

Параметрический резонанс

1 Введение

Как можно раскачать детские качели? Можно, например, периодически подталкивать качели в направлении движения. Даже при небольших прилагаемых усилиях можно получить большой размах колебаний, если подталкивать качели каждый раз при их прохождении через нижнюю точку. Это хорошо известное явление *резонанса*, возникающее при ритмическом внешнем воздействии на колебательную систему. Резонанс наступает при условии совпадения частоты периодического внешнего воздействия с собственной частотой системы.

Но все знают, что можно раскачаться на качелях и без посторонней помощи. Для этого нужно, стоя на качелях, периодически приседать и выпрямлять ноги. Размах колебаний нарастает особенно сильно, если приседать в положениях наибольшего отклонения и выпрямляться при прохождении качелей через нижнюю точку. Это наиболее знакомый пример *параметрического резонанса*, в котором нарастание колебаний обусловлено не внешним воздействием, а периодическим изменением какого-либо параметра колебательной системы. В данном случае при приседании и выпрямлении происходит периодическое изменение (модуляция) приведенной длины физического маятника, каковым являются качели с находящимся на них человеком.

В этой статье мы подробно рассмотрим особенности параметрического резонанса на примере простой механической системы — пружинного осциллятора, ротор которого может совершать крутильные колебания. Подробное описание моделируемой системы приведено ниже. Поведение такой системы подчиняется линейному дифференциальному уравнению и потому на ее примере легче понять физические основы параметрического резонанса, чем в случае качелей, которые представляют собой нелинейную систему.

Мы проведем сравнение вынужденных и параметрических колебаний, рассмотрим энергетические превращения и порог параметрического резонанса, рассчитаем частотные интервалы параметрической неустойчивости и найдем условия режима параметрической регенерации. Все изучаемые закономерности иллюстрируются специально разработанной интерактивной моделирующей компьютерной программой, которую Вы найдете на прилагаемом к журналу диске.

2 О классификации колебаний

В соответствии с общепринятой классификацией колебаний по способу их возбуждения колебания называют *собственными*, если они происходят в предоставленной самой себе колебательной системе после того, как систему вывели из состояния равновесия некоторым начальным воздействием. Колебания называют *вынужденными*, если осциллятор подвержен периодическому внешнему воздействию, влияние которого в дифференциальном уравнении осциллятора можно выразить отдельным членом, имеющим вид заданной периодической функции времени. Более сложен для изучения случай параметрического возбуждения колебаний, когда воздействие на осциллятор выражается в периодическом изменении (модуляции) какого-либо параметра системы. Пусть, например, при отклонении от положения равновесия возникает восстанавливающая сила $F = -kx$, но в отличие от стационарного случая параметр k в результате какого-либо периодического воздействия изменяется со временем: $k = k(t)$. В дифференциальном уравнении такой системы,

$$m\ddot{x} = -k(t)x, \quad (1)$$

коэффициент при x не постоянен: он явно зависит от времени. Колебания в такой системе существенно отличаются как от собственных колебаний в системе, описываемой уравнением с постоянными коэффициентами, так и от вынужденных колебаний под действием внешней силы, зависящей только от времени.

В случае периодического изменения параметра k , когда $k(t + T) = k(t)$, где T — период, дифференциальное уравнение (1) называется *уравнением Хилла*. Колебания в системе, описываемой уравнением Хилла, называются параметрически возбуждаемыми или просто *параметрическими*.

Когда колебательный процесс, вызываемый периодической модуляцией какого-либо параметра, принимает нарастающий характер, говорят о *параметрическом резонансе*. В случае параметрического резонанса состояние равновесия системы становится неустойчивым и уход из него имеет характер колебаний с прогрессивно растущей амплитудой.

Во Введении уже упоминался известный пример параметрического резонанса — раскачивание качелей при периодических изменениях момента инерции (а тем самым и приведенной длины) физического маятника, т. е. качелей вместе с находящимся на них человеком. Параметрическое возбуждение возможно в любых колебательных системах. Например, в колебательном LCR -контуре из последовательно соединенных катушки индуктивности, конденсатора и резистора можно возбудить колебания, изменяя емкость конденсатора периодическим сближением и разведением его пластин, либо изменяя индуктивность катушки периодическим вдвиганием и выдвиганием сердечника. Наиболее интенсивные колебания возбуждаются в том случае, когда цикл таких изменений повторяется два раза за один период собственных колебаний в контуре, т. е. когда частота модуляции параметра вдвое превышает собственную частоту системы.

Очевидно, что параметрическое возбуждение возможно лишь при модуляции одного из энергоемких параметров системы (емкости C или индуктивности L в случае колебательного контура, жесткости пружины или инертности ротора в случае механического осциллятора). Модуляция сопротивления R или коэффициента затухания может повлиять лишь на характер затухания колебаний, но не может привести к их нарастанию.

3 Особенности параметрического резонанса

По ряду признаков параметрический резонанс существенно отличается от обычного резонанса, вызываемого прямым силовым воздействием на колебательную систему. Параметрический резонанс наступает при выполнении определенных соотношений между частотой изменения параметра и собственной частотой возбуждаемой системы. Эти условия отличаются от характерного для обычного резонанса простого условия совпадения частоты внешнего воздействия и собственной частоты системы. Параметрический резонанс, в отличие от обычного резонанса, представляет собой *пороговый эффект*, так как при наличии трения он возможен лишь при достаточно большой амплитуде изменения параметра, т. е. при достаточно большой *глубине модуляции*, превосходящей некоторое критическое значение. Модуляция параметра не может раскачать осциллятор, находящийся в состоянии покоя в положении равновесия: для возбуждения параметрического резонанса, в отличие от обычного резонанса, осциллятор должен совершать хотя бы небольшие собственные колебания.

Далее параметрическое возбуждение рассматривается на примере крутильных колебаний механического торсионного пружинного осциллятора. Возбуждение колебаний обеспечивается периодическими изменениями (модуляцией) момента инерции ротора (маховика) пружинного осциллятора. Схематическое изображение торсионного осциллятора показано на рис. 1. Ротор осциллятора представляет собой уравновешенный стержень с двумя одинаковыми грузами, который может поворачиваться вокруг оси, проходящей через его середину. При повороте ротора прикрепленная к нему спиральная пружина создает восстанавливающий момент, пропорциональный углу закручивания. Второй конец пружины закреплен неподвижно. В положении равновесия, т. е. при ненапряженной пружине, стержень ротора одним из своих концов указывает на нулевое деление шкалы.

