

Учебная лаборатория компьютерного моделирования колебаний в простых нелинейных системах

Санкт-Петербургский государственный университет

Для учебной студенческой лаборатории компьютерного моделирования по физике колебаний нами разработан новый цикл моделирующих программ и сопутствующих им методических материалов. Программы цикла позволяют достаточно глубоко изучить важные в принципиальном и практическом отношении вопросы вынужденных и параметрических колебаний в простых нелинейных физических системах.

Понимание сложного и необычного, порой противоречащего нашей интуиции поведения даже весьма простых нелинейных колебательных систем совершенно необходимо для овладения передовыми областями современного естествознания и их разнообразными техническими приложениями. Традиционно в существующих учебных курсах имеется значительный перекос в сторону изучения линейных систем, для которых возможны аналитические решения, а вопросам поведения нелинейных систем уделяется совершенно недостаточное внимание. В значительной мере такое положение объясняется тем, что существующие аналитические методы их исследования слишком сложны, и при этом не в состоянии описать наблюдаемое в эксперименте разнообразие поведения нелинейных колебательных систем. Результаты трудоемких приближенных математических расчетов имеют очень ограниченную применимость. Причина заключается, по-видимому, не в ущербности аналитических методов математики, а в сложности самих возможных движений.

Реакция нелинейных систем на гармоническое воздействие не является синусоидальной, и относительно этой реакции в общем случае невозможно сформулировать какие-либо универсальные утверждения. Отклик нелинейной системы зачастую неоднозначен (установившееся движение может иметь разный характер в зависимости от начального состояния), а его спектр может содержать субгармонические частоты, выражаемые рациональной дробью частоты вынуждающего воздействия. В некоторых случаях отклик нелинейной системы на регулярное воздействие может быть хаотическим, а малое изменение частоты или амплитуды воздействия может привести к качественному изменению отклика системы. Контраст с поведением линейных систем поистине поразителен.

Использование компьютерного моделирования в учебном процессе позволяет до некоторой степени устранить отмеченный выше существующий перекос в преподавании физики колебаний. С этой целью для учебной лаборатории компьютерного моделирования нами разработан цикл программ, моделирующих поведение простых нелинейных систем, подверженных гармоническому внешнему воздействию. Выбор механических систем обусловлен важной в методическом отношении возможностью отобразить их движение непосредственно на экране компьютера, наряду с фазовыми траекториями и графиками временной зависимости описывающих систему переменных. Визуализация движения значительно облегчает понимание многих абстрактных концепций физики колебаний. Детально разобравшись с поведением механической системы и используя аналогию между колебательными системами разной физической природы, можно развить интуицию и значительно продвинуться в понимании разнообразных электромагнитных и оптических нелинейных явлений (скажем, таких как эффекты Джозефсона в слабой сверхпроводимости или процессы генерации лазеров), где все далеко не так наглядно, хотя системы описываются такими же дифференциальными уравнениями.

В частности, в предлагаемых программах моделируется поведение жесткого маятника в поле тяжести, подверженного воздействию синусоидального внешнего момента (силное возбуждение колебаний), и маятника, точка подвеса которого совершает принуди-

тельное гармоническое движение в горизонтальном направлении (кинематическое возбуждение). При прохождении через резонанс такие системы демонстрируют гистерезисное поведение: амплитуда установившихся колебаний при медленном сканировании частоты внешнего воздействия изменяется скачкообразно, причем эти скачки происходят при разных значениях частоты в зависимости от направления сканирования. Моделирование позволяет наблюдать во всех деталях, как при скачках амплитуды происходит полная перестройка установившегося вынужденного движения маятника, и дает представление о сложном характере переходного процесса, сопровождающего такие скачки амплитуды.

При определенных значениях параметров системы возбуждаемый маятник может совершать стационарные колебания, период которых равен периоду внешнего воздействия, но в спектре таких сложных установившихся колебаний доминирует одна из высших гармоник. На рис.1 показаны графики временной зависимости угла отклонения и угловой скорости, а также фазовая диаграмма колебаний маятника, возбуждаемого периодическим внешним моментом с чисто синусоидальной зависимостью от времени. В данном случае в спектре установившихся колебаний доминирует третья гармоника внешнего момента (супергармонический резонанс третьего порядка). Графики гармонических составляющих установившихся колебаний маятника на рис. 1 показаны тонкими линиями, а синусоида возбуждающего момента – жирной линией.

