

Бутиков Евгений Иванович

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС ПРИ ПЛАВНОЙ МОДУЛЯЦИИ ПАРАМЕТРА

Аннотация

В статье приведено физическое объяснение явления параметрического резонанса и его аналитическое исследование, подкрепленное компьютерным моделированием. Параметрическое возбуждение колебаний изучается на наглядном примере простой механической системы: торсионного линейного осциллятора, момент инерции которого плавно изменяется по заданному периодическому закону. Получены условия возбуждения и характеристики параметрического резонанса, обсуждается режим параметрической регенерации. Найдены частотные интервалы, в пределах которых возможно параметрическое возбуждение. Исследованы стационарные колебания на границах интервалов параметрической неустойчивости. Характеристики резонансов высших порядков объясняются в терминах знакомого явления частотной модуляции колебаний. Моделирующая программа и аналитическое исследование взаимно дополняют друг друга, способствуя лучшему пониманию основных принципов и особенностей параметрического резонанса.

Ключевые слова: линейный осциллятор, параметрическое возбуждение, модуляция параметра, порог возбуждения, интервалы неустойчивости, параметрическая регенерация, частотная модуляция колебаний.

1. ВВЕДЕНИЕ

Если детские качели вывести из состояния равновесия и дать им возможность свободно качаться подобно маятнику, их дальнейшее движение дает пример *собственных колебаний*, которые обычно затухают из-за трения. Незатухающие колебания можно возбудить, если периодически подталкивать качели в направлении движения. Это так называемые *вынужденные колебания*. Даже при небольших прилагаемых усилиях можно получить большой размах вынужденных колебаний, если подталкивать качели каждый раз при их прохождении через нижнюю точку. Это хорошо известное явление *резонанса*, возникающее при ритмическом внешнем воздействии на колебательную систему. В вынужденных колебаниях резонанс насту-

пает при условии совпадения частоты периодического внешнего воздействия с собственной частотой системы.

Но можно раскачаться на качелях и без посторонней помощи. Для этого нужно, стоя на качелях, периодически приседать и выпрямлять ноги. Здесь мы имеем дело с примером *параметрических колебаний*, возбуждаемых не внешним воздействием, а периодическим изменением какого-либо параметра колебательной системы. В данном случае при приседании и выпрямлении происходит периодическое изменение (модуляция) приведенной длины физического маятника, каковым являются качели с находящимся на них человеком. Размах колебаний будет нарастать, если приседать в положениях наибольшего отклонения и выпрямляться при прохождении качелей через нижнюю точку. Такое явление называется *параметрическим резонансом*.

© Е.И. Бутиков, 2009

В этой статье мы подробно рассмотрим особенности параметрического резонанса на примере простой механической системы – пружинного осциллятора, ротор которого может совершать крутильные колебания. Такой осциллятор показан слева на рис. 1. Грузы ротора можно одновременно сдвигать вдоль стержня в противоположных направлениях так, что центр масс системы остается на оси вращения. При таком смещении грузов изменяется момент инерции ротора: момент инерции возрастает при раздвигании грузов (при удалении от оси вращения) и убывает при их приближении к оси. Принудительными периодическими перемещениями грузов вдоль стержня туда и обратно создается модуляция момента инерции, необходимая для параметрического возбуждения крутильных колебаний осциллятора.

Электромагнитный аналог этой системы – колебательный LCR -контур из последовательно соединенных катушки индуктивности, конденсатора и резистора – показан справа на том же рисунке. Энергии электрического поля в конденсаторе можно сопоставить потенциальную энергию закрученной пружины механического осциллятора, а энергии магнитного поля в катушке с током – кинетическую энергию ротора. Колебания в контуре можно возбудить, изменяя емкость конденсатора периодическим сближением и разведением его пластин, либо изменением индуктивности катушки периодическим вдвиганием и выдвиганием сердечника. Последний способ полностью аналогичен модуляции момента инерции ротора.

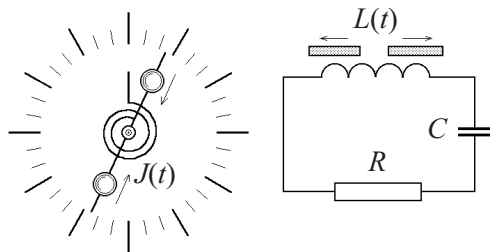


Рис. 1. Схема торсионного осциллятора с модулируемым моментом инерции и его электромагнитный аналог – колебательный контур с модулируемой индуктивностью

В отличие от маятника, поведение рассматриваемой системы подчиняется *линейному* дифференциальному уравнению, и потому на этом примере легче понять физические основы параметрического резонанса, чем в случае качелей, которые представляют собой нелинейную систему. Все изучаемые закономерности иллюстрируются специально разработанной интерактивной моделирующей компьютерной программой, которую Вы найдете на прилагаемом к журналу диске.

В предыдущей статье автора «Параметрический резонанс» (см. КИО 2009, № 3, С. 22–40) рассматривалась такая же система, но модуляция момента инерции ротора производилась по прямоугольному кусочно-постоянному закону, то есть предполагалось, что перемещения грузов вдоль стержня происходят скачкообразно. В этой статье мы будем считать, что принудительное движение грузов вдоль стержня ротора происходит по синусоидальному закону, то есть момент инерции ротора подвержен плавным периодическим изменениям. Чтобы обеспечить рост энергии осциллятора и возбуждение колебаний при плавной модуляции момента инерции, движение грузов в направлении оси ротора должно в целом происходить при большей угловой скорости ротора, чем обратное движение грузов к концам стержня от оси вращения. В сравнении с прямоугольной кусочно-постоянной модуляцией, плавная модуляция менее эффективна для передачи энергии осциллятору, так как радиальные перемещения грузов здесь растянуты во времени, в то время как при прямоугольном законе модуляции эти перемещения могут происходить в оптимальные (с точки зрения обмена энергией) моменты времени. Случай плавной модуляции параметра важен для практических приложений.

1.1. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЧИНЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА И ОЦЕНКА ПОРОГА ВОЗБУЖДЕНИЯ

Принудительная модуляция момента инерции ротора осуществляется одновре-

менным радиальным синусоидальным движением грузов вдоль стержня в противоположных направлениях, так что центр масс ротора остается на оси вращения. Чтобы понять, каким образом и при каких условиях плавное периодическое движение грузов вдоль стержня может возбудить крутильные колебания ротора, ниже используются соображения, основанные на законе сохранения энергии.

При параметрическом возбуждении колебаний ротор должен получать энергию от источника, который сообщает грузам принудительные радиальные перемещения. Поэтому необходимо рассчитать работу, совершаемую этим источником на протяжении периода колебаний, и найти условия, при которых эта работа положительна и превышает потери энергии из-за трения.

Для параметрического возбуждения колебаний осциллятора должны выполняться определенные фазовые соотношения между изменениями угловой скорости ротора при крутильных колебаниях и модуляцией его момента инерции, вызываемой принудительным радиальным движением грузов. А именно, грузы нужно перемещать в направлении оси ротора в целом при большей угловой скорости ротора, чем смещать их обратно от оси вращения к концам стержня. В противном случае модуляция момента инерции лишь ускорит затухание собственных колебаний.

В принятой математической модели системы принудительное радиальное движение грузов вдоль стержня предполагается в точности синусоидальным, то есть их расстояние l от оси вращения изменяется в соответствии с выражением:

$$l(t) = l_0(1 + m_l \sin \omega t). \quad (1)$$

Здесь l_0 – среднее расстояние грузов от оси вращения, а m_l – безразмерная амплитуда их гармонического движения вдоль стержня ($m_l < 1$). Из (1) следует, что грузы движутся относительно стержня со скоростью, изменяющейся со временем как $\cos \omega t$:

$$v(t) = dl/dt = \omega l_0 m_l \cos \omega t. \quad (2)$$

Ускорение грузов в их движении относительно стержня равно

$$a_r(t) = dv/dt = -\omega^2 l_0 m_l \sin \omega t. \quad (3)$$

Чтобы найти силу F , которая должна быть приложена к грузу источником, обеспечивающим грузу заданное радиальное принудительное движение, мы воспользуемся неинерциальной системой отсчета, вращающейся вместе с ротором. Применяя второй закон Ньютона к движению грузов в этой системе отсчета, необходимо учитывать действующую на грузы центробежную силу инерции $M\dot{\phi}^2(t)l(t)$, где M – масса груза, а $\dot{\phi}(t)$ – угловая скорость ротора:

$$Ma_r(t) = F(t) + M\dot{\phi}^2(t)l(t). \quad (4)$$

Нас интересует работа, совершаемая этой силой $F(t)$ в течение одного периода крутильных колебаний ротора. Эта работа (для двух грузов) равна изменению энергии колебаний за период. Элементарная работа dW , совершаемая за интервал времени dt , на протяжении которого грузы смещаются вдоль стержня на расстояние $dl = v(t)dt$, может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} dW &= F(t)dl = F(t)v(t)dt = \\ &= [Ma_r(t) - M\dot{\phi}^2(t)l(t)]v(t)dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Как видно из выражения (2), радиальная скорость груза $v(t)$ в (5) пропорциональна безразмерной амплитуде m_l его принудительного движения вдоль стержня. Если ограничиться в расчетах первым порядком по малому параметру m_l , в квадратных скобках в выражении (5) достаточно сохранить лишь второй член, а вместо $l(t)$ можно подставить его среднее значение l_0 :

$$\begin{aligned} dW &\approx M\dot{\phi}^2(t)l_0 v(t)dt = \\ &= -M\dot{\phi}^2(t)l_0^2 \omega m_l \cos \omega t. \end{aligned} \quad (6)$$

