаем:

$$\varphi_{\max} = \beta_{\max} \frac{1+q}{1-q} \approx \frac{4}{\pi} Q \beta_{\max}. \quad (7)$$

Последнее приближенное выражение для амплитуды вынужденных колебаний справедливо в случае слабого затухания, когда  $q = \exp(-\gamma T_0/2) = \exp(-\pi/2Q) \approx 1 - \pi/2Q$ . Формула (7) показывает, что в условиях первого резонанса, вызываемого основной гармоникой внешнего воздействия, амплитуда установившихся колебаний осциллятора приблизительно в  $Q$  раз превосходит амплитуду  $(4/\pi)\beta_{\max}$  этой гармоники в принудительном движении шатуна с прямоугольной зависимостью от времени [см. правую часть формулы (3)]. К такому же заключению можно прийти, используя спектральный подход к описанию установившихся вынужденных колебаний [см. формулу (4)]. Аналогичным образом можно получить оценку размаха установившихся колебаний и для резонансов высоких порядков.

В случае сильного трения размах установившихся колебаний ротора даже в резонансных условиях лишь ненамного превосходит размах принудительных колебаний шатуна, а форма выходных колебаний в меньшей степени отличается от входных прямоугольных импульсов. Основное искажение формы выражается в размытии крутых фронтов входных импульсов. Полученные при моделировании графики угла отклонения и угловой скорости для установившихся колебаний при  $T = 5T_0$  и сильном трении ( $Q = 2$ ) показаны на рис. 5.

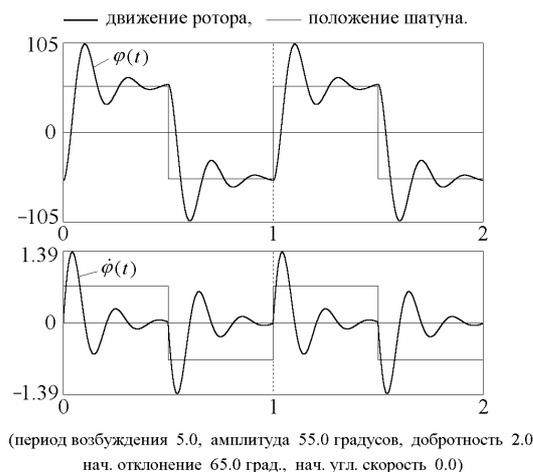


Рис. 5. Графики установившихся колебаний осциллятора с сильным трением под действием периодического внешнего момента с прямоугольной зависимостью от времени.

Чтобы оценить максимальный отброс ротора в установившихся колебаниях при сильном трении (добротность  $Q$  порядка 1 – 3 единиц), заметим, что при  $T/T_0 > Q$  собственные колеба-

ния около смещенного положения равновесия успевают почти полностью затухнуть, прежде чем шатун совершит скачкообразный поворот в новое положение. В таких случаях спираль фазовой траектории, скручиваясь к фокусам  $(\pm\beta_{\max}, 0)$ , подходит очень близко к этой точке до момента перехода к другому фокусу. Это значит, что в начале каждого полуцикла установившихся колебаний изображающая точка стартует практически от одного из фокусов. Так происходит при  $T/T_0 > Q$  независимо от точного значения  $T/T_0$ : при сильном трении не имеет значения, будет ли период внешнего воздействия резонансным (т.е. равным нечетному числу собственных периодов) или нет.

Получим оценку максимального отброса в рассматриваемых условиях. При повороте шатуна слева направо изображающая точка начинает движение из левого фокуса  $(-\beta_{\max}, 0)$  по сжимающейся спирали, закручивающейся вокруг правого фокуса  $(\beta_{\max}, 0)$ . Спираль пересекает ось абсцисс в интересующей нас точке  $\varphi_{\max}$  после полупериода  $T_{1/2} \approx T_0/2$  затухающих собственных колебаний около смещенного положения равновесия  $\beta_{\max}$ . Величина начального угла отклонения от этого положения составляет приблизительно  $2\beta_{\max}$ , а спустя половину периода угловое отклонение равно  $\varphi_{\max} - \beta_{\max}$ . Начальное и конечное отклонения отличаются множителем  $q = \exp(-\gamma T_0/2) = \exp(-\pi/2Q)$ , поэтому  $2\beta_{\max} q = \varphi_{\max} - \beta_{\max}$ . Отсюда получаем для максимального отброса ротора выражение:

$$\varphi_{\max} = \beta_{\max} (1 + 2q) = \beta_{\max} (1 + 2e^{-\pi/2Q}). \quad (8)$$

Например, из (8) следует, что при  $Q = 2$  максимальный отброс маховика равен  $1.91\beta_{\max}$ , т.е. почти вдвое превышает отклонение возбуждающего шатуна из среднего положения.