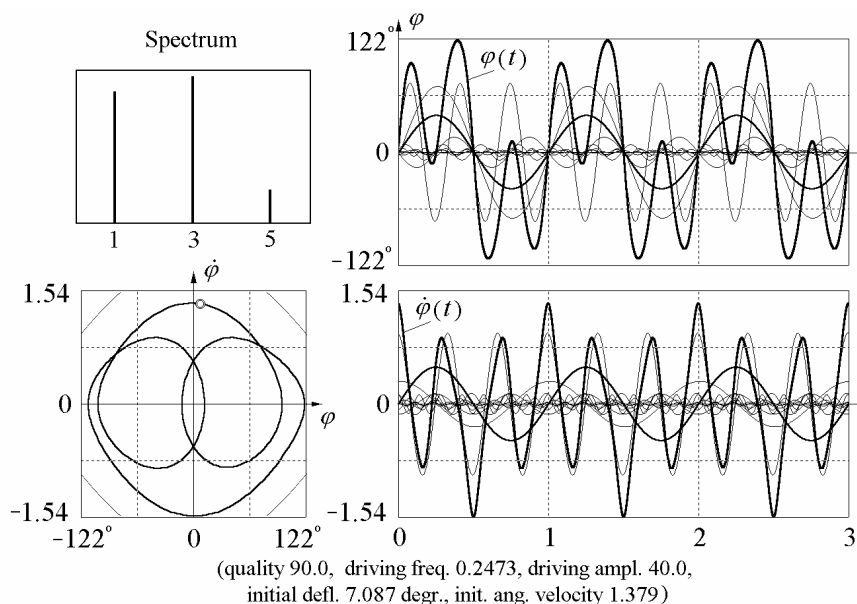


Рис. 1. Спектральный состав и графики временной зависимости угла отклонения и угловой скорости, а также фазовая диаграмма колебаний маятника, возбуждаемого периодическим внешним моментом с синусоидальной зависимостью от времени.

Этот пример поведения нелинейного механического осциллятора, в сочетании с непосредственным наблюдением движения на экране монитора, дает очень наглядное и физически прозрачное представление о возможных механизмах генерации высших гармоник в нелинейной оптике. Мы отчетливо видим, как в данном случае сравнительно низкой частоты возбуждающего момента маятник совершает сравнительно быстрые собственные колебания в медленно движущейся взад-вперед потенциальной яме. За один цикл движения потенциальной ямы маятник совершает ровно три полных собственных колебания. Такая фазовая синхронизация собственных колебаний с вынуждающим внешним моментом («захват» частоты) обеспечивает стационарный режим, в котором энергия, получаемая системой за цикл возбуждения, компенсирует потери энергии на трение.

Неоднозначность реакции нелинейной физической системы (маятника) на синусоидальное внешнее воздействие (бистабильность или мультистабильность) иллюстрирует

рис. 2. При тех же значениях параметров системы и характеристик внешнего воздействия установившиеся колебания имеют совершенно иной характер. В спектре преобладает основная гармоника, а третья и пятая гармоники ответственны лишь за сравнительно небольшое искажение формы колебаний. При таких колебаниях маятник почти все время находится вблизи самого дна движущейся туда и обратно (по синусоидальному закону) потенциальной ямы. Искажение синусоидальной формы графиков объясняется малыми собственными колебаниями маятника вблизи ее дна, синхронизированными с периодическим движением ямы. Каждый из стационарных режимов, на которые система может выйти после переходного процесса при данных значениях параметров, характеризуется определенной областью («бассейном») притяжения на плоскости начальных состояний.

