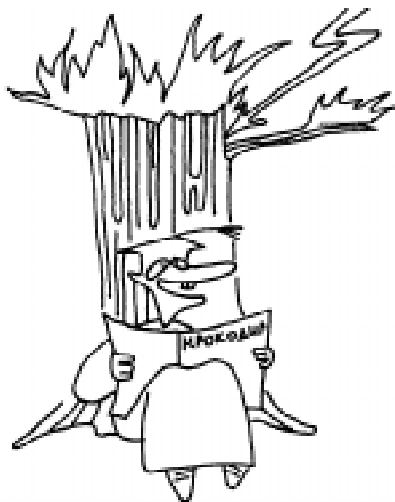


ЛАБОРАТОРИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Окружающий нас мир физических явлений чрезвычайно многообразен и сложен. Чтобы продвинуться в познании этого мира, ученые используют упрощенные математические модели реальных физических систем. Как говорил один из основателей отечественной школы теоретической физики академик Яков Ильич Френкель, физик-теоретик по существу всегда рассматривает не само физическое явление, а карикатуру на него, то есть сильно упрощенную схему явления.



Попытка учесть все сделала бы неразрешимой задачу описания даже весьма простых явлений. Конечно, совершенно необходимо, чтобы выбранная модель сохраняла наиболее важные и самые харак-

терные черты изучаемого реального явления. Можно считать, что мы понимаем физическое явление, если мы в состоянии построить для него адекватную математическую модель. Например, для механического движения тела в заданных силовых полях (то есть под действием известных сил) такая математическая модель дается основным уравнением динамики – вторым законом Ньютона.

В некоторых случаях в рамках принятой модели удастся получить точное или приближенное аналитическое решение поставленной задачи. Например, для движения тела (материальной точки) под действием единственной постоянной силы (скажем, для задачи о движении брошенного тела вблизи поверхности земли без учета сопротивления воздуха) такое решение дается известными из школьного курса формулами равноускоренного движения. Аналитическое решение уравнений динамики можно получить и для так называемой задачи Кеплера, в которой рассматривается движение материальной точки под действием центральной силы тяготения, убывающей обратно пропорционально квадрату расстояния от центра (задача о движении планеты вокруг Солнца или спутника вокруг Земли).

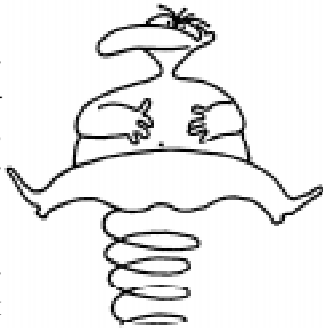
К сожалению, точные аналитические решения, подобные движению в однородном поле тяготения или кеплерову движению в центральном кулоновом поле, редко встречаются в физике. При наличии возмущающих воздействий (скажем, со-

противления воздуха в первом примере или тяготения других планет во втором примере) дифференциальные уравнения движения становятся неинтегрируемыми, и аналитическое исследование движения неизмеримо усложняется. В таких случаях на помощь исследователю приходят численные методы решения уравнений движения, и проверить правильность своих представлений о реальном изучаемом явлении он может с помощью вычислительного эксперимента на компьютере.

Вычислительный эксперимент – это метод изучения физического явления путем построения его математической модели и последующего численного исследования этой модели, позволяющего «проиграть» ее поведение в различных условиях. Компьютерное моделирование может оказать существенную помощь как исследователю, прокладывающему путь в неизведанное, так и учащемуся, осваивающему новые для себя знания.

Поясним идею численных методов на примере расчета движения тела под действием сил, зависимость которых от положения и скорости тела известна. Примером такой физической системы может служить линейный осциллятор – тело на пружине, сила упругости которой пропорциональна ее удлинению ($F = -kx$ – закон Гука), причем движение тела происходит с сопротивлением, сила которого пропорциональна скорости и направлена против скорости ($F_{тр} = -\lambda v$).

Пусть для некоторого момента времени (начального момента) известны положение x_0 и скорость v_0 рассматриваемого тела (то есть известно его механическое состояние). Тем самым нам известны силы, действующие в этот момент на тело, и, на основании второго закона Ньютона, мы можем рассчитать ускорение тела a_0 в этот момент. Считая это ускорение



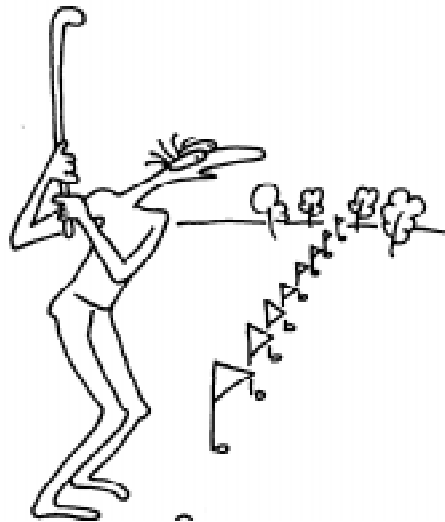
постоянным, по известным формулам равноускоренного движения можно приближенно найти скорость и положение тела через небольшой промежуток времени Δt («шаг» интегрирования):

$$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t, \quad x_1 = x_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a_0 (\Delta t)^2.$$

Чем меньше шаг интегрирования Δt , тем меньше ошибка в определении x_1 и v_1 , происходящая от предположения, что движение в течение Δt происходит с постоянным ускорением a_0 . Затем для рассчитанных значений x_1 и v_1 нового механического состояния в конце интервала Δt находим новые значения каждой из действующих сил и, с помощью второго закона Ньютона, определяем ускорение a_1 для следующего интервала времени Δt . Считая это новое ускорение a_1 постоянным на протяжении следующего шага интегрирования, снова применяем формулы равноускоренного движения, в которых роль начальных значений положения x_0 и скорости v_0 выполняют уже x_1 и v_1 :

$$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t, \quad x_2 = x_1 + v_1 \Delta t + \frac{1}{2} a_1 (\Delta t)^2.$$

Затем по той же схеме расчет повторяется еще раз для нахождения следующих значений положения тела и его скорости, и так далее. Таким путем можно проследить шаг за шагом все движение. Чтобы найти изменение механического состояния тела за большой промежуток времени, придется разбить этот промежуток на большое число малых шагов Δt . Чем



меньше размер каждого шага, тем точнее полученный результат. Но необходимое число шагов при этом увеличивается. За повышение точности результатов приходится платить увеличением объема вычислений. Практически такие расчеты удобно производить на компьютере. Современные компьютеры позволяют производить численное решение уравнений движения быстро и эффективно.

КОМПЬЮТЕРНАЯ ЛАБОРАТОРИЯ ПО ФИЗИКЕ КОЛЕБАНИЙ

Мы предлагаем использовать возможности компьютерного моделирования для изучения колебаний – важного раздела курса физики.



Без преувеличения можно сказать, что колебания окружают нас всюду. Осциллирующие электрическое и магнитное поля приносят свет в наши глаза. Вибрирующий воздух приносит звуки к нашим ушам. Благодаря световым и акустическим колебаниям, мы получаем большую часть информации об окружающем нас мире. Электромагнитные колебания (в частности, световые, или оптические колебания) лежат в основе всех современных электронных средств передачи и обработки информации. Значение колебательных процессов в природе и технике трудно переоценить.