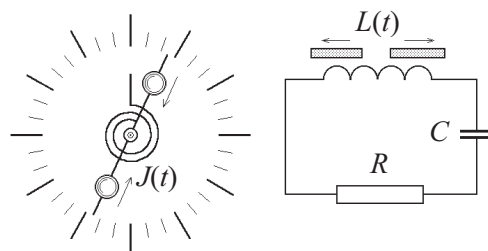


Рис. 1: Схематическое изображение торсионного осциллятора с модулируемым моментом инерции и его электромагнитный аналог — колебательный контур с модулируемой индуктивностью.

Грузы ротора можно одновременно сдвигать вдоль стержня в противоположных направлениях так, что центр масс системы остается на оси вращения. При таком смещении грузов изменяется момент инерции ротора: момент инерции возрастает при раздвигании грузов (при удалении от оси вращения) и убывает при их приближении к оси. Изменение момента инерции ротора приводит к изменению частоты собственных крутильных колебаний осциллятора. Принудительными периодическими перемещениями грузов вдоль стержня туда и обратно создается модуляция момента инерции, необходимая для параметрического возбуждения крутильных колебаний осциллятора. В данной модели предполагается модуляция момента инерции по прямоугольному кусочно-постоянному закону, когда перемещения грузов вдоль стержня происходят скачкообразно. Вызванные смещениями грузов резкие, почти мгновенные увеличения и уменьшения момента инерции происходят поочередно через равные промежутки времени. Обозначим эти промежутки через $T/2$, так что T — это полный период изменений момента инерции (*период модуляции*).

Такие принудительные изменения параметра, описываемые прямоугольной зависимостью от времени, могут вызвать заметное раскачивание ротора при условии, что период модуляции выбран должным образом. Дадим качественное физическое объяснение этого эффекта. Предположим, например, что грузы приближаются к оси ротора в тот момент, когда ротор проходит через положение равновесия и имеет поэтому почти максимальную угловую скорость. При радиальном смещении грузов момент импульса ротора остается прежним. Так как момент импульса равен произведению момента инерции на угловую скорость, уменьшение момента инерции сопровождается увеличением угловой скорости ротора, и ротор получает дополнительную энергию. Чем больше была угловая скорость ротора в момент сближения грузов, тем значительнее возрастание его кинетической энергии. Эта дополнительная энергия поставляется источником, вызывающим принудительные радиальные перемещения грузов вдоль стержня.

Здесь уместно провести аналогию с хорошо знакомым трюком в фигурном катании. Вспомните, как ускоряется вращение фигуриста вокруг собственной оси, когда он подтягивает к корпусу разведенные в стороны руки, уменьшая тем самым свой момент инерции.

С другой стороны, когда грузы раздвигаются в стороны от оси вращающегося ротора, угловая скорость вращения ротора и его кинетическая энергия уменьшаются. При этом энергия передается назад от ротора источнику модуляции. Чтобы приращения энергии происходили регулярно и в целом превышали энергию, возвращаемую источнику, систематически «подпитывая» ротор энергией, период и фаза модуляции момента инерции должны удовлетворять определенным условиям. Выясним, каким именно.

Пусть, например, грузы сдвигаются к оси вращения и затем раздвигаются в прежние положения дважды на протяжении одного среднего периода собственных колебаний. Пусть грузы придвигаются к оси вращения каждый раз в те моменты, когда угловая скорость ротора максимальна. Тогда их возвращение в прежние положения придется на момент почти максимального отклонения от равновесия, когда угловая скорость ротора близка к нулю. Такие фазовые соотношения выполняются для колебаний, графики которых показаны на рис. 2.

Напомним, что угловая скорость ротора возрастает при сближении грузов и убывает при их раздвигании, и эти изменения скорости пропорциональны самой скорости. Но поскольку в момент раздвигания грузов угловая скорость ротора близка к нулю, такое раздвигание не вызывает практически никакого изменения угловой скорости и кинетической энергии ротора. Таким образом, модуляция момента инерции с периодом, вдвое меньшим собственного среднего периода осциллятора, приводит к максимально возможному росту амплитуды при условии, что фаза модуляции выбрана так, как описано выше. Это условия возбуждения основного параметрического резонанса.

Очевидно, что эффективный рост энергии осциллятора возможен не только тогда, когда два полных цикла изменения параметра происходят на протяжении одного периода собственных колебаний, но также когда два цикла модуляции происходят на протяжении трех, пяти или другого нечетного числа периодов собственных колебаний. Это параметрические резонансы нечетных порядков.

Ниже будет показано, что возрастание энергии осциллятора, хотя и менее значительное, может происходить и тогда, когда два цикла модуляции параметра происходят на протяжении четного числа периодов собственных колебаний.

Если принудительные изменения параметра совершаются с указанной выше периодичностью, но не скачкообразно, их влияние на осциллятор качественно оказывается аналогичным, хотя эффективность вложения энергии (при той же амплитуде модуляции параметра) максимальна при модуляции по прямоугольному закону, потому что именно такой закон модуляции может обеспечить

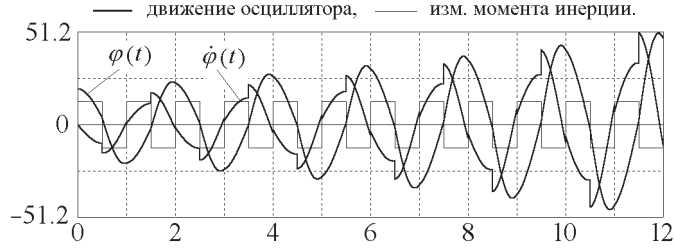


Рис. 2: Графики угла отклонения и угловой скорости при параметрическом возбуждении колебаний модуляцией момента инерции по кусочно-постоянному закону.

наиболее оптимальные условия передачи энергии осциллятору. Случай плавной (синусоидальной) модуляции параметра важен для практических приложений.

Ниже мы рассмотрим более строгий математический подход к описанию параметрического резонанса, вызываемого кусочно-постоянной модуляцией параметра по прямоугольному закону.