Наиболее благоприятные условия для параметрического возбуждения колебаний складываются, когда грузы совершают два полных цикла принудительного радиального перемещения на протяжении одного периода собственных крутильных колеба-

ний ротора. Другими словами, частота ω синусоидального движения грузов в выражениях (1) и (6) должна быть примерно вдвое больше средней частоты собственных колебаний ротора $\omega_0 = 2\pi/T_0$. (Здесь ω_0 – это частота колебаний ротора при условии, что грузы закреплены на нем на среднем расстоянии l_0 от оси вращения.) Частота модуляции ω в (1), равная удвоенному значению средней частоты собственных колебаний ($\omega = 2\omega_0$), соответствует точной настройке на основной резонанс ($n = 1$) при малых значениях безразмерной амплитуды m_1 . Графики колебаний ротора при выполнении условий, оптимальных для вложения энергии, приведены на рис. 2.

Помимо определенного соотношения между частотой модуляции и собственной частотой, для параметрического возбуждения осциллятора необходимо, чтобы между крутильными колебаниями ротора и принудительными движениями грузов выполнялись определенные фазовые соотношения: грузы должны двигаться в направлении оси вращения с максимальной скоростью в те моменты, когда максимальна величина угловой скорости ротора, совершающего крутильные колебания (то

есть когда ротор проходит вблизи своего положения равновесия). Такие фазовые соотношения будут выполняться для движения грузов, описываемого выражениями (1)–(2), при условии, что крутильные колебания ротора характеризуются следующей зависимостью от времени:

$$\varphi(t) = \varphi_m \cos \omega_0 t; \quad \dot{\varphi} = -\varphi_m \omega_0 \sin \omega_0 t. \quad (7)$$

Это, разумеется, только приближенные выражения, поскольку крутильные колебания ротора, строго говоря, не являются гармоническими. Отклонения колебаний ротора от синусоидальной формы вызваны принудительным радиальным движением грузов, которое изменяет момент инерции ротора.

После подстановки $\omega = 2\omega_0$ и $\dot{\varphi}(t)$ из (7) в (6) можно проинтегрировать dW (6) по периоду колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Принимая во внимание, что

$$\int_0^{T_0} \cos^2 2\omega_0 t dt = T_0/2,$$

в результате интегрирования получаем (с точностью до членов первого порядка по малой величине m_1), что работа W силы $F(t)$, совершаемая за период T_0 , дается следующим выражением:

$$W = \frac{1}{2} M \varphi_m^2 \omega_0^2 l_0^2 \cdot 2\pi m_1. \quad (8)$$

Таким же выражением дается работа, совершаемая источником при перемещении второго груза. Таким образом, силы, приложенные к грузам со стороны источника, вынуждающего их совершать заданное синусоидальное движение вдоль стержня, совершают в целом на протяжении периода положительную работу и увеличивают энергию осциллятора на величину

$$\Delta E = 2W = M \varphi_m^2 \omega_0^2 l_0^2 \cdot 2\pi m_1. \quad (9)$$

Будем для простоты считать стержень очень легким в сравнении с массивными грузами, так что вся кинетическая энергия ротора складывается только из кинетической энергии грузов. Пол-

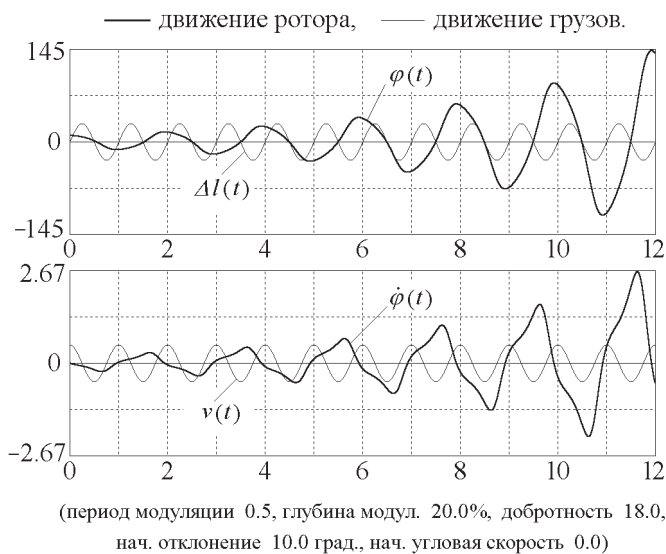


Рис. 2. Графики угла отклонения и угловой скорости ротора при крутильных колебаниях, вызванных радиальным синусоидальным движением грузов с частотой $\omega = 2\omega_0$ (основной параметрический резонанс)

ная энергия осциллятора E равна максимальному значению его кинетической энергии, которое достигается в те моменты, когда совершающий крутильные колебания ротор проходит вблизи своего положения равновесия и имеет максимальную угловую скорость $\omega_0 \varphi_m$:

$$E = M \varphi_m^2 \omega_0^2 I_0^2.$$

Сравнивая это выражение с правой частью (9), мы приходим к наиболее существенной особенности параметрического резонанса, а именно, к выводу о том, что вложение энергии ΔE вследствие модуляции параметра пропорционально полной энергии E , запасенной осциллятором:

$$\Delta E = 2\pi m_l E. \quad (10)$$

Уравнение (10) означает, что при параметрическом резонансе полная энергия колебаний E , усредненная за период колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$, растет экспоненциально со временем:

$$\frac{dE}{dt} = m_l \omega_0 E, \quad E(t) = E_0 \exp(2st), \quad (11)$$

где $2s = m_l \omega_0$.

Этот результат справедлив в отсутствие трения. Рассеяние механической энергии E из-за трения (за целое число периодов) также описывается экспоненциальной функцией:

$$\frac{dE}{dt} = -2\gamma E, \quad E(t) = E_0 \exp(-2\gamma t). \quad (12)$$

Порогу параметрического резонанса соответствует случай, когда эти потери энергии из-за трения как раз компенсируются вложением энергии, обусловленным принудительным периодическим движением грузов вдоль стержня, в условиях порога $\gamma = s$. Таким образом, для минимального значения амплитуды модуляции m_l (при заданном значении постоянной затухания γ или добротности Q), которое делает возможным параметрическое возбуждение колебаний, получаем:

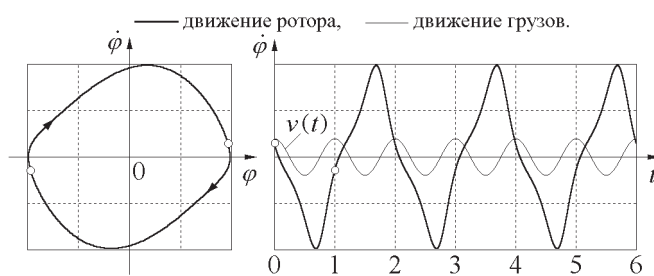
$$(m_l)_{\min} = \frac{2\gamma}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \quad (13)$$

Условие порога возбуждения можно выразить также как максимальное значение постоянной затухания γ (или как минимальное значение добротности Q) для заданного значения безразмерной амплитуды принудительного радиального движения грузов m_l (1):

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2} m_l \omega_0, \quad Q_{\min} = \frac{\omega_0}{2\gamma_{\max}} = \frac{1}{m_l}. \quad (14)$$

Подчеркнем, что полученные выше результаты, относящиеся к порогу параметрического возбуждения, приближенны. Они справедливы только для достаточно малых значений безразмерной амплитуды m_l принудительного радиального движения грузов вдоль стержня ротора. Но в компьютерной программе, моделирующей параметрические колебания при плавной модуляции момента инерции, выполняется численное интегрирование дифференциального уравнения, описывающего движение рассматриваемой системы. Это интегрирование не ограничено приближением малых значений m_l . Поэтому с помощью моделирования порог параметрического возбуждения можно определить с большей точностью, что особенно актуально для значительных амплитуд модуляции.