Колебания в различных физических системах могут иметь совершенно разную природу. Но тем не менее колебания разной физической природы имеют много общего. Изучение общих закономерностей

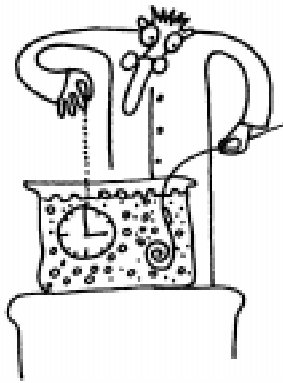
всех колебательных процессов составляет предмет теории колебаний.

Для облегчения понимания общих закономерностей колебательных процессов целесообразно начинать их изучение с наиболее наглядных примеров, в которых движение доступно непосредственному зрительному восприятию. Это прежде всего такие знакомые всем механические колебательные системы, как груз на пружине и простой маятник. Электромагнитным аналогом этих механических систем может служить замкнутая цепь, содержащая конденсатор и катушку индуктивности. Изменение во времени физических величин, характеризующих разные колебательные системы, описывается одинаковыми дифференциальными уравнениями. Разобравшись в происходящих на наших глазах колебаниях груза на пружине, мы по аналогии легко освоимся с закономерностями колебаний в электромагнитном контуре, где все далеко не так наглядно.

Для компьютерного моделирования в предлагаемых программах выбраны механические колебательные системы, потому что их движение можно непосредственно отобразить на экране. Моделирование позволяет получить наглядные, запоминающиеся иллюстрации изучаемых физических явлений во всей их динамике, воспроизвести тонкие детали явлений, ускользающие обычно при непосредственном наблюдении. Можно изменять временной масштаб, варьировать в широких пределах параметры и условия эксперимента, моделировать ситуации, недоступные для изучения в натурном эксперименте. Моделирующие программы позволяют строить графики временной зависимости описывающих систему переменных, получать фазовую траекторию, отображать энергетические превращения при колебаниях. Графический способ отображения результатов моделирования облегчает усвоение больших объемов получаемой информации. Графики зависимости всех переменных от времени выводятся на экран одновременно с отображением движения

самой системы. Это придает графикам особую наглядность и облегчает понимание общих закономерностей изучаемых процессов.

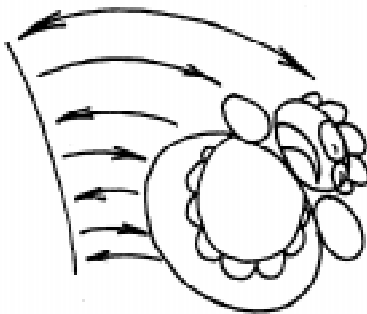
Предлагаемые вниманию читателя компьютерные программы представляют собой своего рода настольную лабораторию для изучения колебаний с помощью математических моделей сравнительно простых физических систем. Подчеркнем, что программы предназначены для изучения физики, а не информатики. Для работы с ними не нужно уметь программировать. Если проводить параллель с экспериментальной физикой, то этим программам можно сопоставить уже готовые и тщательно отлаженные экспериментальные установки. Важно лишь понимать, как и что именно измеряет тот или иной прибор, и совсем не обязательно знать детали его внутреннего устройства.



Так и с нашими программами: поскольку вся работа по программированию уже выполнена заранее, мы можем сосредоточиться на физике изучаемых явлений, не отвлекаясь на чисто технические проблемы моделирования.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОСТЫХ СИСТЕМ

Положение равновесия физической системы называется *устойчивым*, если силы, возникающие при отклонении от равновесия, стремятся вернуть систему в положение равновесия. Такие силы называют *восстанавливающими*, независимо от их физической при-

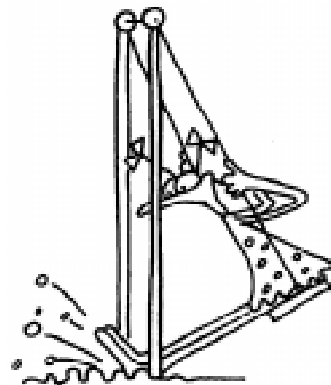


роды. Например, устойчиво равновесие груза, подвешенного на пружине. Устойчиво также нижнее положение маятника в поле тяжести. Если подобную систему вывести из равновесия (оттянуть вниз груз, подвешенный на пружине, отклонить в сторону маятник), возвращающая сила будет сообщать телу ускорение в сторону положения равновесия. По инерции тело проскакивает положение равновесия. Теперь восстанавливающая сила замедляет его движение. После достижения точки наибольшего удаления от положения равновесия (*точки поворота*) все движение повторяется в обратном направлении. В результате возникают колебания около положения устойчивого равновесия.

Таким образом, если физическую систему вывести из равновесия каким-либо внешним воздействием и затем предоставить самой себе, она будет совершать колебания, которые принято называть *собственными* или *свободными*. Подчеркнем, что собственные колебания могут происходить лишь в системах, обладающих устойчивым положением равновесия.

В отсутствие трения (или электрического сопротивления), то есть в идеализированной *консервативной физической системе*, собственные колебания будут строго периодическими: через определенный промежуток времени, называемый *периодом*, состояние системы полностью воспроизводится. Такие *незатухающие колебания* происходят с неизменным размахом (амплитудой). При наличии трения, неизбежного в любой реальной системе, происходит *затухание* собственных колебаний, обусловленное диссипацией (рассеянием) механической (или электромагнитной) энергии.

Мы начнем с изучения собственных коле-

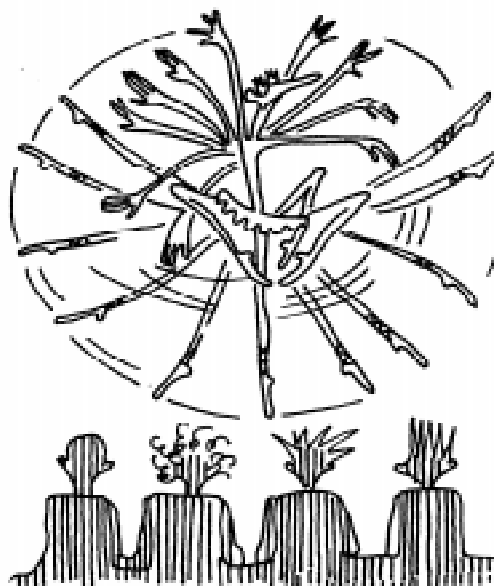


баний наиболее простой системы – так называемого линейного осциллятора, описываемого дифференциальным уравнением, в которое искомая функция и ее производные входят линейно (в первой степени). Для линейного уравнения существует аналитическое решение, детально обсуждаемое в следующем разделе. Но при компьютерном моделировании это решение не используется. Совпадение наблюдаемых результатов численного интегрирования с аналитическими предсказаниями может служить для подтверждения качества используемого программой алгоритма. Такая проверка придаст убедительность результатам моделирования нелинейных колебательных систем в последующих лабораторных работах, где использован тот же самый алгоритм.

ЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Наиболее простым закономерностям подчиняются колебания в *линейных системах*, описываемых линейными дифференциальными уравнениями. Линейный или гармонический осциллятор – это любая система, в которой при смещении из положения равновесия возникает возвращающая сила, пропорциональная смещению. Механические примеры таких систем – груз на упругой пружине, подчиняющейся закону Гука, или маховик (ротор) с упругой спиральной пружиной, закручивающейся при его повороте вокруг оси, как у балансира механических наручных или карманных часов. Крутильные колебания такого торсионного линейного осциллятора моделируются в описываемых учебных компьютерных программах. Условное изображение торсионного пружинного осциллятора и его электромагнитного аналога – последовательного LCR-контура – показано на рисунке 1.

Для удобства наблюдения крутильных колебаний в компьютерной программе можно выбрать опцию условного изображения системы, на котором вместо маховика в виде стержня с закрепленными на нем грузами показана только прикрепленная к ротору стрелка.



Дифференциальное уравнение, описывающее изменение со временем механического состояния осциллятора, совершающего собственные колебания, следует из основного закона динамики – второго закона Ньютона. В случае груза на пружине возвращающая сила F , действующая на груз со стороны пружины, пропорциональна смещению груза из поло-

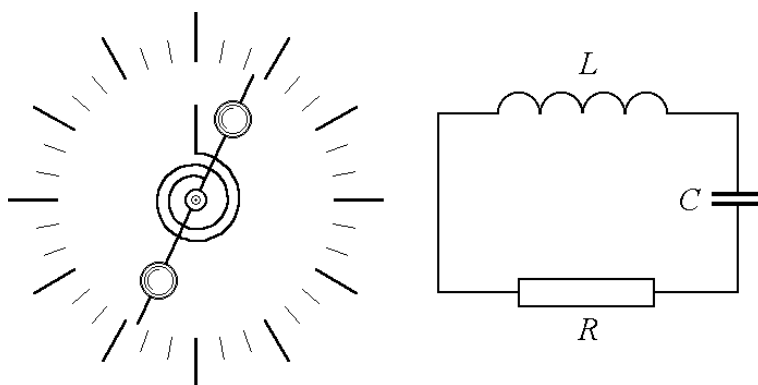


Рисунок 1. Механический пружинный осциллятор (ротор со спиральной пружиной) и его электромагнитный аналог – колебательный контур.

жения равновесия: $F = -kx$. Коэффициент k в этом соотношении называется жесткостью пружины. В отсутствие других сил, уравнение второго закона Ньютона принимает вид:

$$m\ddot{x} = -kx,$$

или, после деления обеих частей на массу m ,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ где } \omega_0^2 = k/m.$$

(Точкой над символом обозначено, как это обычно принято, дифференцирование по времени). Общее решение этого уравнения представляет собой гармоническое (синусоидальное) колебание с произвольными амплитудой a и начальной фазой δ :

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \delta).$$

Крутильные колебания пружинного осциллятора, показанного на рисунке 1, описываются точно таким же дифференциальным уравнением. При повороте маховика из положения равновесия на угол φ прикрепленная к нему спиральная пружина (другой конец которой закреплен неподвижно) закручивается и создает возвращающий момент N , пропорциональный углу отклонения:

$$N = -D\varphi.$$

Коэффициент пропорциональности D называется жесткостью пружины. Угол отклонения маховика из положения равновесия измеряется по неподвижной шкале при помощи стрелки, прикрепленной к маховику. В положении равновесия стрелка указывает на нулевое деление шкалы. Угол φ измеряется в радианах, хотя в моделирующей программе для удобства наблюдения шкала проградуирована в более привычных для нас градусах.

Применяя к движению маховика с моментом инерции J основное уравнение динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, получаем следующее дифференциальное уравнение собственных колебаний торсионного пружинного осциллятора:

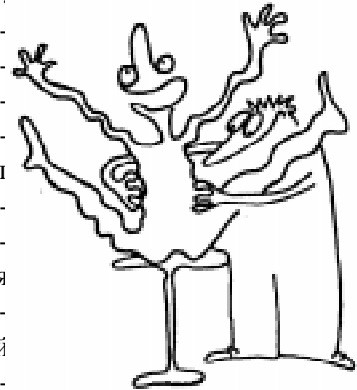
$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi, \text{ или } \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0.$$

Здесь введено обозначение $\omega_0^2 = D/J$. Общее решение этого уравнения тоже представляет собой простое гармоническое колебание:

$$\varphi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \delta).$$

Амплитуда A_0 и начальная фаза δ зависят от начальных условий, то есть от угла отклонения $\varphi(0)$ и угловой скорости $d\varphi/dt$ при $t = 0$.

Другими словами, эти характеристики колебательного движения зависят от способа возбуждения колебаний. Колебания происходят с угловой частотой ω_0 , квадрат которой пропорционален жесткости пружины D и обратно пропорционален моменту инерции J маховика. Частота ω_0 и соответствующий ей период $T_0 = 2\pi/\omega_0$, в отличие от амплитуды и начальной фазы, не зависят от начальных условий – они целиком определяются свойствами самого осциллятора, то есть значениями параметров осциллятора D и J . Собственные колебания линейного осциллятора всегда происходят с одной и той же собственной частотой ω_0 , независимо от способа возбуждения. Независимость частоты собственных колебаний от начальных условий, а следовательно, от амплитуды (и энергии) колебаний, называют *изохронностью* линейного осциллятора.



При моделировании колебаний линейного осциллятора в компьютерной программе период собственных колебаний в отсутствие трения $T_0 = 2\pi/\omega_0$ выбирается как естественная для осциллятора единица времени. Поэтому при работе с программой нет необходимости задавать ни момент инерции маховика J , ни жесткость пружины D , ни даже их отношение $D/J = \omega_0^2$, которым определяется собственная частота осциллятора. Угол отклонения ротора от положения равновесия при численном моделировании измеряется в радианах (но шкала и графики $\varphi(t)$ для удобства проградуированы в угловых градусах), а угловая скорость $d\varphi/dt$ ротора измеряется в единицах собственной круговой частоты $\omega_0 = 2\pi/T_0$ (в оборотах

за период). При задании начальных условий угловую скорость ротора нужно также выражать в единицах ω_0 (а начальный угол отклонения – в градусах).

При наличии силы вязкого трения в дифференциальном уравнении осциллятора будет присутствовать тормозящий момент этой силы, пропорциональный угловой скорости ротора $d\varphi/dt$:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

где *постоянная затухания* γ характеризует интенсивность вязкого трения в системе. Постоянная затухания γ , как и ω_0 , имеет размерность частоты.



Дифференциальные уравнения собственных колебаний *однородны*, так как искомая функция или ее производные присутствуют в одинаковой степени во всех членах уравнения. Однородность уравнений отражает отсутствие возбуждающей внешней силы. Таким образом, собственные колебания моделируемой системы описываются однородным линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Как и любое однородное уравне-

ние, оно имеет тривиальное нулевое решение $\varphi(t) = 0, d\varphi(t)/dt = 0$. Такое решение соответствует отсутствию начального возбуждения (нулевым начальным условиями) и описывает осциллятор, который постоянно находится в покое в положении равновесия. Собственные колебания осциллятора могут возникнуть только в результате некоторого начального возбуждения.