4 Порог параметрического возбуждения

Для оценки глубины модуляции, соответствующей порогу параметрического возбуждения, можно воспользоваться соображениями, основанными на законе сохранения энергии. Прежде всего рассчитаем приращение кинетической энергии ротора, происходящее при скачкообразном смещении грузов в направлении оси вращения, когда момент инерции ротора уменьшается от значения $J_1 = J_0(1 + m)$ до $J_2 = J_0(1 - m)$. Ограничимся случаем малых значений глубины модуляции m ($m \ll 1$). При радиальном смещении грузов момент импульса ротора $L = J\omega = J\dot{\varphi}$ остается неизменным: $J_1\dot{\varphi}_1 = J_2\dot{\varphi}_2$, откуда для отношения угловых скоростей до и после изменения момента инерции получаем $\dot{\varphi}_2/\dot{\varphi}_1 = J_1/J_2 = (1 + m)/(1 - m)$. Для происходящего при этом приращения ΔE кинетической энергии ротора $E_{\text{kin}} = J\dot{\varphi}^2/2 = L^2/2J$ можно написать:

$$\Delta E = \frac{L^2}{2J_0} \left(\frac{1}{1 - m} - \frac{1}{1 + m} \right) \approx 2mE_{\text{kin}}. \quad (2)$$

(последнее приближенное равенство справедливо при малой глубине модуляции $m \ll 1$). Когда такое событие происходит вблизи положения равновесия ротора, т. е. в момент, когда полная энергия осциллятора E практически совпадает с кинетической энергией ротора E_{kin} , из выражения (2) следует, что относительное приращение полной энергии $\Delta E/E$ при однократном сближении грузов примерно равно удвоенному значению глубины модуляции m : $\Delta E/E \approx 2m$.

Если период и фаза модуляции имеют те значения, которые наиболее благоприятны для эффективной передачи энергии осциллятору, скачкообразное смещение грузов назад к концам стержня происходит в тот момент, когда ротор находится в положении наибольшего отклонения (точнее, очень близок к этому положению). В этот момент угловая скорость и кинетическая энергия ротора имеют почти нулевые значения, и поэтому обратное радиальное смещение грузов в прежние положения к концам стержня почти не приводит к уменьшению энергии осциллятора.

В случае основного параметрического резонанса (т. е. резонанса 1-го порядка $n = 1$) вложение энергии происходит дважды на протяжении одного периода T_0 собственных колебаний. Таким образом, относительное приращение энергии $\Delta E/E$ за один период колебаний составляет приблизительно $4m$. Процесс, в котором приращение энергии ΔE за период пропорционально запасенной энергии E ($\Delta E \approx 4mE$), характеризуется экспоненциальным ростом энергии со временем:

$$E(t) = E_0 \exp(\alpha t). \quad (3)$$

В данном случае показатель роста α пропорционален глубине модуляции m момента инерции: $\alpha = 4m/T_0$. В условиях точной настройки периода модуляции на основной резонанс (т. е. при $T = T_0/2$) уменьшение энергии осциллятора происходит главным образом из-за трения. Известно, что при линейном (пропорциональном скорости) трении амплитуда колебаний убывает со временем экспоненциально: $A(t) = A_0 \exp(-\gamma t)$, где γ — постоянная затухания колебаний. Энергия

колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому рассеяние энергии за промежуток времени, равный целому числу периодов колебаний, дается следующим выражением:

$$E(t) = E_0 \exp(-2\gamma t). \quad (4)$$

Для относительного уменьшения $\Delta E/E$ энергии из-за трения выражение (4) дает $\Delta E/E \approx -2\gamma t$. Приравнявая найденное выше относительное увеличение энергии $4m$ за период T_0 , вызванное прямоугольной модуляцией момента инерции, относительному уменьшению энергии из-за трения $2\gamma T_0$ за то же время, получаем следующее пороговое (минимальное) значение m_{\min} глубины модуляции, соответствующее основному ($n = 1$) параметрическому резонансу:

$$m_{\min} = \gamma T_0/2 = \pi/(2Q). \quad (5)$$

Здесь мы выразили постоянную затухания γ собственных колебаний осциллятора через более удобную характеристику интенсивности вязкого трения: безразмерную величину $Q = \omega_0/(2\gamma)$, называемую *добротностью* осциллятора.

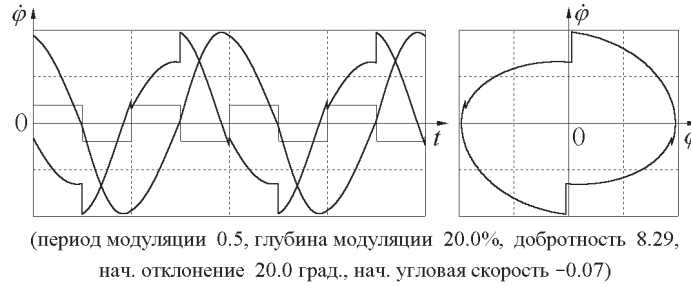


Рис. 3: Графики и фазовая траектория стационарных колебаний в условиях порога $m = \pi/2Q$ при $T \approx T_0/2$.

График угловой скорости и фазовая траектория колебаний, происходящих в условиях порога параметрического возбуждения, приведены на рис. (3). Такой режим стационарных колебаний, амплитуда которых остается неизменной несмотря на диссипацию энергии, называется *параметрической регенерацией*. Стационарный характер колебаний оказывается возможным благодаря тому, что потери энергии из-за трения в среднем компенсируются поступлением энергии от источника, который приводит грузы в движение вдоль стержня, обеспечивая периодическую модуляцию момента инерции ротора.

Для резонанса третьего порядка, когда $T = 3T_0/2$, пороговое значение глубины модуляции в три раза больше, чем для основного резонанса: $m_{\min} = 3\pi/(2Q)$. В этом случае два цикла модуляции параметра совершаются на протяжении трех полных периодов собственных колебаний. Радиальные перемещения грузов вдоль стержня ротора здесь также происходят в моменты, наиболее благоприятные для передачи энергии осциллятору, поэтому то же самое вложение энергии происходит в течение втрое большего интервала времени, чем в случае основного резонанса.