Фазовая траектория и график угловой скорости стационарных колебаний ротора в условиях порога показаны на рис. 3. Этот рисунок можно сравнить с рис. 2 для условий резонанса при превышении



(период модуляции 0.4566, глубина модул. 20.0 %, добротность 6.893, нач. отклонение 50.0 град., нач. угловая скорость 0.19)

Рис. 3. Фазовая траектория вместе с графиками угловой скорости стационарных колебаний ротора $\dot{\varphi}(t)$ и радиальной скорости грузов $v(t)$ при выполнении пороговых условий возбуждения $m_l \approx 1/Q$ для основного параметрического резонанса

порога параметрического возбуждения, когда амплитуда растет экспоненциально даже при наличии трения в системе.

Теперь можно сравнить пороговые значения глубины модуляции для случаев кусочно-постоянной модуляции по прямоугольному закону (см. КИО 2009, № 3. С. 22–40) и синусоидальной модуляции. Когда $m_l \ll 1$, при синусоидальном движении грузов момент инерции ротора модулируется, как будет показано ниже в (17), почти по синусоидальному закону с глубиной $m \approx 2m_l$. (Глубина модуляции момента инерции примерно вдвое больше глубины модуляции расстояния l от оси вращения до грузов, потому что момент инерции пропорционален квадрату расстояния l .) Таким образом, для синусоидальной модуляции выражение (13) дает следующее значение пороговой глубины модуляции момента инерции: $m = 2/Q$. Это значение несколько больше, чем величина $m = \pi/(2Q)$ для случая прямоугольной модуляции. Как уже отмечалось, прямоугольная модуляция обеспечивает более благоприятные условия для передачи энергии осциллятору от источника модуляции, приводящего грузы в периодическое движение вдоль стержня ротора.

1.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОСЦИЛЛЯТОРА ДЛЯ СЛУЧАЯ СИНУСОИДАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ГРУЗОВ

Для простоты мы считаем сам стержень очень легким, так что момент инерции ротора обусловлен только перемещаемыми вдоль него массивными грузами: $J = 2Ml^2(t)$. Изменение момента импульса ротора $J\dot{\varphi}(t)$ со временем описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{d}{dt}(J\dot{\varphi}) = -D\varphi, \quad (15)$$

где $-D\varphi$ – приложенный к ротору восстанавливающий момент силы упругости. Подставляя в (15) $l(t)$ из (1) и принимая во внимание выражение для частоты собственных колебаний через параметры осциллятора $\omega_0^2 = D/J_0$ (здесь $J_0 = 2Ml_0^2$ – момент

инерции ротора при грузах в средних положениях), получаем окончательно:

$$\frac{d}{dt}[(1 + m_l \sin \omega t)^2 \dot{\varphi}] = -\omega_0^2 \varphi - 2\gamma \dot{\varphi}. \quad (16)$$

В правую часть уравнения (16) добавлен момент силы вязкого трения, пропорциональный угловой скорости ротора. Это уравнение численно интегрируется в компьютерной программе в реальном времени при моделировании параметрических колебаний, возбуждаемых синусоидальным радиальным движением грузов ротора.

Отметим, что синусоидальное движение грузов вдоль стержня ротора, описываемое выражением (1), вообще говоря, не обеспечивает синусоидальной модуляции момента инерции. Действительно, момент инерции J пропорционален квадрату расстояния $l(t)$ грузов от оси вращения. Поэтому зависимость момента инерции $J(t)$ от времени содержит вторую гармонику основной частоты ω движения грузов. Только при малых значениях амплитуды m_l (когда $m_l \ll 1$) модуляцию момента инерции ротора можно приближенно считать синусоидальной:

$$J(t) = 2Ml^2(t) = 2Ml_0^2 (1 + m_l \sin \omega t)^2 \approx 2Ml_0^2 (1 + 2m_l \sin \omega t) = J_0 (1 + m \sin \omega t), \quad (17)$$

где $J_0 = 2Ml_0^2$ – среднее значение момента инерции, а $m = 2m_l$ – глубина модуляции. Таким образом, при $m_l \ll 1$ модуляция момента инерции почти синусоидальна, а ее глубина m вдвое больше безразмерной амплитуды m_l синусоидального движения грузов вдоль стержня ротора.

Если интересоваться только приближенным решением, справедливым в первом порядке по малому параметру m_l , то, вместо точного дифференциального уравнения движения (16), можно решать следующее приближенное уравнение:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma \dot{\varphi} + \omega_0^2 (1 - 2m_l \sin \omega t) \varphi = 0. \quad (18)$$

Мы здесь пренебрегаем также модуляцией коэффициента при $\dot{\varphi}$, поскольку для возбуждения параметрического резонанса существенны изменения во времени только энергоемких параметров (в механичес-

ком осцилляторе это момент инерции ротора и коэффициент жесткости пружины). Модуляция постоянной затухания γ не может привести к возбуждению колебаний.

Уравнение (18) при $\gamma = 0$ называется уравнением Матье. Теория уравнения Матье подробно разработана, и все наиболее существенные свойства его решений хорошо известны. Полный анализ решений математически довольно сложен, и обычно ограничиваются нахождением областей значений частоты модуляции ω и глубины модуляции m_1 , в которых состояние покоя осциллятора в положении равновесия становится неустойчивым: достаточно сколь угодно малого отклонения от этого состояния, чтобы амплитуда появившихся малых колебаний стала прогрессивно нарастать со временем. Иначе говоря, для каждого значения глубины модуляции m_1 из условия существования нарастающих во времени решений уравнения (18) определяют интервалы частоты модуляции (в окрестностях значений $\omega_n = 2\omega_0/n$), в которых возможен параметрический резонанс, то есть нарастающие колебания. Такая задача для линеаризованной системы с затуханием, описываемой уравнением (18), была решена еще в 1927 году А.А. Андроновым и М.А. Леонтовичем.

Отметим, что даже в случае неустойчивости состояния покоя в положении равновесия (то есть при выполнении условий параметрического возбуждения), при строго равных нулю начальных значениях φ и $\dot{\varphi}$ они оставались бы равными нулю и в дальнейшем. Этим, в частности, параметрический резонанс отличается от обычного резонанса в вынужденных колебаниях, где возрастание амплитуды колебаний со временем происходит и при нулевых начальных условиях (из состояния покоя в положении равновесия).

Подчеркнем, что применимость теории уравнения Матье к моделируемой системе ограничивается лишь первым порядком по глубине модуляции m_1 . Для конечных значений m_1 резонансные частоты и границы интервалов параметрической неустойчивости для моделируемой системы

отличаются от предсказываемых уравнением Матье. Мы столкнемся с этими отличиями ниже, развивая теорию моделируемой системы во втором порядке по m_1 .

1.3. ИНТЕРВАЛЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Для определения интервалов частоты ω принудительного синусоидального движения грузов вдоль стержня, в которых состояние покоя ротора в положении равновесия становится неустойчивым, воспользуемся дифференциальным уравнением (16). Попытаемся найти его приближенное решение $\varphi(t)$ в окрестности основного резонанса, когда частота модуляции примерно вдвое превышает частоту собственных колебаний ($\omega \approx 2\omega_0$). В этом случае можно записать ω в виде $\omega = 2\omega_0 + \varepsilon$, где $|\varepsilon| \ll \omega$. Предположим, что приближенное решение уравнения (16) имеет вид почти гармонического колебания, частота которого $\tilde{\omega}$ близка к собственной частоте: $\tilde{\omega} = \omega/2 = \omega_0 + \varepsilon/2$. Пусть амплитуда и фаза $\varphi(t)$ медленно изменяются со временем:

$$\varphi(t) = p(t)\cos \tilde{\omega}t + q(t)\sin \tilde{\omega}t. \quad (19)$$

Здесь $p(t)$ и $q(t)$ – функции времени, изменяющиеся медленно по сравнению с осциллирующими сомножителями $\cos \tilde{\omega}t$ и $\sin \tilde{\omega}t$. Точное решение уравнения (16) содержит также высшие гармоники с частотами $3\tilde{\omega}$, $5\tilde{\omega}$, ..., но их вклад пропорционален более высоким степеням малого параметра $m_1 \ll 1$. Мы не учитываем эти гармоники в приближенном решении (19).