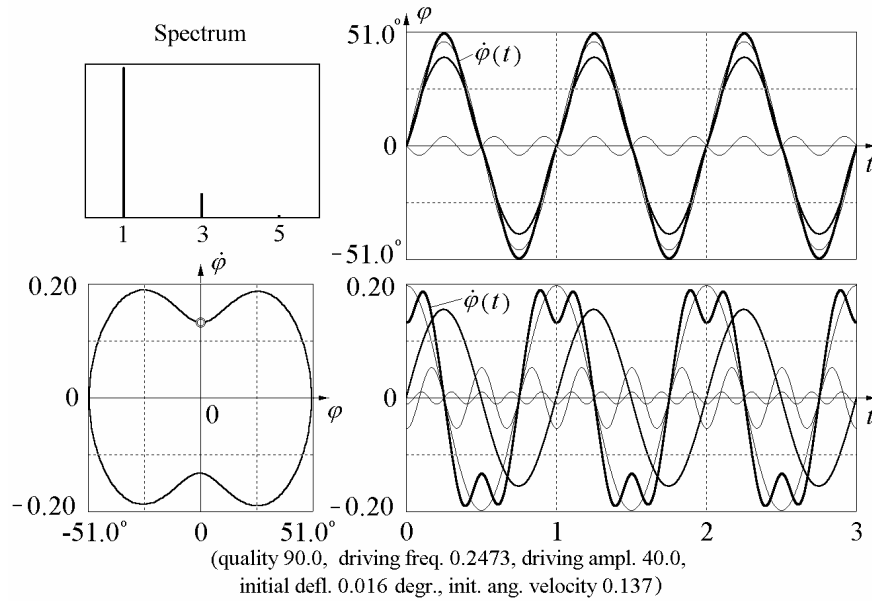


Рис. 2. Спектральный состав и графики временной зависимости угла отклонения и угловой скорости, а также фазовая диаграмма для другого режима стационарных колебаний маятника, существующего при тех же значениях параметров, что и на рис. 1.

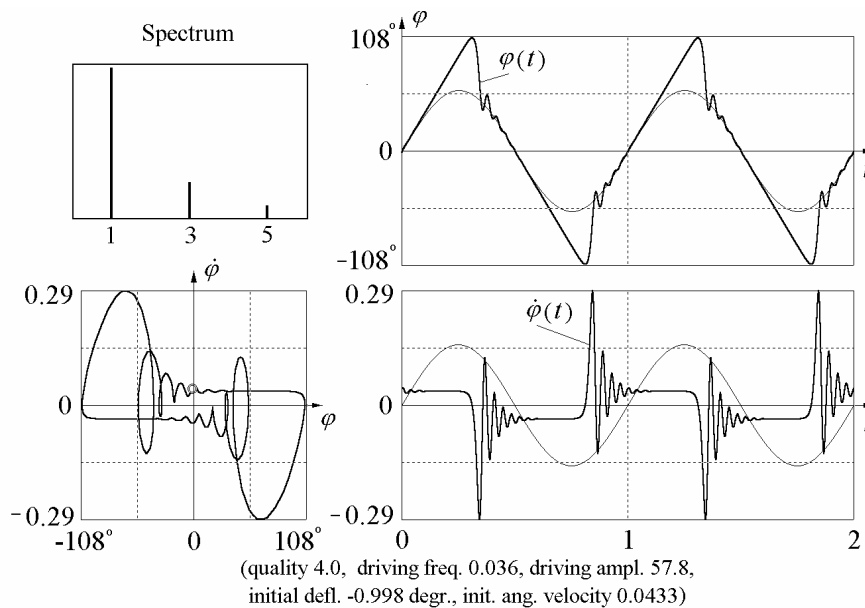


Рис. 3. Спектральный состав, фазовая траектория и графики временной зависимости необычных колебаний маятника под действием внешнего момента с большим периодом и критической амплитудой. Статический внешний момент с такой амплитудой отклонил бы маятник на 90 градусов.

Интересный пример необычного поведения маятника при низкой частоте внешнего момента показан на рис. 3. В этом случае амплитуда внешнего момента немного превышает критическое значение, т.е. при статическом действии такой момент привел бы к переверотам маятника. На протяжении четверти периода, пока вращающий внешний момент возрастает от нуля до максимального значения, маятник поворачивается от своего нижнего вертикального положения в сторону действия момента почти равномерно (с постоянной угловой скоростью) до некоторого максимального угла (за пределы горизонтального отклонения), а когда внешний момент начинает убывать, «срывается» обратно на затухающие колебания в потенциальную яму, дно которой движется к нижнему вертикальному положению. Затем все повторяется в противоположную сторону. График таких колебаний напоминает «пилу» с почти треугольными зубцами.

При небольшом увеличении амплитуды внешнего момента поведение маятника радикально изменяется (см. рис. 4). В этом случае почти равномерный поворот маятника за пределы горизонтального положения под действием медленно нарастающего внешнего момента завершается после изменения направления момента не срывом маятника в затухающие колебания около дна движущейся обратно потенциальной ямы, а резким срывом в быстрое неравномерное вращение в прежнем направлении, постепенно замедляемое нарастающим встречным внешним моментом. После нескольких оборотов постепенно замедляющееся вращение сменяется затухающими колебаниями, приводящими маятник на дно потенциальной ямы, медленно движущейся к нижнему положению. Поскольку время затухания колебаний меньше периода внешнего момента, маятник почти успевает прийти в положение равновесия до начала следующего вращения. Затем все повторяется в противоположном направлении. Весь процесс характеризуется периодом, равным периоду внешнего воздействия.