Если глубина модуляции превосходит пороговое значение, энергия осциллятора растет со временем экспоненциально. Рост энергии и здесь описывается уравнением (3). Однако теперь показатель скорости роста энергии α определяется превышением энергии, сообщаемой осциллятору благодаря модуляции параметра, над потерями энергии из-за трения за то же время: $\alpha = 4m/T_0 - 2\gamma$. Энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому амплитуда параметрически возбуждаемых колебаний тоже экспоненциально растет со временем: $a(t) = a_0 \exp(\beta t)$. Показатель β скорости роста амплитуды равен половине показателя скорости роста энергии. В условиях основного резонанса, когда вложения энергии происходят дважды на протяжении периода собственных колебаний, для показателя скорости роста амплитуды получаем $\beta = 2m/T_0 - \gamma = 2\omega_0/\pi - \gamma$.

Графики экспоненциального роста колебаний в условиях основного резонанса показаны на рис. 2 на стр. 4, и на рис. 4, где также показана фазовая траектория. Затухающим собственным колебаниям на интервалах постоянства момента инерции соответствуют участки фазовой траектории в виде

отрезков спиралей, скручивающихся к фокусу. Вертикальные сегменты соответствуют скачкообразным изменениям угловой скорости в моменты радиальных смещений грузов ротора. В совокупности образуется раскручивающаяся фазовая траектория, соответствующая нарастающим колебаниям.

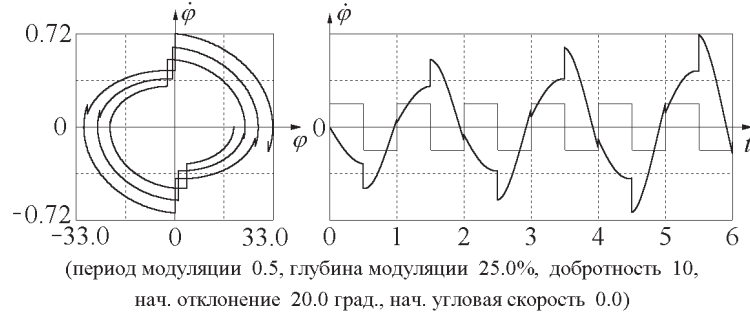


Рис. 4: Экспоненциальный рост амплитуды колебаний в условиях основного параметрического резонанса ($n = 1$).

5 Дифференциальное уравнение параметрических колебаний

Допустим, что периодические изменения момента инерции ротора J происходят по прямоугольно-кусочно-постоянному закону. Пусть максимальное и минимальное значения момента инерции равны соответственно $J_1 = J_0(1 + m)$ и $J_2 = J_0(1 - m)$, где J_0 — значение момента инерции при некотором среднем положении грузов на стержне, а m — безразмерная глубина модуляции $m < 1$. На протяжении интервалов времени $(0, T/2)$ и $(T/2, T)$ значение момента инерции постоянно, и движение ротора может рассматриваться как свободное колебание, описываемое линейным дифференциальным уравнением. Однако коэффициенты в этом уравнении различны для соседних интервалов времени $(0, T/2)$ и $(T/2, T)$:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{1+m}(\omega_0^2\varphi + 2\gamma\dot{\varphi}) \quad \text{для } 0 < t < T/2, \quad (6)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{1-m}(\omega_0^2\varphi + 2\gamma\dot{\varphi}) \quad \text{для } T/2 < t < T. \quad (7)$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{D/J_0}$ — собственная частота осциллятора, а γ — постоянная затухания, характеризующая интенсивность вязкого трения в системе. Обе эти величины относятся к среднему значению момента инерции $J_0 = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)$. Для малых и умеренных значений m момент инерции равен J_0 , когда грузы находятся приблизительно на полпути между их крайними положениями на стержне ротора. При больших m это не так, потому что момент инерции определяется квадратом расстояния грузов от оси вращения ротора.

Для интервалов постоянства момента инерции дифференциальные уравнения (6) — (7) линейны и имеют точные аналитические решения. Развиваемый ниже теоретический подход опирается на «сшивание» этих решений в моменты скачкообразных изменений параметра, когда мы должны совершить переход от одного из этих линейных уравнений к другому. Уравнения (6) — (7) сменяют друг друга в моменты времени $t = nT/2$, где $n = 1, 2, \dots$

Начальные условия для каждого промежутка выбираются в соответствии с принятой физической моделью следующим образом. Каждое начальное значение угла отклонения φ берется равным углу $\varphi(t)$, достигнутому ротором к концу предшествующего промежутка времени. Начальная угловая скорость $\dot{\varphi}$ связана с угловой скоростью в конце предыдущего интервала времени законом сохранения момента импульса:

$$(1+m)\dot{\varphi}_1 = (1-m)\dot{\varphi}_2. \quad (8)$$

В уравнении (8) $\dot{\varphi}_1$ — угловая скорость в конце предшествующего интервала времени, на протяжении которого момент инерции ротора был равен $J_1 = J_0(1 + m)$, а $\dot{\varphi}_2$ — начальное значение для следующего интервала, на протяжении которого момент инерции равен $J_2 = J_0(1 - m)$. Изменение угловой скорости при следующем скачкообразном изменении момента инерции от значения J_2 до J_1 можно рассчитать точно так же.

Применение закона сохранения момента импульса для нахождения выражаемой формулой (8) связи угловой скорости до и после изменения момента инерции здесь допустимо, несмотря на то, что вращение маховика, строго говоря, не является свободным: на него действует момент силы упругости пружины. Действительно, влиянием пружины можно пренебречь, если перемещение грузов вдоль стержня ротора происходит за время, значительно меньшее периода собственных колебаний. В принятой модели физической системы предполагается, что это перемещение грузов происходит мгновенно.

На протяжении каждой половины периода модуляции $T/2$ вращение ротора осциллятора описывается линейным дифференциальным уравнением (6) или (7). Таким образом, это движение представляет собой отрезок некоторого гармонического (при $\gamma = 0$) или затухающего колебания. График такого движения на отдельном интервале постоянства момента инерции — это отрезок синусоиды (или затухающей синусоиды). Аналитическое исследование параметрического возбуждения колебаний при кусочно-постоянной модуляции параметра можно выполнять «сшиванием» («припасовкой» по выражению академика Л. И. Мандельштама) известных решений линейных уравнений для последовательных интервалов времени.

6 Резонансные значения частоты модуляции параметра

Порог параметрического возбуждения был найден выше для условий основного резонанса, когда два цикла принудительной модуляции параметра совершаются на протяжении одного периода собственных колебаний осциллятора. Полученная оценка (5) справедлива для малых значений глубины модуляции m .