Изменение амплитуд $p(t)$ и $q(t)$ со временем вызвано модуляцией параметра, и поэтому их производные также пропорциональны малой величине m_1 . Подставляя φ из выражения (19) в дифференциальное уравнение (16), мы можем представить произведения тригонометрических функций следующим образом:

$$\sin 2\tilde{\omega}t \cos \tilde{\omega}t = (\sin \tilde{\omega}t + \sin 3\tilde{\omega}t)/2,$$

$$\sin 2\tilde{\omega}t \sin \tilde{\omega}t = (\cos \tilde{\omega}t - \cos 3\tilde{\omega}t)/2.$$

опуская при этом высшие гармоники с

частотой $3\tilde{\omega}$. В результате для функций $p(t)$ и $q(t)$ получим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} 2\tilde{\omega}\dot{q} - (\tilde{\omega}^2 - \omega_0^2)p + (2\gamma\tilde{\omega} - m_1\omega_0^2)q &= 0, \\ -2\tilde{\omega}\dot{p} - (2\gamma\tilde{\omega} + m_1\omega_0^2)p - (\tilde{\omega}^2 - \omega_0^2)q &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь опущены члены $2\gamma\dot{p}$ и $2\gamma\dot{q}$, поскольку параметрическое возбуждение возможно лишь при достаточно слабом трении: для возбуждения колебаний глубина модуляции должна превышать пороговое значение. Из уравнения (14) следует, что это возможно только при $2\gamma < m_1\omega_0$, то есть вклад опущенных членов в (20) имеет порядок m_1^2 .

В соответствии с общими правилами, решение этой системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно искать в виде экспоненциальных функций времени $\exp\alpha t$. Условие существования нетривиального (ненулевого) решения получающейся при этом системы однородных алгебраических уравнений приводит к следующему выражению для α :

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \sqrt{(m_1\omega_0)^2 - \varepsilon^2 - \gamma}. \quad (21)$$

Здесь принято во внимание, что $\tilde{\omega}^2 \approx \omega_0^2 + \omega_0\varepsilon$. В условиях точной настройки на резонанс отклонение частоты ε обращается в нуль ($\varepsilon = 0$), и уравнение (21) дает следующее значение показателя α , определяющего экспоненциальное нарастание амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний:

$$\alpha \approx m_1\omega_0/2 - \gamma. \quad (22)$$

Амплитуда колебаний возрастает, если $\alpha > 0$. Поэтому пороговым условиям параметрического резонанса соответствует глубина модуляции $m_1 = 2\gamma/\omega_0 = 1/Q$. Такое же значение для порога возбуждения при точной настройке в резонанс было получено выше на основе закона сохранения энергии (см. (13)). В отсутствие трения показатель экспоненциального роста амплитуды колебаний при резонансе пропорционален глубине модуляции: $\alpha = m_1\omega_0/2$.

Из (21) следует, что в отсутствие трения (при $\gamma = 0$) нарастающие со временем решения линеаризованного дифференциального уравнения (16) при заданном значении глубины модуляции m_1 существуют в некотором интервале частот, простирающемся на $\Delta\omega$ в обе стороны от резонансного значения $\omega_{\text{res}} = 2\omega_0$. Полуширина этого интервала $\Delta\omega$ дается выражением:

$$\Delta\omega = m_1\omega_0. \quad (23)$$

Мы видим, что в отсутствие трения ширина $2\Delta\omega$ интервала частот модуляции, в котором возможен основной параметрический резонанс с $\omega \approx 2\omega_0$, пропорциональна амплитуде m_1 принудительных синусоидальных перемещений грузов. Для какой-либо частоты модуляции ω из этого интервала амплитуда параметрически возбуждаемых колебаний растет со временем экспоненциально как $\exp\alpha t$, где показатель роста α дается выражением (21) с $\gamma = 0$:

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{(m_1\omega_0)^2 - (\omega - \omega_{\text{res}})^2} \quad (24)$$

(для $|\omega - \omega_{\text{res}}| \leq m_1\omega_0$).

Показатель роста α обращается в нуль на границах ω_{\pm} интервала неустойчивости: $\omega_{\pm} = \omega_{\text{res}} \pm m_1\omega_0$. На этих границах возможны стационарные колебания постоянной амплитуды. Пример таких колебаний, полученных в моделирующем эксперименте, показан на рис. 4. Из симметричного вида кривой $\dot{\phi}(t)$ и взаимного расположения кривых $\dot{\phi}(t)$ и $v(t)$ ясно, что энергия, получаемая осциллятором за период колебаний от источника модуляции (положительная работа сил, перемещающих грузы вдоль стержня), в точности равна энергии, отдаваемой источнику (то есть отрицательной работе этих сил) за то же время.

Для нахождения более точных значений частоты модуляции ω_{\pm} , соответствующих границам интервала параметрической неустойчивости, необходимо включить в приближенное решение уравнения (16) высшие гармоники. Их частоты $3\tilde{\omega}$, $5\tilde{\omega}$, ...

равны нечетным кратным основной частоты $\tilde{\omega} = \omega_0/2$. Во втором порядке по m_l можно искать решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & C_1(t) \cos \tilde{\omega}t + S_1(t) \sin \tilde{\omega}t + \\ & + C_3(t) \cos 3\tilde{\omega}t + S_3(t) \sin 3\tilde{\omega}t. \end{aligned} \quad (25)$$

Если интересоваться только границами ω_{\pm} интервала неустойчивости, где колебания стационарны и их амплитуда со временем не изменяется, можно считать, что коэффициенты C_1, S_1, C_3 и S_3 не зависят от времени.

При подстановке (25) в уравнение (16) можно опустить члены с частотой $5\tilde{\omega}$. В членах с частотой $\tilde{\omega}$ нужно удерживать величины первого и второго порядка по m_l , в то время как в членах с частотой $3\tilde{\omega}$ необходимо удерживать величины только первого порядка. В конце концов мы приходим к системе однородных алгебраических уравнений для C_1, S_1, C_3 и S_3 . Искомые границы интервала получаются из условия существования нетривиального решения этой системы. Эти границы ($\gamma = 0$) даются следующими частотами ω_{\pm} :

$$\omega_{\pm} = 2\omega_0 \pm m_l \omega_0 + \frac{11}{8} m_l^2 \omega_0. \quad (26)$$

Член второго порядка по m_l одинаков для обеих границ интервала. Он не сказывается на ширине интервала, а лишь сдвигает весь интервал на величину, пропорциональную m_l^2 .

В моделирующей компьютерной программе нужно вводить не частоту модуляции ω , а период $T = 2\pi/\omega$. Поэтому приведем здесь также приближенные выражения для границ основного интервала параметрического резонанса в единицах T_0 :

$$T = \frac{T_0}{2} \left(1 \mp \frac{1}{2} m_l - \frac{7}{16} m_l^2 \right). \quad (27)$$

Стационарные колебания на левой границе интервала неустойчивости были показаны на рис. 4. На рис. 5 показаны колебания на правой границе это-

го интервала. Следует обратить внимание на отклонение формы графиков стационарных колебаний от синусоидальной кривой. Это отклонение вызвано вкладом высших гармоник (главным образом третьей гармоникой с частотой $3\omega/2$). Отношение амплитуды третьей гармоники к амплитуде фундаментальной гармоники приблизительно одно и то же ($|C_3/C_1| \approx |S_3/S_1| \approx \frac{3}{8} m_l$) для колебаний на обеих границах (при одинаковой глубине модуляции). Различие в форме колебаний на правой и левой границах объясняется разницей в сдвиге фаз третьей гармоники по отношению к основной в этих случаях.