Если трение настолько слабо, что $\gamma < \omega_0$, общее решение уравнения имеет колебательный характер и может быть представлено в следующем виде:

$$\varphi(t) = A_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \delta).$$

Это решение описывает затухающие колебания, амплитуда которых $A_0 \exp(-\gamma t)$ экспоненциально убывает со временем. Начальное значение амплитуды A_0 и начальная фаза δ определяются из начальных условий. Частота ω_1 периодического (косинусоидального) сомножителя дается следующим выражением:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}$$

В случае слабого трения, когда постоянная затухания γ мала по сравнению с величиной ω_0 , характеризующей собственную частоту в отсутствие трения, частота ω_1 косинусоидального сомножителя очень близка к ω_0 :

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \gamma^2/2\omega_0.$$

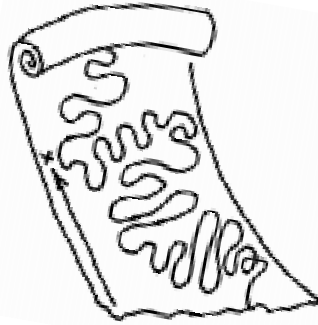
Относительное отклонение частоты затухающих колебаний ω_1 от собственной частоты осциллятора $(\omega_0 - \omega_1)/\omega_0$ пропорционально квадрату малого параметра γ/ω_0 .

Графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости при затухающих колебаниях показаны на рисунке 2 для случая возбуждения собственных колебаний начальным отклонением ротора из положения равновесия при нулевой начальной скорости. Эти графики получены с помощью моделирующей программы путем



Рисунок 2. Графики затухающих колебаний осциллятора, происходящих после начального возбуждения отклонением из положения равновесия.

численного интегрирования дифференциального уравнения колебаний. Программа позволяет не только наблюдать построение графиков на экране одновременно с отображением движения осциллятора, но и распечатывать графики. Для этого нужно выбрать в меню пункт «Печать графиков» и с помощью открывшейся диалоговой панели ввести необходимые параметры. Графики получатся плавными, без зазубрин, так как они будут выведены на бумагу с разрешением, которое доступно в Вашу систему принтера (а не с разрешением экрана монитора).



В условиях слабого и умеренного трения зависящий от времени множитель $A_0 \exp(-\gamma t)$ можно рассматривать как постепенно уменьшающуюся амплитуду затухающих колебаний. Спустя промежуток времени $\tau = 1/\gamma$ эта амплитуда приблизительно в $e = 2.72$ раз меньше своего начального значения. Время τ называется *временем затухания* или *временем жизни* колебаний. Хотя формально колебания продолжают бесконечно долго, характерное время τ условно можно рассматривать как длительность процесса затухания колебаний: за конечное число таких интервалов амплитуда становится меньше любого сколь угодно малого значения.

При малом трении, когда $\gamma \ll \omega_0$, или $\tau \gg T_0 = 2\pi/\omega_0$ (условие слабого затухания), осциллятор совершает большое число N циклов собственных колебаний в течение времени жизни τ : $N = \tau/T_0 \gg 1$. Последовательные максимальные отклонения из положения равновесия убывают в геометрической прогрессии. В самом деле, пусть φ_n есть максимальное отклонение ротора при n -м колебании. Тогда

$$\varphi_{n+1} / \varphi_n \approx \exp(-\gamma T_0) \approx 1 - \gamma T_0.$$

Таким образом, отношение последовательных членов (знаменатель) этой бесконечно убывающей геометрической

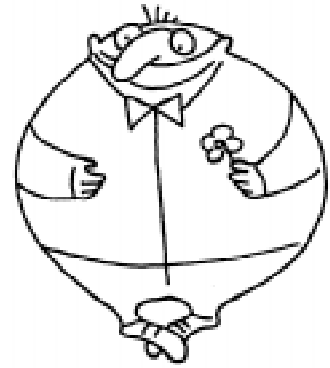
прогрессии меньше единицы на величину $\gamma T_0 = T_0 \ll 1$. Для характеристики быстроты затухания колебаний используют, наряду с размерной постоянной затухания γ , также безразмерный *логарифмический декремент затухания*, определяемый как натуральный логарифм отношения последовательных максимальных отклонений в одну сторону. Обратная логарифмическому декременту величина – это число циклов колебаний, совершаемых осциллятором за время затухания τ . Другая эквивалентная логарифмическому декременту безразмерная величина, используемая для характеристики быстроты затухания колебаний, – это *добротность* Q , определяемая соотношением:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \pi \frac{\tau}{T_0}.$$

Число циклов, на протяжении которых размах колебаний осциллятора уменьшается в $e = 2.72$ раза, равно деленному на $\pi = 3.14$ значению его добротности. Число колебаний $N_{1/2}$, на протяжении которых амплитуда уменьшается вдвое, выражается через добротность следующим соотношением: $N_{1/2} = (\ln 2 / \pi) Q = 0.22Q = Q / 4.53$.

Таким образом, в принятой модели осциллятор полностью характеризуется единственным физическим параметром γ / ω_0 – безразмерным отношением коэффициента затухания к собственной частоте или, как это сделано в программе, более распространенной эквивалентной характеристикой – добротностью $Q = \omega_0 / 2\gamma$.

Моделирующая программа позволяет легко проверить предсказанную выше теоретическую закономерность убывания амплитуды колебаний. Чтобы на опыте убедиться в том, что последовательность максимальных отклонений образует геометрическую прогрессию, можно для простоты ввести такое значение добротности, при котором амплитуда убывает вдвое за целое число циклов, скажем, за два



($Q = 9.06$) или четыре ($Q = 18.1$) цикла. Подчеркнем, что при моделировании обсуждаемое здесь аналитическое решение не используется, а выполняется численное интегрирование уравнения движения.

Когда $\gamma \geq \omega_0$ (условие сильного затухания), осциллятор после начального возбуждения возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. В этом движении ротор либо асимптотически приближается к положению равновесия с одной стороны, либо только один раз пересекает среднее положение и затем приближается к нему с другой стороны. Последний случай возможен, если при возбуждении ротор получает достаточно большую начальную скорость в направлении положения равновесия.