При больших значениях глубины модуляции m само понятие периода собственных колебаний осциллятора требует уточнения. Пусть $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{J_0/D}$ — период колебаний ротора, когда грузы на нем закреплены в средних положениях. Соответствующий этим положениям грузов момент инерции ротора равен $J_0 = \frac{1}{2}(J_{\max} + J_{\min})$. Период собственных колебаний T_1 будет немного больше, когда грузы смещены дальше от оси вращения: $T_1 = T_0\sqrt{1+m} \approx T_0(1+m/2)$. Период будет меньше, когда грузы придвинуты ближе к оси вращения: $T_2 = T_0\sqrt{1-m} \approx T_0(1-m/2)$. Для дальнейших применений будет удобнее определить средний период T_{av} не как арифметическое среднее $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$, а скорее как период, соответствующий средней частоте $\omega_{\text{av}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, где $\omega_1 = 2\pi/T_1$ и $\omega_2 = 2\pi/T_2$. Таким образом, для заданного значения глубины модуляции средним периодом будем называть следующую величину:

$$T_{\text{av}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{av}}} = \frac{2T_1T_2}{(T_1 + T_2)}. \quad (9)$$

Вследствие зависимости среднего периода собственных колебаний от глубины модуляции, значение периода T модуляции параметра, соответствующее точной настройке на какой-либо из параметрических резонансов, оказывается зависящим не только от порядка n резонанса, но и от глубины модуляции m . В самом деле, для выполнения условий резонанса приращение фазы собственных колебаний на протяжении одного цикла модуляции должно быть равно $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi, \dots$. В течение первого полуцикла модуляции фаза получает приращение $\omega_1 T/2$, а в течение второго полуцикла — приращение $\omega_2 T/2$, откуда мы получаем:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} T = n\pi, \quad \text{или} \quad T = n \frac{\pi}{\omega_{\text{av}}} = n \frac{T_{\text{av}}}{2}. \quad (10)$$

Таким образом, условие точной настройки на резонанс определенного порядка n выражается через значения двух периодов собственных колебаний T_1 и T_2 . Это условие имеет вид $T = nT_{\text{av}}/2$, где T_{av} определяется выражением (9).

Для малых и умеренных значений m можно пользоваться приближенными выражениями для средних значений частоты и периода:

$$\omega_{av} = \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+m}} + \frac{1}{\sqrt{1-m}} \right) \approx \omega_0 \left(1 + \frac{3}{8}m^2 \right),$$

$$T_{av} = \frac{2\pi}{\omega_{av}} \approx T_0 \left(1 - \frac{3}{8}m^2 \right).$$

Различие между T_{av} и T_0 проявляется лишь в членах, пропорциональных квадрату глубины модуляции m .

7 Частотные интервалы параметрической неустойчивости

Бесконечный рост амплитуды при параметрическом возбуждении возможен не только в случаях точной настройки на какой-либо из резонансов, но и в некоторых интервалах значений периода модуляции. Эти *интервалы параметрического резонанса* содержат в себе значения $T = T_{av}/2$, $T = T_{av}$, $T = 3T_{av}/2$, ..., соответствующие точной настройке на резонансы. Ширина интервалов возрастает с увеличением глубины модуляции m (при малых и умеренных значениях глубины модуляции). Вне этих интервалов положение равновесия торсионного осциллятора устойчиво, т. е. при модуляции момента инерции амплитуда колебаний не нарастает.

Чтобы определить границы частотных интервалов параметрической неустойчивости, можно рассмотреть стационарные колебания неизменной амплитуды, которые могут происходить, когда период модуляции T совпадает с одной из этих границ. Такие стационарные колебания можно представить как чередование свободных (собственных) колебаний с периодами T_1 и T_2 . В отсутствие трения графики таких колебаний образованы сегментами незатухающих синусоидальных кривых соответствующих периодов.

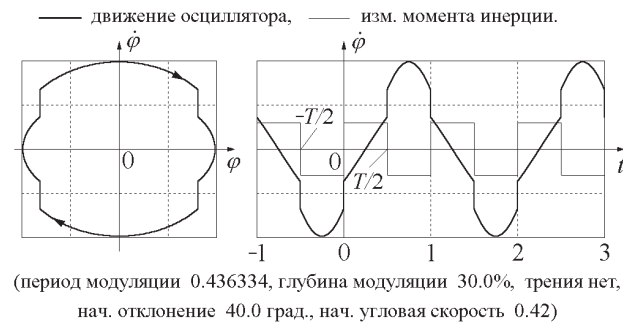


Рис. 5: Стационарные параметрические колебания на нижней границе основного интервала неустойчивости (вблизи $T = T_{av}/2$).

7.1 Частотный интервал основного резонанса

Рассмотрим сначала окрестность основного резонанса с $T = T_{av}/2$. Предположим, что период T модуляции параметра немного короче резонансного значения $T = T_{av}/2$, так что он соответствует левой границе основного интервала неустойчивости. В этом случае промежуток постоянства момента инерции длится менее четверти среднего периода T_{av} собственных колебаний, и поэтому чуть меньше четверти собственного колебания успевает совершиться за это время. Фазовая траектория и график угловой скорости такого периодического процесса имеют характерный вид, показанный на рис. 5. Участки графика скорости на интервалах постоянства момента инерции представляют собой чередующиеся отрезки синусоидальных кривых с периодами T_1 и T_2 . Эти отрезки синусоид симметрично усечены с двух сторон на краях интервалов.

Чтобы найти условия, при которых возможны такие стационарные колебания, можно написать выражения для $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ на соседних интервалах, и затем потребовать, чтобы эти выражения должным образом сшивались на границах интервалов.

Примем для простоты за начало отсчета времени $t = 0$ момент, когда грузы скачкообразно раздвигаются в стороны от оси. В этот момент угловая скорость ротора скачком уменьшается по

модулю (см. рис. 5). Затем в течение промежутка времени $(0, T/2)$ момент инерции постоянен и график соответствует собственному колебанию с частотой $\omega_1 = \omega_0/\sqrt{1+m}$. Это движение удобно представить как суперпозицию синусоидальной и косинусоидальной функций с постоянными амплитудами A_1 и B_1 :

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t, \\ \dot{\varphi}_1(t) &= A_1 \omega_1 \cos \omega_1 t - B_1 \omega_1 \sin \omega_1 t.\end{aligned}\quad (11)$$

Аналогично, в течение промежутка $(-T/2, 0)$ график на рис. 5 представляет собой отрезок синусоидального колебания с частотой $\omega_2 = \omega_0/\sqrt{1-m}$:

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t, \\ \dot{\varphi}_2(t) &= A_2 \omega_2 \cos \omega_2 t - B_2 \omega_2 \sin \omega_2 t.\end{aligned}\quad (12)$$

Для определения значений постоянных A_1, B_1 и A_2, B_2 можно воспользоваться условиями, которые должны выполняться при «сшивании» графиков для получения периодического процесса.