Моделирование показывает, что стационарные колебания на границах основного интервала параметрической неустойчивости содержат также 5-ю и 7-ю гармоники с частотами $\frac{5}{2}\omega$ и $\frac{7}{2}\omega$. Чтобы найти границы интервала с большей точностью, эти гармоники следует включить в пробную функцию $\phi(t)$ (см. выражение (25)). В отсутствие трения начало отсчета времени удобнее выбрать так, чтобы движение грузов вдоль стержня ротора описывалось бы функцией $l(t) = l_0(1 + m_l \cos \omega t)$. При таком выборе синусоидальные и косинусоидальные гармоники не перемешиваются, так что колебания на левой границе интервала содержат только косинусоидаль-

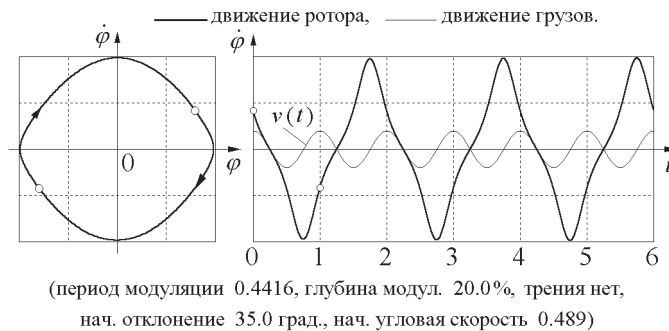


Рис. 4. Фазовая диаграмма и графики угловой скорости ротора $\dot{\varphi}(t)$ и радиальной скорости грузов $v(t)$ для стационарных колебаний на левой границе основного интервала параметрической неустойчивости в отсутствие трения

ные гармоники, а на правой – синусоидальные. При учете вклада высших гармоник аналитические выражения для частот модуляции, соответствующих границам интервала неустойчивости, оказываются весьма сложными и потому здесь не приводятся. Для иллюстрации согласия расчетов с результатами моделирования ниже приводятся теоретические значения периодов модуляции и относительных вкладов высших гармоник для глубины модуляции $m_l = 0.3$ (30 %) и в скобках – соответствующие им экспериментальные значения (полученные при моделировании):

Левая (косинусоидальная) граница: период $T/T_0 = 0.4066$ (0.4066);

$$C_3/C_1 = -0.103 \text{ (-0.101)};$$

$$C_5/C_1 = 0.015 \text{ (0.016)};$$

$$C_7/C_1 = 0.002 \text{ (0.001)}.$$

Правая (синусоидальная) граница: период $T/T_0 = 0.5528$ (0.5528);

$$S_3/S_1 = -0.129 \text{ (-0.129)};$$

$$S_5/S_1 = 0.020 \text{ (0.020)};$$

$$S_7/S_1 = 0.003 \text{ (0.003)}.$$

Структура основного интервала параметрической неустойчивости показана на рис. 6 а, для идеализированного случая отсутствия трения (жирные граничные кривые), а также для $Q = 20$ и $Q = 10$ (тонкие внутренние линии). Границы ин-

тервала удобнее выражать не через частоту ω модуляции параметра, а через период $T = 2\pi/\omega$. Заштрихованные области на рис. 6 б показывают первые три интервала параметрической неустойчивости на одной $T - m_l$ диаграмме.

Нижняя часть рис. 5 соответствует правой границе при наличии трения. Из асимметрии графика скорости ясно, что в этом случае осциллятор получает энергии за период больше, чем отдает назад: на интервалах, где скорость v отрицательна (когда грузы движутся в направлении к оси ротора), угловая скорость ротора $\dot{\phi}$ больше по величине. Избыточная получаемая энергия расходуется на преодоление трения, чем и обеспечивается стационарный режим колебаний неизменной амплитуды. За пределами интервала неустойчивости модуляция момента инерции приводит лишь к искажению формы затухающих собственных колебаний.

При наличии трения интервалы параметрического резонанса сужаются и исчезают совсем при $m_l < 1/Q$. Из уравнения (21) (с $\alpha = 0$) следует, что при превышении порога, когда $m_l > 1/Q$, границам интервала соответствуют следующие отклонения $\Delta\omega$ частоты модуляции ω в обе стороны от резонансного значения ω_{res} :

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \sqrt{(m_l\omega_0)^2 - 4\gamma^2} = \\ &= \sqrt{m_l^2 - (1/Q)^2} \omega_0. \end{aligned} \quad (28)$$

Из этого выражения видно, что в условиях порога (когда $Q = 1/m_l$) обе границы интервала сливаются, то есть интервал неустойчивости исчезает. За пределами интервала неустойчивости модуляция момента инерции вызывает лишь некоторые изменения формы затухающих собственных колебаний, если таковые были возбуждены.

1.4. РЕЗОНАНСЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Колебательная система с гармонической зависимостью модулируемого параметра от времени, описываемая уравнением Матье (18), имеет также параметрические

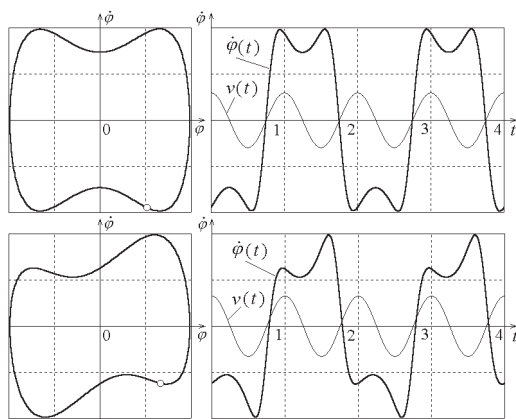


Рис. 5. Фазовая диаграмма и графики угловой скорости ротора $\dot{\phi}(t)$ и радиальной скорости грузов $v(t)$ для стационарных колебаний на правой границе основного интервала параметрической неустойчивости в отсутствие трения (вверху) и при наличии трения (внизу)

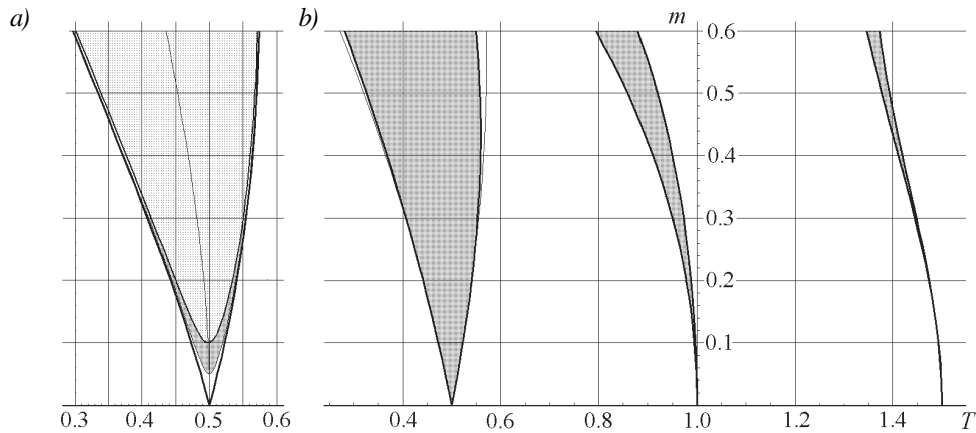


Рис. 6. Основной интервал параметрической неустойчивости (а) и диаграмма границ трех первых интервалов (б).

Тонкие кривые, слегка отклоняющиеся от границ основного интервала при больших значениях глубины модуляции m , построены с помощью приближенного выражения (27)

резонансы высших порядков ($n > 1$), расположенные вблизи значений частоты модуляции $\omega = 2\omega_0/n$. Период колебаний, совершающихся в условиях любого из резонансов, близок к периоду собственных колебаний. Чтобы модуляция момента инерции компенсировала (и тем более превосходила) потери энергии из-за трения, два цикла модуляции должны совершаться на протяжении целого числа n собственных колебаний: $2T \approx nT_0$. Ширина $\Delta\omega$ частотных интервалов, соответствующих неустойчивости состояния $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, быстро уменьшается при увеличении порядкового номера n параметрического резонанса – как m_1^n . Показатель s скорости роста амплитуды при параметрическом резонансе уменьшается при переходе к более высоким порядкам n столь же быстро, как и ширина $\Delta\omega$ частотного интервала неустойчивости. Оба эти обстоятельства затрудняют экспериментальное наблюдение параметрических резонансов высоких порядков $n > 1$ при умеренных значениях глубины модуляции m_1 .

Для физической системы, моделируемой в компьютерной программе, параметрический резонанс второго порядка $n = 2$ (при $\omega \approx \omega_0$

или $T \approx T_0$) в случае малой амплитуды синусоидального движения грузов чрезвычайно слаб и узок. Графики колебаний в случае резонанса второго порядка при плавной модуляции момента инерции торсионного осциллятора показаны на рис. 7.

В отличие от основного резонанса, для которого подпитка осциллятора энергией из-за модуляции параметра происходит даже в приближении чисто синусоидальных крутильных колебаний ротора (см. уравнение (6)), в резонансе второго порядка положительный баланс получаемой ротором энергии возможен только благодаря асимметричным искажениям формы временной зависимости колебаний ротора. Такие искажения, хорошо видимые на

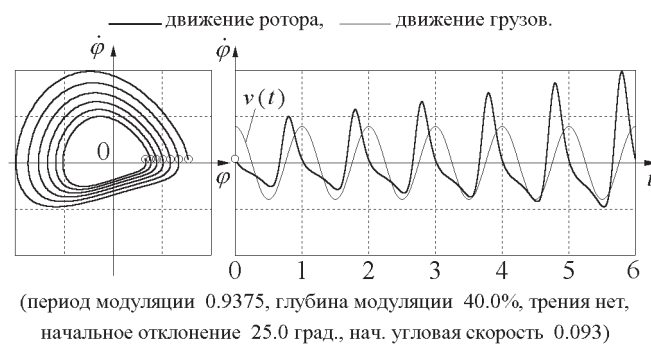


Рис. 7. Параметрический резонанс второго порядка ($n = 2$): фазовая траектория и графики угловой скорости ротора и скорости радиального принудительного движения грузов

рис. 7, обеспечивают движение грузов в сторону оси ротора ($v > 0$) в среднем при большей по величине угловой скорости ротора $\dot{\varphi}$ по сравнению с их обратным движением. Искажения формы описываются второй гармоникой (с частотой 2ω), вклад которой пропорционален глубине модуляции m_l . Поэтому подпитка энергией из-за модуляции момента инерции ротора в резонансе второго порядка пропорциональна не m_l (как в основном резонансе), а лишь m_l^2 .