Если $\gamma = \omega_0$, затухание осциллятора называют *критическим*. В этом случае общее решение дифференциального уравнения колебаний принимает следующий вид:

$$\varphi(t) = (C_1 t + C_2) \exp(-\gamma t),$$

где C_1 и C_2 – константы, значения которых определяются из начальных условий. Например, если находящийся в положении равновесия ротор ($\varphi(0) = 0$) в результате толчка получает начальную скорость $d\varphi/dt(0) = \Omega$, то $C_1 = \Omega$, $C_2 = 0$, и дальнейшее движение ротора описывается функцией

$$\varphi(t) = \Omega t \exp(-\gamma t).$$

Графики зависимости от времени

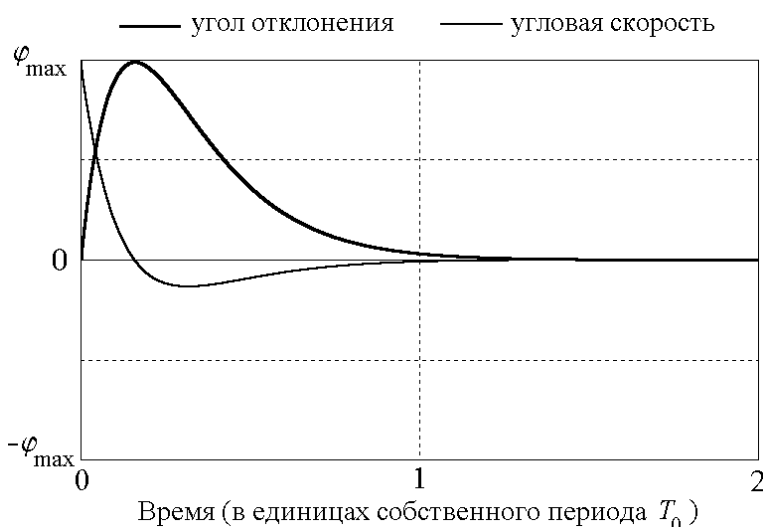
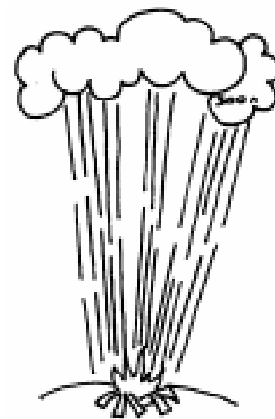


Рисунок 3. Графики угла отклонения и угловой скорости при критическом затухании.

угла отклонения и угловой скорости для осциллятора с критическим затуханием, движение которого возбуждается начальным толчком из положения равновесия, показаны на рисунке 3. Критическому затуханию, то есть случаю $\gamma = \omega_0$, соответствует добротность $Q = 0.5$.

Система с затуханием, близким к критическому, после начального возбуждения возвращается в состояние покоя в положении равновесия в общем случае быстрее, чем при других значениях постоянной затухания γ (при данном значении ω_0). В измерительных приборах (таких, как гальванометры с подвижной катушкой) затухание вводится



преднамеренно, чтобы преодолеть трудности считывания показаний при осциллирующей стрелке. В приборе с критическим затуханием подвижная система приходит в равновесие и успокаивается, не совершая колебаний. При недостаточном демпфировании прибора стрелка совершает колебания перед остановкой. В случае передемпфированного прибора (при сверхкритическом затухании) стрелка не совершает колебаний, но для ее прихода в положение равновесия, вообще говоря, требуется большее время, по сравнению со случаем критического демпфирования.

Другой пример преднамеренного введения затухания, близкого к критическому – применение гидравлических амортизаторов в упругой подвеске кузова автомобиля. При неисправных амортизаторах после каждого бугорка или ямки на дороге ку-

зов автомобиля совершает колебания, неприятные для пассажиров и опасные с точки зрения надежности сцепления колес с дорогой.

ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Механическое состояние торсионного осциллятора определяется двумя динамическими переменными: *обобщенной координатой* (углом отклонения) φ и *обобщенной скоростью* (угловой скоростью) $d\varphi/dt$ или, что эквивалентно, углом отклонения φ и угловым моментом (моментом импульса) $Jd\varphi/dt$.

Механическое состояние динамической системы в любой момент времени можно наглядно изобразить с помощью точки (*изображающей точки*) в фазовом пространстве. Для системы с одной степенью сво-

боды, положение которой определяется единственной координатой (в случае торсионного осциллятора это угол отклонения), фазовое пространство динамических переменных двумерно, то есть представляет собой плоскость. На такой *фазовой плоскости* по оси абсцисс отложена обобщенная координата (угол отклонения) φ , а по оси ординат – угловая скорость $d\varphi/dt$. Очень наглядное графическое представление всему процессу эволюции механического состояния системы дает *фазовая диаграмма*, то есть линия, которую изображающая точка вычерчивает на фазовой плоскости. Фазовая диаграмма для торсионного осциллятора – это график зависимости угловой скорости $d\varphi/dt$ (или момента импульса $Jd\varphi/dt$) от угла отклонения φ .

Если система совершает *периодическое движение*, изображающая точка на фазовой плоскости описывает замкнутую

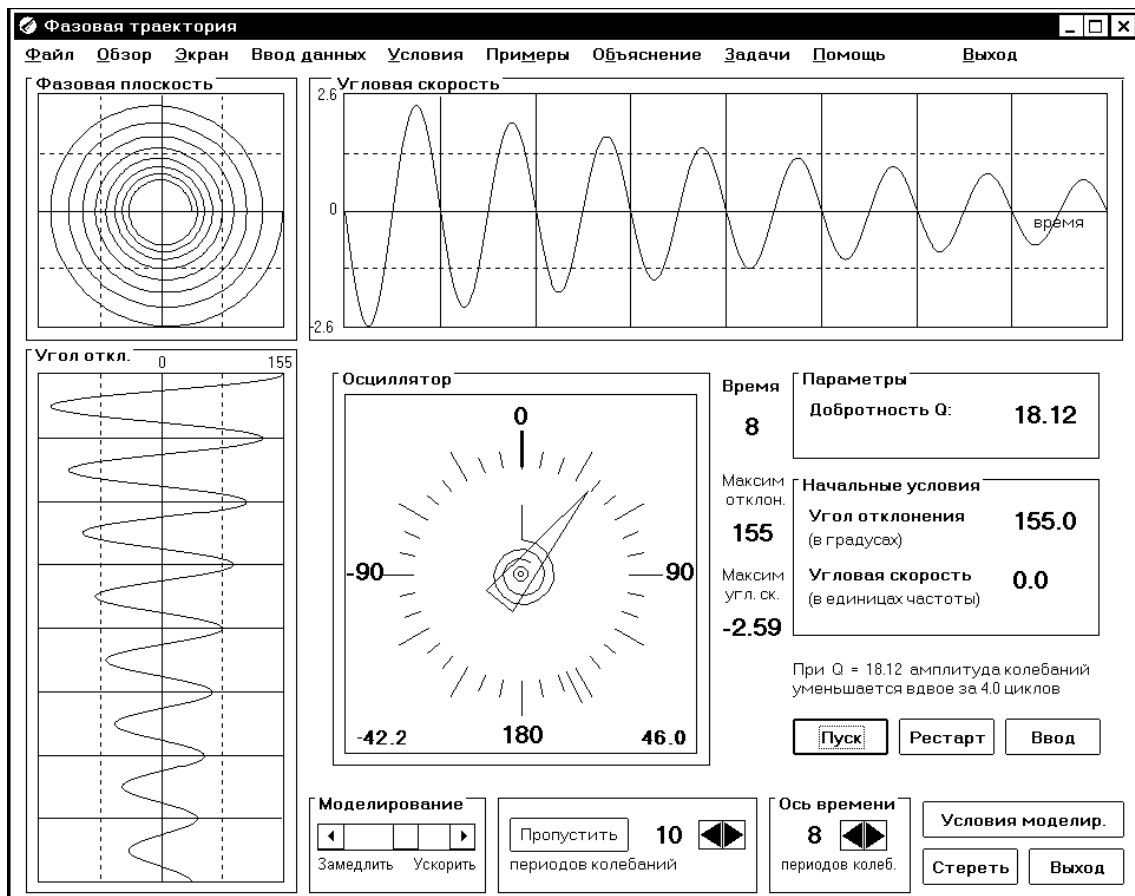


Рисунок 4. Взаимное расположение фазовой плоскости и графиков угла отклонения и угловой скорости на экране.