При $t = 0$ угол отклонения одинаков как для φ_1 , так и для φ_2 : $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Из этого условия находим, что $B_1 = B_2$. Будем в дальнейшем обозначать эти совпадающие постоянные просто как B . Угловая скорость в момент $t = 0$ изменяется скачком:

$$(1+m)\dot{\varphi}_1(0) = (1-m)\dot{\varphi}_2(0).$$

Это условие дает следующее соотношение между A_2 и A_1 : $A_2 = kA_1 = kA$, где введена безразмерная величина k , следующим образом зависящая от глубины модуляции m :

$$k = \sqrt{\frac{1+m}{1-m}}.$$

Уравнения для нахождения постоянных A и B получаются из условий сшивания в моменты $-T/2$ и $T/2$. В случае стационарных периодических колебаний, соответствующих основному резонансу (и всем резонансам нечетных порядков $n = 1, 3, \dots$ в выражении (10)), эти условия таковы:

$$\varphi_1(T/2) = -\varphi_2(-T/2), \quad (1+m)\dot{\varphi}_1(T/2) = -(1-m)\dot{\varphi}_2(-T/2).\quad (13)$$

Подставляя φ и $\dot{\varphi}$ из выражения (12) в (13), получаем систему двух однородных уравнений для неизвестных A и B :

$$\begin{aligned}(S_1 - kS_2)A + (C_1 + C_2)B &= 0, \\ k(C_1 + C_2)A - (kS_1 - S_2)B &= 0.\end{aligned}\quad (14)$$

В уравнениях (14) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}C_1 &= \cos(\omega_1 T/2), & C_2 &= \cos(\omega_2 T/2), \\ S_1 &= \sin(\omega_1 T/2), & S_2 &= \sin(\omega_2 T/2).\end{aligned}\quad (15)$$

Система (14) однородных уравнений для A и B имеет нетривиальное (ненулевое) решение только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$2kC_1C_2 - (1+k^2)S_1S_2 + 2k = 0.\quad (16)$$

Это условие существования ненулевого решения системы (14) дает уравнение для нахождения неизвестной переменной T , входящей в (16) через аргументы синусоидальных и косинусоидальных функций в S_1, S_2 и C_1, C_2 . Это уравнение и определяет искомые границы интервала неустойчивости. Нижняя и верхняя границы интервала T_- и T_+ даются корнями этого уравнения.

Чтобы найти приближенное решение этого трансцендентного уравнения (16), преобразуем его к более удобной форме. Сначала представим входящие в него произведения косинусов и синусов C_1C_2 и S_1S_2 следующим образом:

$$C_1 C_2 = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\Delta\omega T}{2} + \cos \omega_{av} T \right), \quad S_1 S_2 = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\Delta\omega T}{2} - \cos \omega_{av} T \right),$$

где $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Затем, используя тождество $\cos \alpha = 2 \cos^2(\alpha/2) - 1$, приведем (16) к следующему виду:

$$(1 + k) \cos \frac{\omega_{av} T}{2} = \pm |1 - k| \cos \frac{\Delta\omega T}{4}. \quad (17)$$

Для границ интервала неустойчивости, содержащего основной резонанс, нужно искать решение уравнения (17) для неизвестного T в окрестности $T = T_0/2$. При заданном значении глубины модуляции m уравнение (17) имеет два решения в окрестности $T_0/2 \approx T_{av}/2$, которые соответствуют нижней (см. рис. 5) и верхней границам T_- и T_+ интервала неустойчивости. Фазовая диаграмма и график угловой скорости для стационарных колебаний на верхней границе интервала показаны на рис. 6.



Рис. 6: Стационарные параметрические колебания на верхней границе основного интервала неустойчивости (вблизи $T = T_{av}/2$).

Чтобы найти границы T_- и T_+ интервала неустойчивости, представим искомый период T в аргументе косинуса в левой части уравнения (17) в виде $T_{av}/2 + \Delta T$, где $\Delta T \ll T_0$. Поскольку $\omega_{av} T_{av} = 2\pi$, можно переписать этот косинус как $-\sin(\omega_{av} \Delta T/2)$. Тогда уравнение (17) для неизвестного ΔT принимает вид:

$$\sin \frac{\omega_{av} \Delta T}{2} = \mp \frac{|1 - k|}{1 + k} \cos \frac{\Delta\omega (T_{av}/2 + \Delta T)}{4}. \quad (18)$$

В компьютерной программе это уравнение для ΔT решается численно методом итераций. Мы начинаем с $\Delta T = 0$ в качестве приближения нулевого порядка, подставляя это значение в правую часть (18), взятую, скажем, с верхним знаком. Тогда левая часть (18) дает нам значение ΔT в первом приближении. Подставляя это значение первого приближения в правую часть (18), в левой части получаем значение ΔT во втором приближении. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет получено самосогласованное значение ΔT для левой границы искомого интервала. Чтобы получить значение ΔT для его правой границы, используется та же процедура итераций для уравнения (18) с нижним знаком в его правой части. Полученные таким образом значения периода модуляции, соответствующие границам интервала неустойчивости при заданном значении глубины модуляции m , выводятся на экран, когда открыта панель «Ввод данных». Если Вы изменили m , для получения новых значений границ интервала неустойчивости достаточно нажать кнопку «Обновить информацию».

Диаграммы границ частотных интервалов параметрической неустойчивости в компьютерной программе можно вывести на экран, если в разделе главного меню «Теоретический обзор» выбрать пункт «Условия резонанса». В этой статье такие диаграммы приведены ниже на рис. 11.