Выражаемый формулой (8) результат не зависит от периода вынуждающего воздействия, однако он справедлив лишь при условии, что за половину этого периода собственные колебания почти полностью «вымирают». Чтобы определить точность полученной оценки, можно рассмотреть возможное остаточное смещение маховика из точки  $\beta_{\max}$ . Например, при  $T = 5T_0$  это остаточное смещение равно приблизительно  $2\beta_{\max} \exp(-5\pi/2Q)$ , что при  $Q = 2$  дает  $0,04\beta_{\max}$ . Это означает, что в начале каждого полуцикла изображающая точка стартует не точно из  $\pm\beta_{\max}$ , как предполагалось при проведении оценки, а из некоторой точки, слегка смещенной из  $\pm\beta_{\max}$  в ту или иную сторону в зависимости от точного значения  $T/T_0$ .

Если период колебаний шатуна в (небольшое) четное число раз больше собственного периода осциллятора, максимальное отклонение маховика в установившихся вынужденных колебаниях при слабом трении близко к удвоенному размаху колебаний шатуна  $2\beta_{\max}$ . Такой вывод можно сделать из вида фазовой траектории: в этом случае каждая из двух симметричных половин фазовой траектории состоит из целого числа витков спирали, скручивающейся к одному из фокусов  $(\beta_{\max}, 0)$  и  $(-\beta_{\max}, 0)$ . Каждый очередной полуцикл установившихся вынужденных колебаний длительностью  $T/2 = nT_0$  состоит из целого числа  $n$  периодов  $T_0$  собственных колебаний, происходящих около смещенного положения равновесия. Каждый такой полуцикл вынужденных колебаний начинается и заканчивается при почти нулевой угловой скорости ротора.

Визуализация движения системы в моделирующей программе с одновременным построением графиков и фазовой траектории дает очень наглядную и интуитивно понятную картину преобразования входного воздействия в установившиеся вынужденные колебания ротора механического осциллятора. При этом значительно облегчается понимание аналогичной картины преобразования колебательным контуром входного прямоугольного напряжения в выходное напряжение на конденсаторе. Как и механический осциллятор, резонансный контур ведет себя *избирательно*, пропуская на выход только те гармоники в спектре входного сигнала, частоты которых попадают в *полосу пропускания* колебательного контура. При увеличении добротности контура его резонансная кривая становится «острее» и полоса пропускания сужается, т.е. растет *спектральная селективность* (избирательность) контура. Перестраиваемый по частоте (изменением либо емкости конденсатора, либо индуктивности катушки) колебательный контур высокой селективности по сути дела представляет собой спектральный прибор, способный на физическом уровне выполнять фурье-разложение сложного входного сигнала.

## Заключение

Комплекс моделирующих программ «ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ» систематически используется в учебном процессе на отделении прикладной математики и информатики Санкт-

Петербургского государственного института точной механики и оптики (технического университета) и на физическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета. Практический опыт применения интерактивных моделирующих компьютерных программ свидетельствует, что они стимулируют познавательный интерес и способны значительно повысить эффективность изучения соответствующих разделов курса физики.

Структура учебного пособия [2] – [3] и модульная организация компьютерных программ [1] допускают возможность разного объема и разной глубины изучения материала – от простого ознакомления с использованием динамических иллюстраций, имеющего цель развить физическую интуицию, до углубленного изучения, приближающегося к небольшому научному исследованию, с самостоятельным выполнением студентом теоретических заданий и постановкой вычислительного эксперимента на компьютере. Поэтому комплекс может быть легко адаптирован к конкретным условиям различных вузов с учетом подготовленности студентов и имеющегося учебного времени.

## Литература

1. Eugene Butikov. PHYSICS OF OSCILLATIONS, Part I. Simple Systems. Includes User's Manual (158 pages) and Instructor's Guide (93 pages). Издательство Physics Academic Software, American Institute of Physics, New York (USA) 1997. (См. также информацию в сети [http://webassign.net/pasnew/physics\\_of\\_oscillations/pos.html](http://webassign.net/pasnew/physics_of_oscillations/pos.html)).
2. Е. И. Бутиков. КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ. Часть I. Собственные и вынужденные колебания. Учебное пособие. СПбИТМО, Санкт-Петербург, 1999 (102 стр.).
3. Е. И. Бутиков. КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ. Часть II. Параметрические колебания. Учебное пособие. СПбИТМО, Санкт-Петербург, 1999 (68 стр.).
4. Eugene Butikov. PARAMETRIC RESONANCE. Computing in Science and Engineering, American Institute of Physics, May – June 1999, pp. 76 – 83.
5. Eugene Butikov. THE RIGID PENDULUM – AN ANTIQUE BUT EVERGREEN PHYSICAL MODEL. European Journal of Physics, vol. 20, No 6, November 1999 (pp. 429 – 441).
6. Е. И. Бутиков. ЛАБОРАТОРИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПО ФИЗИКЕ КОЛЕБАНИЙ. Компьютерные инструменты в образовании, № 5, сентябрь – октябрь 1999, Санкт-Петербург (стр. 24 – 39.)