Чтобы найти частотные границы второго интервала параметрической неустойчивости, мы ищем для уравнения (16) решение, описывающее стационарные колебания с частотой ω , близкой к частоте собственных колебаний ω_0 . При учете членов вплоть до второго порядка по глубине модуляции m_l , мы должны включить в это приближенное решение синусоидальные колебания на основной частоте¹ $\omega = \omega_0 + \varepsilon$ (частоте модуляции) и следующую гармонику с частотой 2ω :

$$\varphi(t) = a_0 \cos \omega t + b_0 \sin \omega t + a_1 \cos 2\omega t + b_1 \sin 2\omega t. \quad (29)$$

Пример таких стационарных колебаний показан на рис. 8.

Подставляя $\varphi(t)$ в (18), преобразуем встречающиеся произведения синусов и



Рис. 8. Фазовая траектория и график угловой скорости стационарных колебаний на границе интервала параметрического резонанса второго порядка ($n = 2$)

¹ Отметим, что может оказаться удобным считать фундаментальной частотой стационарных параметрически возбуждаемых колебаний во всех случаях частоту $\omega/2$, то есть половину частоты модуляции параметра. При таком соглашении спектр колебаний в случае резонансов нечетных порядков содержит только нечетные гармоники, а спектр стационарных колебаний при резонансах четных порядков содержит только четные гармоники, причем амплитуда фундаментального колебания с частотой $\omega/2$ для резонансов четных порядков равна нулю.

косинусов в суммы с помощью известных тригонометрических тождеств, сохраняя лишь члены с частотами ω и 2ω . В результате получаем следующую систему однородных алгебраических уравнений для коэффициентов a_0, b_0 и a_1, b_1 :

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) a_0 + \frac{3}{4} m_l^2 a_0 + 2m_l b_1 - \frac{2\gamma}{\omega_0} b_0 = 0, \\ \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) b_0 + \frac{1}{4} m_l^2 b_0 + 2m_l a_1 + \frac{2\gamma}{\omega_0} a_0 = 0, \\ 3a_1 - 2m_l b_0 = 0, \quad 3b_1 + 2m_l a_0 = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Из двух последних уравнений этой системы находим следующие выражения для амплитуд a_1 и b_1 второй гармоники в сложном колебании $\varphi(t)$ через глубину модуляции m_l и амплитуды a_0 и b_0 основного гармонического колебания:

$$a_1 = (2/3)m_l b_0, \quad b_1 = -(2/3)m_l a_0. \quad (31)$$

По существу эти соотношения означают, что амплитуда второй гармоники в стационарных колебаниях равна $(2/3)m_l$ от амплитуды колебания на основной частоте. Это отношение амплитуд гармонических составляющих одинаково для колебаний на обеих границах интервала неустойчивости. Однако для левой и правой границ высшие гармоники добавляются к основному колебанию в противоположных относительных фазах, что приводит к разной форме результирующих стационарных колебаний. Графики стационарных колебаний на правой границе интервала показаны на рис. 9.

Подставляя a_1 и b_1 из (31) в первые два уравнения системы (30) и принимая во внимание, что $\omega^2 = (\omega_0 + \varepsilon)^2 \approx \omega_0^2 + 2\omega_0 \varepsilon$, получаем систему двух однородных уравнений для a_0 и b_0 :

$$\begin{cases} \left(\frac{2\varepsilon}{\omega_0} - \frac{7}{12}m_l^2\right)a_0 - \frac{2\gamma}{\omega_0}b_0 = 0, \\ \frac{2\gamma}{\omega_0}a_0 + \left(\frac{2\varepsilon}{\omega_0} - \frac{13}{12}m_l^2\right)b_0 = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Нетривиальное решение этой системы существует, если ее определитель равен нулю. Из этого условия находятся значения $\varepsilon = \omega - \omega_0$, соответствующие границам ω_{\pm} второго интервала параметрической неустойчивости:

$$\omega_{\pm} = \left(1 + \frac{5}{12}m_l^2 + \frac{1}{8}\sqrt{m_l^4 - (4/Q)^2}\right)\omega_0. \quad (33)$$

Отметим, что даже нижняя граница этого интервала смещена от ω_0 в сторону более высоких частот. Границы интервала сливаются на пороге возбуждения. Из (33) находим следующие условия для порога второго параметрического резонанса:

$$\begin{aligned} (m_l)_{\min} &= \frac{2}{\sqrt{Q}}; \quad Q_{\min} = \frac{4}{m_l^2}; \\ \omega_{\text{res}} &= \left(1 + \frac{5}{12}m_l^2\right)\omega_0. \end{aligned} \quad (34)$$

Стационарные колебания в условиях порога второго параметрического резонанса показаны на рис. 10.

Уравнение (33) дает следующие значения для границ второго интервала неустойчивости при нулевом трении:

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \left(1 + \frac{13}{24}m_l^2\right)\omega_0, \\ \omega_- &= \left(1 + \frac{7}{24}m_l^2\right)\omega_0. \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, в отсутствие трения ширина второго интервала пропорциональна квадрату глубины модуляции: $\omega_+ - \omega_- = m_l^2\omega_0/4$.

Чтобы в моделирующем эксперименте наблюдать стационарные колебания в отсутствие трения, нужно выбрать период модуляции, соответствующий одной из этих границ, и должным образом задать начальные условия. Для $\omega = \omega_+$ и $\gamma = 0$ уравнение (32) дает $a_0 = 0$ (и $b_1 = 0$). С

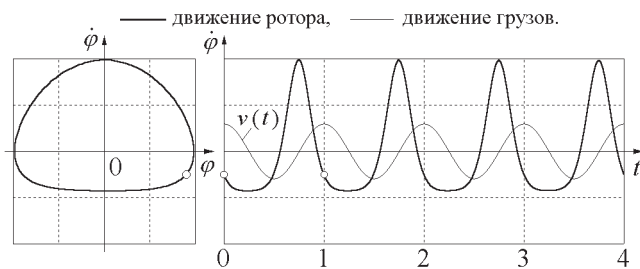
другой стороны, для $\omega = \omega_-$ получаем $b_0 = 0$ (и $a_1 = 0$). Чтобы связать эти значения с начальными условиями, воспользуемся выражением (29), которое дает зависимость φ от времени через a_0, b_0 и a_1, b_1 . Для начального момента времени $t = 0$ (29) дает:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= a_0 + a_1, \\ \dot{\varphi}(0) &= \omega(b_0 + 2b_1) \approx \omega_0(b_0 + 2b_1). \end{aligned} \quad (36)$$

Стационарные колебания на частоте $\omega = \omega_-$ при $t = 0$ характеризуются угловым смещением $\varphi(0) = a_0$ и сравнительно малой угловой скоростью (мы воспользовались уравнением (31), чтобы выразить b_1 через a_0): $\dot{\varphi}(0) = 2b_1\omega_0 = -(4/3)m_l a_0\omega_0$. Таким образом, для получения стационарных колебаний можно выбрать произвольное начальное отклонение $\varphi(0)$ и ввести начальную угловую скорость $\dot{\varphi}(0) = -(4/3)m_l\varphi(0)\omega_0$.

Для другой границы частотного интервала ($\omega = \omega_+$) стационарные колебания при $t = 0$ характеризуются угловой скоростью $\dot{\varphi}(0) = \omega_0 b_0$ и сравнительно малым угловым отклонением: $\varphi(0) = a_1 = (2/3)m_l b_0$. Следовательно, для получения стационарных колебаний в моделирующем эксперименте удобно выбрать произвольно некоторую начальную угловую скорость $\dot{\varphi}(0)$ и ввести начальное угловое отклонение $\varphi(0) = (2/3)m_l \dot{\varphi}(0)/\omega_0$.