После подстановки одного из корней T_- или T_+ уравнения (18) в систему (14) оба ее уравнения для нахождения A и B становятся эквивалентными и позволяют найти только отношение A/B . Это означает, что амплитуда стационарных колебаний на границе интервала неустойчивости может иметь любое значение. Это значение зависит от начальных условий. Но форма колебаний на

каждой из границ интервала однозначно определяется отношением амплитуд A и B синусоидальной и косинусоидальной функций, чередующиеся отрезки графиков которых образуют характерный профиль стационарных параметрических колебаний (см. рисунки 5 и 6).

7.2 Приближенные формулы для частотного интервала основного резонанса

Чтобы получить приближенное аналитическое решение уравнения (18), справедливое для малых значений глубины модуляции m , можно упростить выражение в его правой части, полагая $k \approx 1 + m$, $|1 - k| \approx m$. Можно также значение косинуса принять равным 1. В левой части уравнения (18), где $\omega_{av} = 2\pi/T_{av}$, можно заменить синус его малым аргументом. В результате получается следующее приближенное выражение, справедливое с точностью до членов второго порядка по малому параметру m :

$$T_{\mp} = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{m}{\pi} \right) T_{av}. \quad (19)$$

Поскольку в компьютерной программе в качестве естественной единицы времени для ввода периода модуляции T используется период собственных колебаний $T_0 = 2\pi\sqrt{D/J_0}$ (соответствующий среднему значению момента инерции J_0), удобно выразить эти приближенные значения T_{\mp} для границ интервала неустойчивости через T_0 :

$$T_{\mp} = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{m}{\pi} - \frac{3m^2}{8} \right) T_0. \quad (20)$$

7.3 Частотные интервалы резонансов нечетных порядков

Аналогично можно рассчитать границы интервала неустойчивости в окрестности резонанса третьего порядка $n = 3$, когда два полных цикла модуляции параметра совершаются на протяжении трех периодов собственных колебаний ($T = 3T_{av}/2$). Рассматривая стационарные колебания на границах этого интервала (рис. 7), мы приходим к тем же уравнениям (14) для A и B , и к уравнению (17) для значений периода модуляции, соответствующих границам интервала. Однако теперь нужно искать решение (14) в окрестности $T = 3T_{av}/2$.

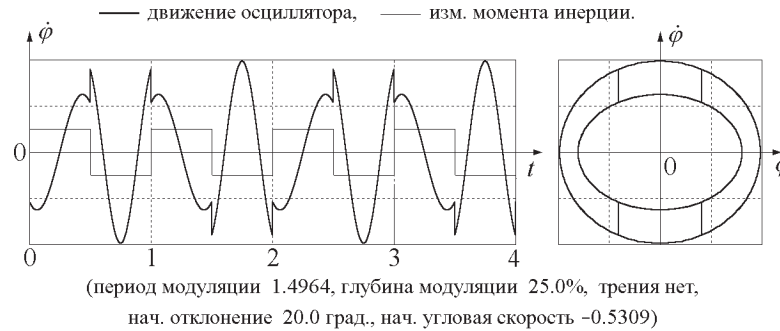


Рис. 7: Стационарные параметрические колебания на границе интервала неустойчивости вблизи $T = 3T_{av}/2$.

Границы этого интервала, полученные численным решением уравнения (17) для заданного значения m , также выводятся на экран, когда открыта панель «Ввод данных». При малых значениях глубины модуляции m можно получить приближенные выражения для нижней и верхней границ этого интервала, справедливые с точностью до квадратичных по m членов:

$$T_{\mp} = \left(\frac{3}{2} \mp \frac{m}{2\pi} \right) T_{av}. \quad (21)$$

Через период собственных колебаний T_0 (при $J = J_0$) эти границы выражаются следующим образом:

$$T_{\mp} = \left(\frac{3}{2} \mp \frac{m}{2\pi} - \frac{9m^2}{16} \right) T_0. \quad (22)$$

В данном приближении интервал неустойчивости вблизи резонанса третьего порядка имеет такую же ширину $(m/\pi)T_0$, что и интервал в окрестности основного резонанса. Однако третий интервал характеризуется большей асимметрией: его середина смещена в сторону меньших значений от $T = 3T_0/2$ на $(9/16)m^2T_0$.

7.4 Частотные интервалы резонансов четных порядков

При умеренных значениях глубины модуляции по прямоугольному кусочно-постоянному закону параметрический резонанс второго порядка $n = 2$ (один цикл модуляции на протяжении одного периода собственных колебаний) оказывается сравнительно слабым по сравнению с рассмотренными выше резонансами с $n = 1$ и $n = 3$. Дело в том, что в случае $n = 2$ скачкообразные изменения момента инерции вызывают одно увеличение и одно уменьшение энергии осциллятора за период. Рост амплитуды колебаний возможен лишь тогда, когда прирост энергии, происходящий при сближении грузов, превосходит убыль энергии при обратном раздвигании грузов. Это может быть только при условии, что грузы сдвигаются к оси в моменты времени, когда угловая скорость ротора больше, чем когда грузы раздвигаются в стороны. При $T \approx T_{av}$ выполнение такого условия может обеспечиваться лишь за счет малого различия в периодах T_1 и T_2 собственных колебаний ротора при раздвинутых и сдвинутых к оси грузах. Это различие периодов T_1 и T_2 само пропорционально малой величине m .

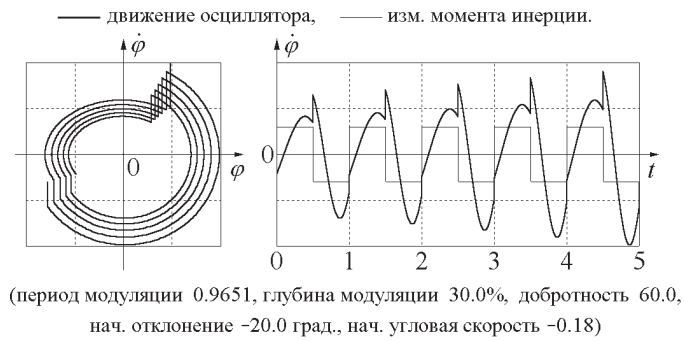


Рис. 8: Фазовая траектория колебаний и график угловой скорости при резонансе второго порядка ($T = T_{av}$).