кривую, двигаясь по ней в направлении по часовой стрелке. Фазовая траектория периодического движения замкнута, потому что система возвращается в исходное механическое состояние после каждого полного цикла колебаний.

В моделирующей программе (при работе в окне «Фазовая траектория», рисунок 4) выбрано такое взаимное расположение фазовой плоскости и графиков зависимости угла отклонения и угловой скорости от времени, чтобы было удобно в каждый момент времени сопоставлять движущуюся по фазовой плоскости изображающую точку с выводимыми одновременно на графики значениями динамических переменных (угла отклонения и угловой скорости). Для этого направления соответствующих осей и масштабы по ним на фазовой диаграмме и на графиках временной зависимости выбраны одинаковыми, а ось времени на графике угла отклонения направлена вниз.

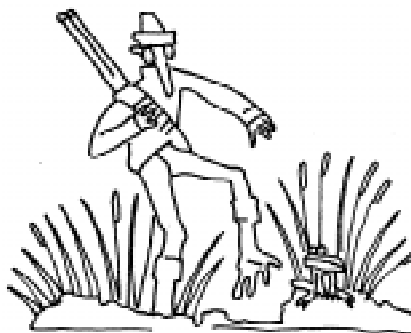
Совокупность фазовых траекторий, соответствующих разным способам возбуждения (разным начальным условиям) при неизменных параметрах системы образует ее *фазовый портрет*. Через каждую точку фазовой плоскости проходит, вообще говоря, только одна фазовая траектория: если эту точку выбрать в качестве начального состояния системы, дальнейшее движение системы будет определено однозначно в соответствии с единственностью решения задачи Коши для дифференциального уравнения системы. Это движение и будет происходить вдоль фазовой траектории, проходящей через данную точку фазовой плоскости. Другими словами, фазовые траектории системы не пересекаются. Исключения составляют лишь отдельные, изолированные точки фазовой плоскости. Такие точки, через которые проходит более одной фазовой траектории или не проходит ни одной траектории, называются *особыми*. Примеры особых точек будут рассмотрены ниже. Фазовый портрет (вместе с совокупностью особых точек) дает очень наглядное графическое представление о возможных движениях изучаемой ди-

намической системы.

Фазовая траектория гармонических колебаний (например, собственных колебаний линейного осциллятора в отсутствие трения) представляет собой эллипс (или окружность при соответствующем выборе масштаба). Точки, где фазовая траектория пересекает ось абсцисс (в этих точках поворота скорость изменяет знак), соответствуют максимальным отклонениям ротора из положения равновесия. Фазовый портрет консервативного линейного осциллятора образован набором геометрически подобных эллипсов с общим центром в начале координат фазовой плоскости. Этот центр изображает состояние покоя осциллятора в положении равновесия. Так как через начало координат не проходит ни одна из фазовых траекторий (все траектории окружают эту точку), такая точка фазовой плоскости называется особой точкой типа *центр*.

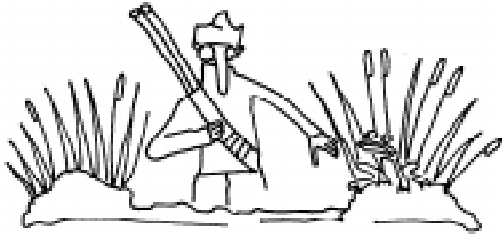
Как уже отмечалось, период гармонических колебаний целиком определяется параметрами физической системы, а именно, значениями жесткости пружины D и моментом инерции ротора J . В отличие от амплитуды и начальной фазы, период не зависит от начальных условий, то есть от способа возбуждения колебаний. Это свойство линейного осциллятора называется *изохронностью*. Благодаря свойству изохронности, изображающие точки обходят эллипсы разных размеров на фазовом портрете осциллятора (соответствующие разным амплитудам колебаний осциллятора с данными параметрами) в течение одного и того же времени T_0 .

В присутствии сравнительно слабого вязкого трения ($\gamma < \omega_0$) максимальные



отклонения, как и максимальные значения угловой скорости, постепенно уменьшаются с каждым последующим циклом колебаний. Поэтому фазовая траектория собственных колебаний, благодаря трению, трансформируется из замкнутой кривой (эллипса или окружности) для консервативного осциллятора в постепенно скручивающуюся спираль, сжимающуюся витки которой наматываются вокруг фокальной точки, расположенной в начале координат фазовой плоскости. В этом случае начало координат из особой точки типа центр превращается в особую точку типа фокус. Для семейства фазовых траекторий фокус представляет собой *аттрактор* (от англ. *attract* – притягивать): все фазовые траектории, независимо от того, где они начинаются, асимптотически приближаются к фокусу, совершая вокруг него бесконечное число оборотов по все более сжимающимся виткам (левая часть рисунка 5).

В случае сравнительно сильного вязкого трения ($\gamma \geq \omega_0$) аттрактор фазовых



траекторий из фокуса превращается в особую точку типа узел: все фазовые траектории неколебательных движений приближаются к этому узлу напрямую без наматывания, не совершив ни одного оборота. Фазовый портрет передемпфированной системы показан в правой части рисунка 5. Все фазовые траектории асимптотически приближаются к началу координат, где у них общая касательная.

Таким образом, на фазовом портрете линейного осциллятора имеется только одна особая точка:

начало координат фазовой плоскости, где обе динамические переменные φ и $d\varphi/dt$ равны нулю. Как уже отмечалось, этой точке соответствует состояние покоя в положении равновесия. При $\gamma = 0$ это точка типа центр, через которую не проходит ни одна траектория. При $\gamma < \omega_0$ это фокус, а при $\gamma \geq \omega_0$ это узел фазовых траекторий.

Особые точки типа фокус и узел дают примеры аттракторов, к которым притягиваются все фазовые траектории. При изучении движения жесткого маятника в поле тяжести мы встретимся еще с одним типом особых точек, возможных в нелинейных консервативных системах, а именно, с особой точкой типа седло, через которую проходят две фазовые траектории.

ПРЕВРАЩЕНИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ

Полная энергия E торсионного пружинного осциллятора представляет собой сумму потенциальной энергии E_{pot} упруго деформированной пружины и кинетической энергии E_{kin} вращающегося маховика:

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} D\varphi^2 + \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2.$$

Собственные колебания в отсутствие трения характеризуются обратимыми превращениями энергии одного из этих видов полностью в другой и обратно. В точках максимального отклонения от положения равновесия кинетическая энергия

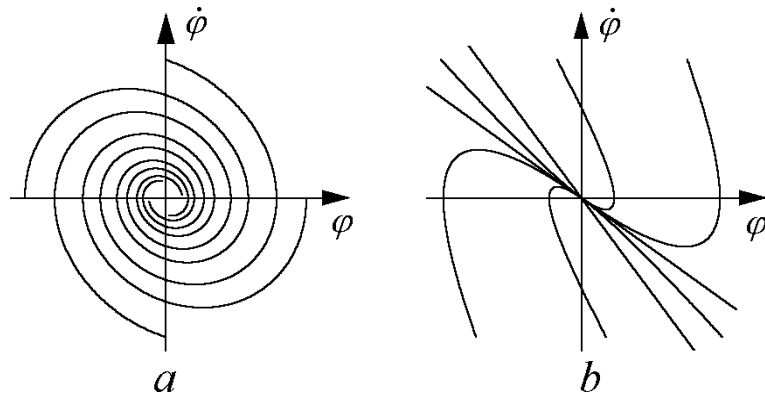


Рисунок 5. Фазовый портрет затухающего линейного осциллятора (a) и системы со сверхкритическим затуханием ($\gamma > \omega_0$) (b).

равна нулю, и полная энергия осциллятора представляет собой потенциальную энергию деформированной пружины. Спустя четверть периода колебаний ротор проходит через положение равновесия, где потенциальная энергия пружины равна нулю, и полная энергия осциллятора представляет собой кинетическую энергию вращающегося маховика. В течение следующей четверти периода происходит обратное превращение энергии: кинетическая энергия превращается в потенциальную энергию упругой деформации. Таким образом, два вида энергии совершают колебания в противофазе друг с другом на частоте $2\omega_0$, то есть на удвоенной частоте ω_0 колебаний угла отклонения осциллятора.

Описанный выше полный обмен между двумя видами энергии характерен для консервативной системы, в которой энергетические превращения обратимы.

Сумма кинетической и потенциальной энергий, то есть полная энергия E осциллятора, имеет одно и то же значение в любой момент времени. Это значение совпадает с максимальными значениями каждого из двух видов энергии. Полная энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды его колебаний. Средние за период колебаний значения кинетической и потенциальной энергии осциллятора, совершающего собственные колебания, равны друг другу и составляют половину неизменного значения полной энергии.

При наличии трения взаимные превращения потенциальной и кинетической энергий становятся частично необратимыми из-за рассеяния (диссипации) механической энергии. Графики энергетических превращений при затухающих колебаниях показаны на рисунке 6. Отметим, что

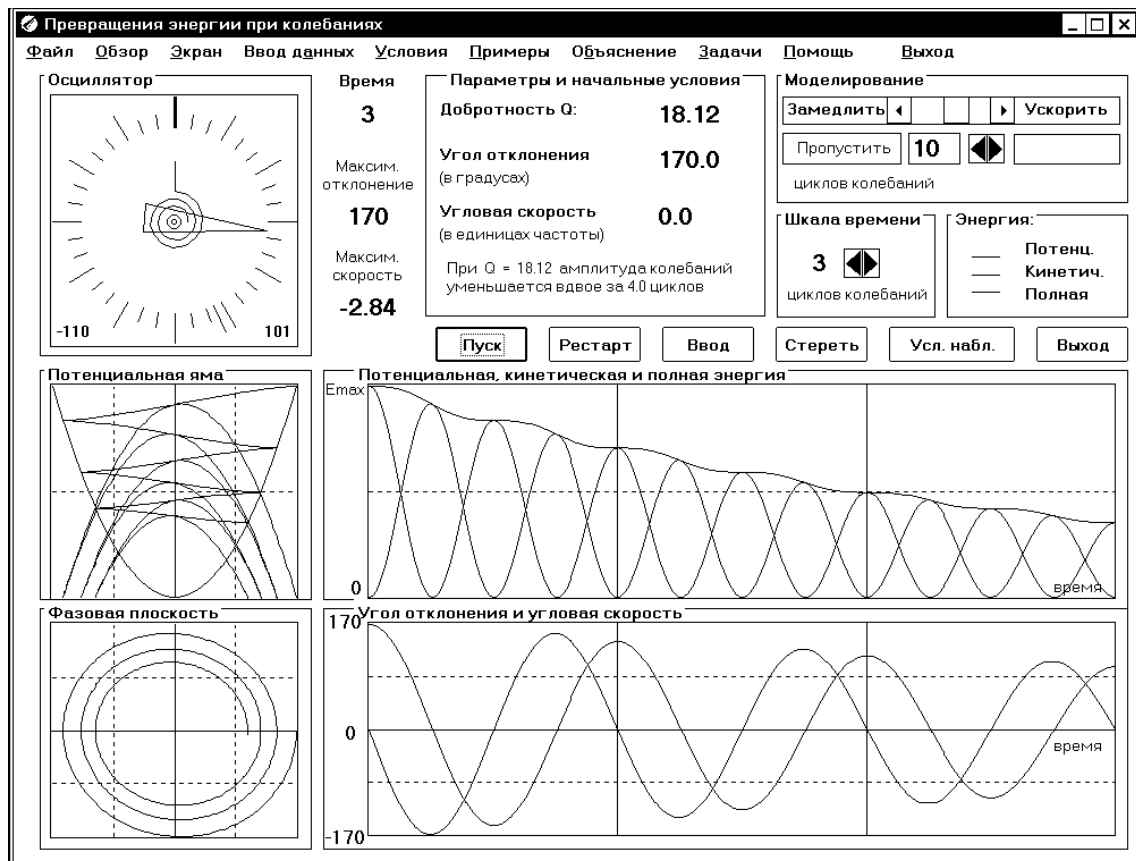
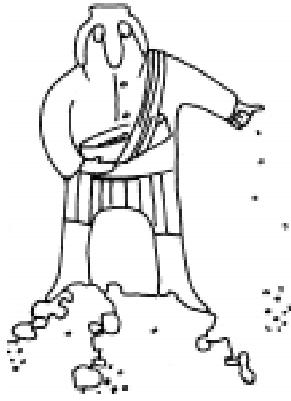


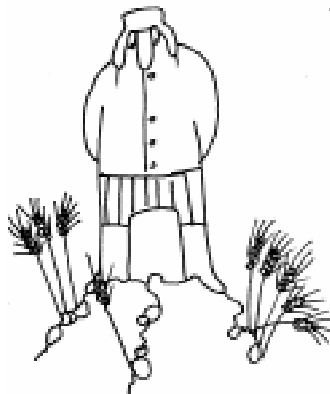
Рисунок 6. Превращения энергии при затухающих колебаниях.



рассеяние энергии происходит неравномерно на протяжении цикла колебаний. Скорость диссипации $-dE/dt$ максимальна при движении ротора в окрестности положения равновесия, а именно в те моменты времени,

когда максимальна величина угловой скорости маховика. В самом деле, скорость рассеяния энергии из-за вязкого трения $-dE/dt = -N_{тр} d\phi/dt$ (где $N_{тр} = -2\gamma d\phi/dt$), пропорциональна квадрату угловой скорости и тем самым мгновенному значению кинетической энергии маховика. В точках поворота, когда маховик изменяет направление вращения и его угловая скорость обращается в нуль, рассеяния энергии не происходит. Утверждение об экспоненциальном характере убывания энергии затухающего осциллятора $E = E_0 \exp(-2\gamma t)$, которое часто встречается в учебниках, на самом деле справедливо не для мгновенного, а только для усредненного по периоду колебаний значения полной энергии осциллятора. Время затухания средней энергии осциллятора (время, в течение которого среднее за период значение полной энергии убывает в $e = 2.72$ раза) равно $\tau/2$, то есть вдвое меньше времени затухания амплитуды колебаний.