Для стационарных колебаний в условиях порога возбуждения уравнения (32) дают $b_0 = a_0$. Поэтому



(период модуляции 0.9724, глубина модуляции 30.0%, трения нет, начальное отклонение 40.0 град., нач. угловая скорость -0.3)

Рис. 9. Фазовая траектория и график угловой скорости стационарных колебаний на правой границе интервала параметрического резонанса второго порядка ($n = 2$)

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= a_0 \left(1 + \frac{2}{3} m_l \right), \\ \dot{\varphi}(0) &= \omega_0 a_0 \left(1 - \frac{4}{3} m_l \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Чтобы получить стационарные колебания на пороге второго параметрического резонанса, можно произвольно выбрать начальное угловое отклонение $\varphi(0)$ и ввести начальную угловую скорость $\dot{\varphi}(0) = \omega_0 \varphi(0) (1 - 2m_l)$, как это следует из (37). Или, в равной мере, можно произвольно задать некоторую начальную скорость $\dot{\varphi}(0)$ и ввести начальное отклонение $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) (1 + 2m_l) / \omega_0$. Разумеется, для заданной глубины модуляции m_l период модуляции должен при этом иметь резонансное значение, а добротность – пороговое значение, определяемое выражением (34).

Отметим, что все полученные выше соотношения имеют приближенный характер. Они справедливы для малых значений m_l , так как в расчетах учитывалась лишь одна из высших гармоник. Для нахождения границ второго интервала неустойчивости с большей точностью нужно включить больше гармоник в пробную функцию $\varphi(t)$. В отсутствие трения начало отсчета времени удобнее выбрать так, чтобы движение грузов вдоль стержня ротора описывалось бы функцией $l(t) = l_0 (1 + m_l \cos \omega t)$. При таком выборе колебания на левой границе интервала содержат только косинусоидальные гармони-

ки, а на правой – синусоидальные. При учете вклада высших гармоник расчеты дают хорошее количественное согласие с результатами моделирования. Ниже приводятся теоретические значения периодов модуляции и относительных вкладов высших гармоник для глубины модуляции $m_l = 0.3$ (30 %) и в скобках – соответствующие им экспериментальные значения (полученные при моделировании):

Левая (косинусоидальная) граница:
период $T/T_0 = 0.9502$ (0.9502);

$C_4/C_2 = -0.203$ (-0.202);

$C_6/C_2 = 0.038$ (0.039).

Правая (синусоидальная) граница:
период $T/T_0 = 0.9727$ (0.9727);

$S_4/S_2 = -0.207$ (-0.207);

$S_6/S_2 = 0.039$ (0.039).

Для произвольных значений глубины модуляции m_l границы этого интервала показаны вторым «языком» на $T - m_l$ диаграмме (рис. 6 б). Чтобы наблюдать стационарные колебания в моделирующем эксперименте, нужно задать период модуляции, соответствующий одной из границ интервала, и правильно ввести начальные условия. Если $l(t) = l_0 (1 + m_l \cos \omega t)$, для левой границы можно выбрать любой угол отклонения $\varphi(0)$ и нулевую угловую скорость. Для правой границы, напротив, можно задать любую начальную скорость $\dot{\varphi}(0)$ и нулевое начальное отклонение.

В рассматриваемом здесь случае плавной модуляции момента инерции параметрический резонанс третьего порядка слабее и уже резонанса второго порядка, в

противоположность случаю прямоугольной модуляции со скачкообразными изменениями параметра. Третий интервал исчезает даже при наличии очень слабого трения. Стационарные колебания в условиях порога возбуждения резонанса третьего порядка показаны на рис. 11.

Чтобы найти границы третьего интервала неустойчивости, предположим, что движение грузов происходит по закону $l(t) = l_0 (1 + m_l \cos \omega t)$, и вос-



(период модуляции 0.9375, глубина модуляции 40.0%, добротность 29.0, начальное отклонение 25.7 град., нач. угловая скорость 0.02)

Рис. 10. Фазовая траектория и график угловой скорости стационарных колебаний в условиях порога параметрического резонанса второго порядка ($n = 2$)

пользуемся пробной функцией $\varphi(t)$, содержащей основную гармонику с частотой $\frac{1}{2}\omega$ и несколько высших нечетных гармоник с частотами $\frac{3}{2}\omega, \frac{5}{2}\omega, \dots$. Колебания на левой границе содержат только косинусоидальные гармоники, на правой – синусоидальные. После подстановки пробной функции в дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \left[(1 + m_l \cos \omega t)^2 \frac{d}{dt} \varphi \right] + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (38)$$

нужно приравнять нулю коэффициенты при гармониках с частотами $\frac{1}{2}\omega, \frac{3}{2}\omega, \frac{5}{2}\omega, \dots$. В результате получается система однородных уравнений для коэффициентов C_1, C_3, \dots (или S_1, S_3, \dots). Условие существования нетривиального решения этой системы дает уравнение для искомой границы. Уравнение получается таким же, как и для границ основного интервала, но теперь нужно искать его приближенное решение в окрестности $\frac{3}{2}T_0$ (вместо $\frac{1}{2}T_0$). В спектре колебаний доминирует третья гармоника (частота $\frac{3}{2}\omega$). Ниже приводятся значения периодов модуляции и относительных вкладов высших гармоник для глубины модуляции $m_l = 0.3$ (30%), полученные с учетом гармоник до 13-го порядка включительно (в расчете использовался пакет Mathematica) и в скобках – соответствующие им экспериментальные значения (полученные при моделировании):

Левая (косинусоидальная) граница:
 период $T/T_0 = 1.4369$ (1.4369);
 $C_1/C_3 = 0.107$ (0.110);
 $C_5/C_3 = -0.289$ (-0.288);
 $C_7/C_3 = 0.065$ (0.067).

Правая (синусоидальная) граница:
 период $T/T_0 = 0.5528$ (0.5528);
 $S_1/S_3 = 0.135$ (0.136);
 $S_5/S_3 = -0.291$ (-0.292);
 $S_7/S_3 = 0.066$ (0.066).

Стационарные колебания на границах третьего интервала параметрической неустойчивости показаны на рис. 12.

Аналогичные расчеты возможны для нахождения периодов модуляции, при которых возникают резонансы более высоких порядков. Соответствующие им интервалы неустойчивости очень узки, то есть обе границы каждого из интервалов почти совпадают. Ниже приводятся значения периодов модуляции и спектральные составы стационарных колебаний для границ 4-го и 5-го интервалов (при $m_l = 0.3$):

Левая (косинусоидальная) граница 4-го резонанса:

период $T/T_0 = 1.9107$ (1.9107);
 $C_2/C_4 = 0.219$ (0.220);
 $C_6/C_4 = -0.377$ (-0.374);
 $C_8/C_4 = 0.100$ (0.102);
 $C_{10}/C_4 = -0.023$ (-0.021).

Правая (синусоидальная) граница 4-го резонанса:

период $T/T_0 = 1.9112$ (1.9112);
 $S_2/S_4 = 0.222$ (0.222);
 $S_6/S_4 = -0.377$ (-0.377);
 $S_8/S_4 = 0.100$ (0.100);
 $S_{10}/S_4 = -0.023$ (-0.023).

Левая (косинусоидальная) граница 5-го резонанса:

период $T/T_0 = 2.3872$ (2.3872);
 $C_1/C_5 = 0.017$ (0.019);
 $C_3/C_5 = 0.319$ (0.321);
 $C_7/C_5 = -0.459$ (-0.466);
 $C_9/C_5 = 0.124$ (0.146).

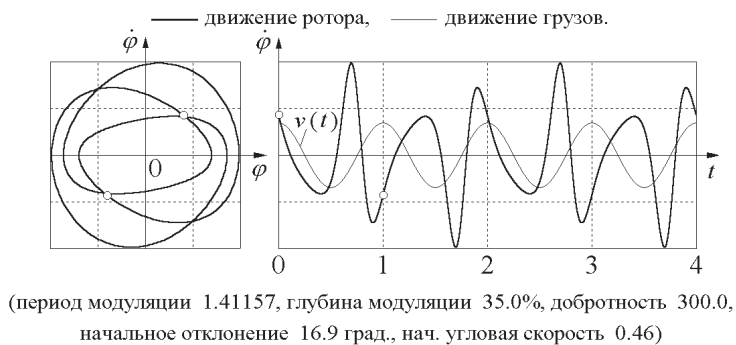


Рис. 11. Фазовая траектория и график угловой скорости стационарных колебаний в условиях порога параметрического резонанса третьего порядка ($n = 3$)

Правая (синусоидальная) граница 5-го резонанса:
 период $T/T_0 = 2.3873$ (2.3873);
 $S_1/S_5 = 0.020$ (0.020);
 $S_3/S_5 = 0.321$ (0.321);
 $S_7/S_5 = -0.468$ (-0.468);
 $S_9/S_5 = 0.142$ (0.144).