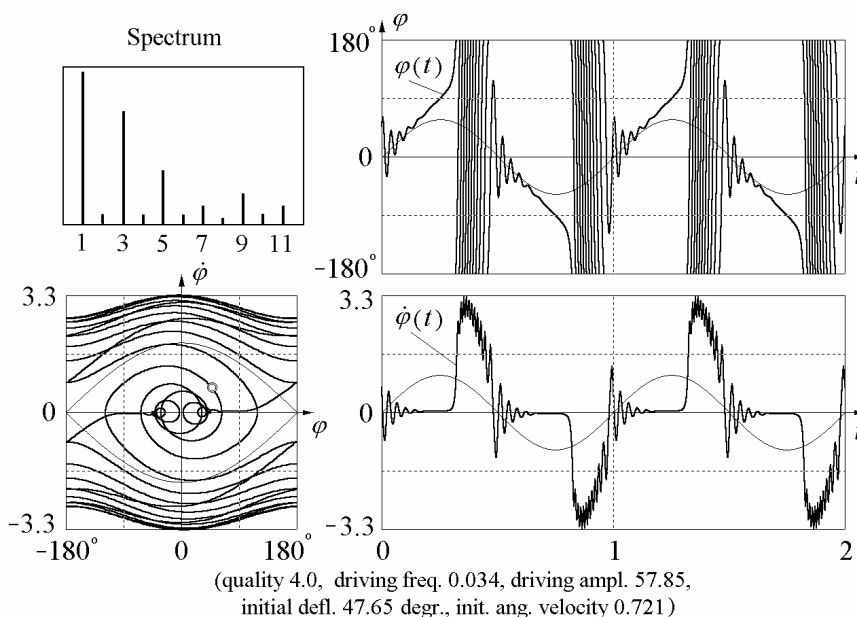


Рис. 4. Спектральный состав, фазовая траектория и графики временной зависимости переверотов и необычных колебаний под действием внешнего момента с большим периодом и амплитудой, немного превышающей критическое значение.

В рассмотренных условиях небольшое увеличение внешнего периода приводит к потере синхронизации движения маятника с изменением внешнего момента и к хаотизации поведения маятника. По-видимому, это связано с чрезвычайной чувствительностью зависимости момента захвата маятника в потенциальную яму (т.е. момента перехода от режима вращения к затухающим колебаниям) от мгновенного состояния маятника. Малейшее изменение (малой) угловой скорости, с которой маятник подходит к пологой вершине по-

тенциального барьера, может привести к дополнительному перевороту перед захватом в режим затухающих колебаний. Такой механизм возникновения динамического хаоса радикально отличается от детально описанных в литературе и часто встречающихся в различных нелинейных системах путей перехода к хаосу при изменении управляющего параметра через бифуркацию нарушения симметрии, сопровождаемую бесконечной последовательностью бифуркаций удвоения периода.

В одной из программ пакета моделируется торсионный пружинный осциллятор с неуравновешенным ротором. При определенных параметрах такой системы линейный возвращающий момент упругой силы и нелинейный момент силы тяжести имеют противоположные знаки, так что соответствующая потенциальная яма может иметь два минимума. При достаточно большой энергии начального возбуждения (превышающей высоту барьера между минимумами) собственные колебания ротора вначале происходят с переваливаниями через барьер из одного минимума в другой и обратно и характеризуются своеобразной временной зависимостью. Установившиеся вынужденные колебания в такой системе отличаются необычайным многообразием различных мод (аттракторов), возможных при одних и тех же значениях параметров. Каждому аттрактору соответствует определенная область притяжения в плоскости начальных состояний.

В методических пособиях к комплексу программ описаны математические модели изучаемых колебательных систем и приведены соответствующие им дифференциальные уравнения. Предложен ряд задач для предварительного аналитического решения и выполнения экспериментов на компьютере. Подчеркнем, что предлагаемый комплекс предназначен в первую очередь для изучения физики с помощью компьютерного моделирования, а не моделирования как такового. Работа студента с программами пакета по своему характеру приближается к небольшому научному исследованию и может составить основу для курсового или дипломного проекта.