Отмеченную неравномерность рассеяния полной энергии на протяжении цикла колебаний легко проследить по графикам на рисунке 6 (представляющему собой копию экрана при выборе в программе окна «Преобразования энергии»), где вместе с графиками потенциальной, кинетической и полной энергий



показаны также (в том же временном масштабе) графики угла отклонения и угловой скорости (а также потенциальная яма осциллятора и фазовая траектория).

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ АНАЛОГ МЕХАНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Колебания заряда q на пластинах конденсатора в электрическом контуре, состоящем из последовательно соединенных конденсатора C , катушки индуктивности L и резистора R (см. рисунок 1), описываются таким же дифференциальным уравнением, что и колебания угла отклонения ϕ механического торсионного осциллятора. В самом деле, алгебраическая сумма напряжений U_C , U_L и U_R на отдельных элементах такой замкнутой последовательной электрической цепи квазистационарного тока (то есть цепи, во всех элементах которой ток в данный момент одинаков) должна быть равна нулю для любого момента времени: $U_C + U_L + U_R = 0$. Подставляя сюда $U_C = q/C$, $U_L = L di/dt$ и $U_R = IR = R dq/dt$, получаем дифференциальное уравнение второго порядка для заряда на пластинах конденсатора $q(t)$:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0$$

Вводя обозначения $\omega_0^2 = 1/LC$, $2\gamma = R/L$, перепишем это уравнение в виде

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

что совпадает с уравнением для угла отклонения ϕ ротора механического осциллятора. Таким образом, собственные электромагнитные колебания в последовательном LCR -контуре и колебания механического пружинного осциллятора, несмотря на совершенно разную физическую природу происходящих процессов, подчиняются одинаковым закономерностям. В колебательном контуре катушка индуктивности L служит аналогом инертного элемента (маховика) механической системы, а конденсатор C – аналогом упругого элемента (спиральной пружины). Роль вязкого трения играет сопротивление резистора R электрическому току.

Аналогия между механической и электромагнитной системами распростра-

няется и на происходящие в них энергетические превращения. Энергия электрического поля в конденсаторе колебательного контура полностью аналогична потенциальной энергии деформированной пружины. Энергия магнитного поля катушки при протекании в ней электрического тока полностью аналогична кинетической энергии вращающегося маховика. При электромагнитных колебаниях в контуре происходят взаимные превращения энергии электрического поля в конденсаторе и энергии магнитного поля в катушке. В отсутствие сопротивления (при $R = 0$) полная энергия остается неизменной. При наличии электрического сопротивления превращения энергии из одного вида в другой частично необратимы: рассеяние энергии в резисторе (выделение джоулевой теплоты) приводит к экспоненциальному затуханию электромагнитных колебаний в контуре, подобно тому, как вязкое трение в механическом осцилляторе приводит к затуханию собственных механических колебаний.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Допустим, что в отсутствие трения нужно получить колебания с угловой амплитудой 90° . Каким должно быть начальное отклонение при нулевой начальной скорости ротора? Какую начальную угловую скорость нужно сообщить ротору в положении равновесия, чтобы получить колебания той же амплитуды 90° ? Какую начальную угловую скорость нужно сообщить ротору, отклоненному на угол 45° из положения равновесия, чтобы получить колебания той же амплитуды 90° ? Напоминаем, что начальную угловую скорость при вводе нужно выражать в единицах собственной частоты ω_0 . Проверьте Ваш расчет с помощью моделирующего эксперимента на компьютере.

2. Предположим, что осциллятор возбуждается из по-

ложения равновесия начальным толчком, который сообщает ротору угловую скорость $\Omega = 2\omega_0$. С помощью закона сохранения энергии рассчитайте максимальный угол, на который отклонится ротор из положения равновесия. Результат расчета проверьте в моделирующем эксперименте на компьютере. Обратите внимание на то, что компьютерная программа выполняет численное интегрирование дифференциального уравнения движения, «ничего не зная» о законе сохранения энергии.

3. Изучите графики зависимости от времени кинетической и потенциальной энергий осциллятора, совершающего колебания в отсутствие трения. Что можно сказать о максимальных и средних значениях каждого из видов энергии? Сопоставьте эти графики с графиками угла отклонения и угловой скорости. Взаимное расположение графиков в окне «Превращения энергии» особенно удобно для такого сопоставления. С какой частотой и в каких пределах происходят колебания каждого из видов энергии?

4. При действии слабой силы вязкого трения последовательность максимальных отклонений осциллятора, совершающего собственные колебания, образует убывающую геометрическую прогрессию: каждое максимальное отклонение равно предыдущему, умноженному на одно и то же число, меньшее единицы. Рассчитайте значение добротности осциллятора, при котором амплитуда колебаний уменьшается вдвое через каждые два цикла колебаний. Введите это значение и проверьте закономерность убывания максимальных отклонений в моделирующем эксперименте. Зависит ли эта закономерность от способа возбуждения собственных колебаний (то есть от начальных условий)?

5*. Представьте, что колебания осциллятора возбуждаются начальным толчком, в результате которого маховик в положении равновесия получает угловую скорость $\Omega = 2\omega_0$. Рассчи-



тайте первое максимальное отклонение маятника, если добротность осциллятора $Q = 5$. Каким будет следующее максимальное отклонение в противоположную сторону? Проверьте свои ответы в моделирующем эксперименте на компьютере.

6. Фазовая траектория затухающих собственных колебаний при $Q > 0.5$ представляет собой спираль, которая образована бесконечным числом постепенно сжимающихся витков вокруг фокуса, расположенного в начале координат фазовой плоскости. По какому закону уменьшается радиус витков по мере того, как фазовая траектория приближается к фокусу? Изменяется ли промежуток времени, в течение которого изображающая точка совершает один оборот вдоль очередного витка спирали, по мере уменьшения размера витков?

7. При каком значении добротности осциллятора полная энергия уменьшается вдвое за два полных колебания?

Сколько циклов колебаний должен совершить такой осциллятор, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась вдвое? Проверьте ваши теоретические предсказания в моделирующем эксперименте. Почему рассеяние механической энергии на протяжении одного цикла колебаний происходит неравномерно? В какие моменты скорость диссипации энергии максимальна? В какие моменты эта скорость минимальна?

8.* Рассчитайте максимальный угол отклонения из равновесия, если система с сильным трением ($Q = 0.5$) получает в положении равновесия начальную скорость $\Omega = 5\omega_0$. Сколько времени продолжается движение стрелки до этой точки максимального отклонения? Проверьте свои результаты в моделирующем эксперименте на компьютере. Обратите внимание, что стрелка приближается к положению равновесия с одной стороны, не пересекая средней точки шкалы.

*Бутиков Евгений Иванович,
профессор физического факультета
СПбГУ.*

НАШИ АВТОРЫ