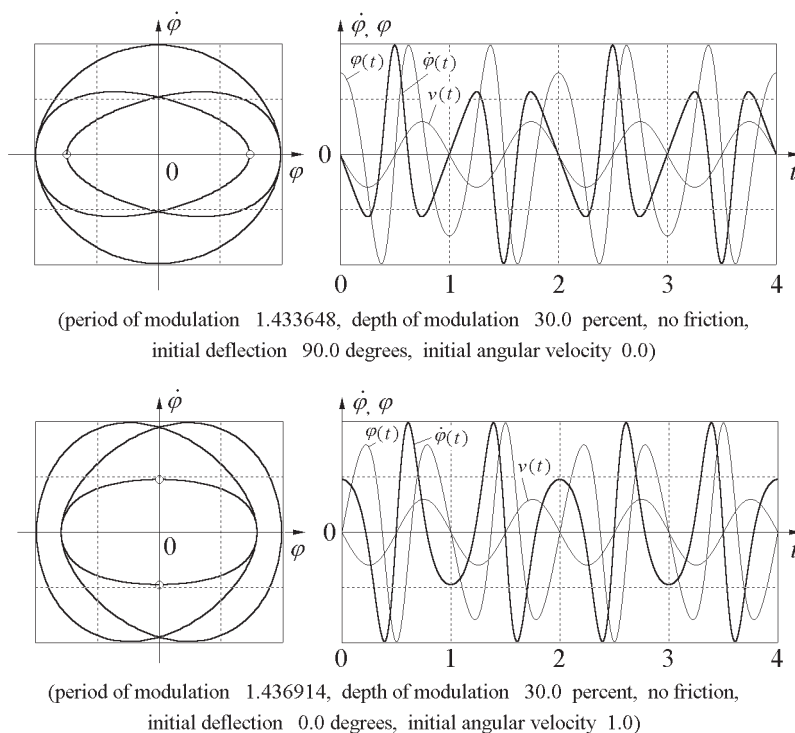


Рис. 12. Фазовые траектории и графики угловой скорости стационарных колебаний на границах третьего интервала параметрической неустойчивости

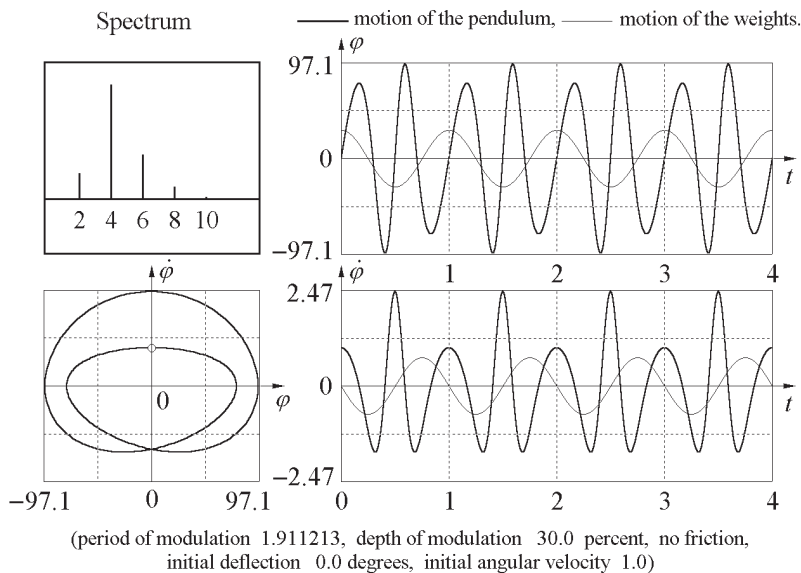


Рис. 13. Спектральный состав, фазовая траектория и графики стационарных колебаний на границах 4-го интервала параметрической неустойчивости

Спектральный состав, фазовые траектории и графики угловой скорости стационарных колебаний на границах 4-го и 5-го интервалов показаны на рис. 13 и 14 соответственно.

Почти точное совпадение обеих границ для интервалов высших порядков означает, что при модуляции параметра с соответствующим периодом будет наблюдаться не резонансный рост колебаний (даже в отсутствие трения), а лишь стационарные колебания постоянной амплитуды. Из графиков на рис. 13 и 14 можно видеть, что при точной настройке на резонанс n -го порядка осциллятор совершает в точности целое число n собственных колебаний (с переменными периодом и амплитудой) ровно за два цикла модуляции параметра. Такой процесс имеет периодический характер при произвольных начальных условиях, в противоположность границам интервалов низких порядков, для которых периодические колебания можно наблюдать только при определенных начальных условиях.

Такое поведение осциллятора можно объяснить на основе аналогии с хорошо известным явлением частотной модуляции. В условиях параметрических резонансов вы-

соких порядков грузы перемещаются вдоль стержня ротора с периодом, весьма большим по сравнению с периодом собственных крутильных колебаний ротора ($T \gg T_0$). Медленное периодическое изменение момента инерции означает, что текущее значение собственной частоты осциллятора подвергается медленной модуляции. Рис. 13 и 14 ясно показывают, как собственные колебания ротора замедляются, когда грузы смещены к концам стержня ротора, и ускоряются при грузах, приближенных к его оси.

Поэтому мы можем рассматривать движение ротора в условиях параметрических резонансов высоких порядков как частотно-модулированное колебание, в котором частота собственных колебаний ротора (доминирующая гармоника) играет роль несущей частоты.

Показанный на рис. 13 и 14 спектральный состав колебаний дает убедитель-

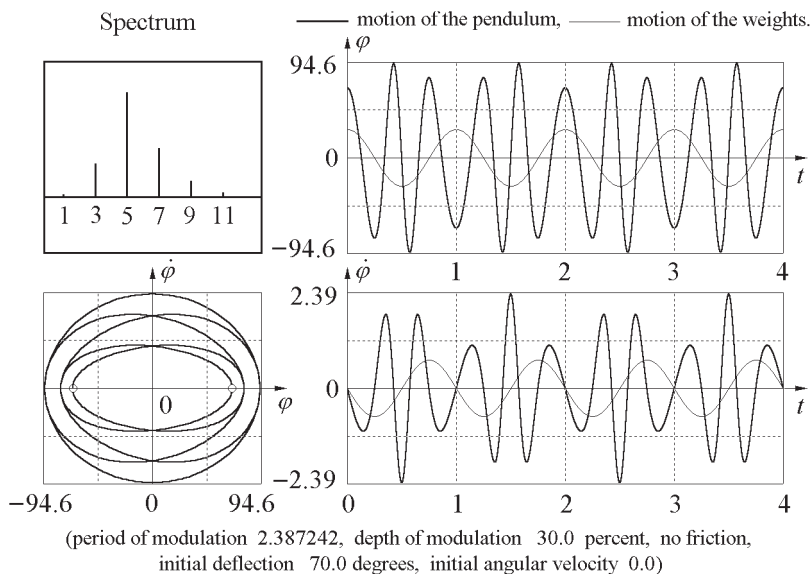


Рис. 14. Спектральный состав, фазовая траектория и графики стационарных колебаний на границах 5-го интервала параметрической неустойчивости

ное подтверждение такой интерпретации. Гармоника с частотой $n\omega/2 \approx \omega_0$ имеет наибольшую амплитуду (несущее колебание). Вклады C_{n-2} и C_{n+2} боковых спектральных компонент с частотами $(n\omega/2 \pm \omega)$ имеют противоположные знаки и (при $n \gg 1$) почти равны по величине. Именно такой спектральный состав характерен для частотно-модулированных колебаний.

Abstract

The phenomenon of parametric resonance is explained and investigated both analytically and with the help of a computer simulation. Parametric excitation is studied on the example of the rotary oscillations of a simple linear system – mechanical torsion spring pendulum excited by smooth periodic variations of its moment of inertia. Conditions and characteristics of parametric resonance and regeneration are found and discussed in detail. Ranges of frequencies within which parametric excitation is possible are determined. Stationary oscillations at the boundaries of these ranges are investigated. Resonances of higher orders are explained in terms of the familiar phenomenon of frequency modulation. The simulation experiments aid greatly an understanding of basic principles and peculiarities of parametric excitation and complement the analytical study of the subject in a manner that is mutually reinforcing.

Keywords: linear oscillator, parametric excitation, modulation, threshold of excitation, intervals of instability, parametric regeneration, frequency modulation.

Бутиков Евгений Иванович,
профессор физического факультета
СПбГУ,
eugene.butikov@gmail.com.



Наши авторы, 2010.
Our authors, 2010.