Рост амплитуды колебаний в условиях параметрического резонанса второго порядка показан на рис. 8. В этом случае вложение энергии за период пропорционально *квадрату* глубины модуляции m , в то время как при резонансах с $n = 1$ и $n = 3$ вложение энергии пропорционально первой степени m . Поэтому при том же значении постоянной затухания γ (при той же добротности Q) требуется значительно большая глубина модуляции параметра, чтобы превзойти порог параметрического резонанса второго порядка.

Интервал параметрической неустойчивости в окрестности резонанса второго порядка значительно уже по сравнению с интервалами, соответствующими $n = 1$ и $n = 3$: его ширина также пропорциональна лишь квадрату m (для малых m). Для нахождения границ этого интервала можно рассмотреть, как это было сделано выше для других резонансов, стационарные колебания при $T \approx T_0$, образованные чередующимися участками свободных синусоидальных колебаний с периодами T_1 и T_2 . Фазовая траектория и график угловой скорости для таких периодических колебаний на одной из границ показан на рис. 7.4. В случае стационарных колебаний на границе в отсутствие трения скачкообразные увеличения и уменьшения угловой скорости в точности компенсируются.

Для описания этих стационарных колебаний можно воспользоваться прежними выражениями (11)–(12) для $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$. Условия сшивания графиков при $t = 0$ также остаются прежними. Различия появляются лишь в уравнениях для постоянных A и B . Эти уравнения определяются из

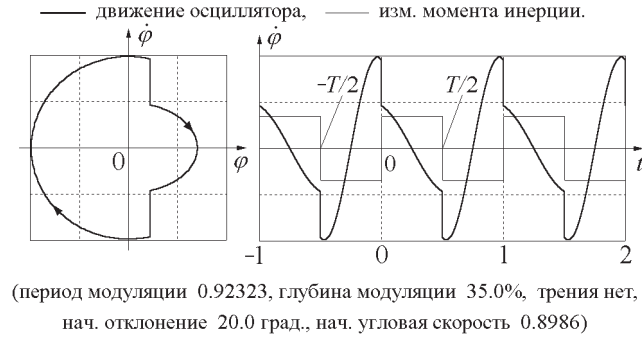


Рис. 9: Стационарные параметрические колебания на нижней границе интервала неустойчивости второго порядка (вблизи $T = T_{av}$).

требований периодичности в моменты $-T/2$ и $T/2$. В случае стационарных периодических колебаний, соответствующих резонансу с $n = 2$ (и всем резонансам четных порядков $n = 2, 4, \dots$ в (10)), эти условия имеют вид:

$$\varphi_1(T/2) = \varphi_2(-T/2), \quad (1 + m)\dot{\varphi}_1(T/2) = (1 - m)\dot{\varphi}_2(-T/2), \quad (23)$$

и мы получаем следующую систему уравнений для амплитуд A и B :

$$\begin{aligned} (S_1 + kS_2)A + (C_1 - C_2)B &= 0, \\ k(C_1 - C_2)A - (kS_1 + S_2)B &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где S_1 , C_1 и S_2 , C_2 по-прежнему определяются соотношениями (15). Однородная система уравнений (24) для A и B имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю ее определителя:

$$2kC_1C_2 - (1 + k^2)S_1S_2 - 2k = 0. \quad (25)$$

Для нахождения значений $T_{\mp} = T_{av} + \Delta T$ для границ интервала неустойчивости с $n = 2$ преобразуем произведения C_1C_2 и S_1S_2 в уравнении (25) с помощью тождества $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\alpha/2)$:

$$(1 + k) \sin \frac{\omega_{av}T}{2} = \pm |1 - k| \sin \frac{\Delta\omega T}{4}. \quad (26)$$

Затем заменим искомое значение периода T в аргументе синуса в левой части уравнения (26) на $T_{av} + \Delta T$, где $\Delta T \ll T_0$. Поскольку $\omega_{av}T_{av} = 2\pi$, этот синус можно записать как $-\sin(\omega_{av}\Delta T/2)$, после чего уравнение (17) принимает вид:

$$\sin \frac{\omega_{av}\Delta T}{2} = \mp \frac{|1 - k|}{1 + k} \sin \frac{\Delta\omega(T_{av} + \Delta T)}{4}. \quad (27)$$

Это уравнение определяет левую границу T_- интервала неустойчивости, когда берется верхний знак в его правой части, и правую границу T_+ в противоположном случае. Стационарные колебания для правой границы интервала показаны на рис. 10.

В компьютерной программе уравнение (27) для ΔT также решается численно методом итераций. Подставляя T_- или T_+ , найденные из (27), в одно из уравнений (14), мы получаем отношение амплитуд A и B , которым определяется профиль стационарных колебаний на соответствующей границе интервала неустойчивости. Диаграммы границ второго интервала параметрической неустойчивости в компьютерной программе также можно вывести на экран, если в разделе главного меню «Теоретический обзор» выбрать пункт «Условия резонанса». В этой статье диаграммы приведены ниже на рис. 11.

Для умеренных значений глубины модуляции можно найти приближенное аналитическое решение уравнения (27):

$$T_{\mp} = \left(1 \mp \frac{1}{4}m^2\right) T_{av}. \quad (28)$$

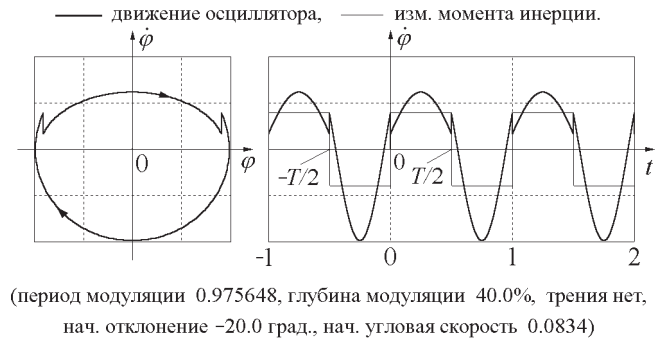


Рис. 10: Стационарные параметрические колебания на правой границе второго интервала неустойчивости (вблизи $T = T_{av} \approx T_0$).

Через T_0 эти границы второго интервала выражаются следующим образом:

$$T_{\mp} = T_0 + \left(\mp \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \right) m^2 T_0, \quad (29)$$

т. е. $T_- = T_0 - (5/8)m^2 T_0$, $T_+ = T_0 - (1/8)m^2 T_0$. Как уже отмечалось выше, ширина $T_+ - T_- = (m^2/2)T_0$ этого интервала неустойчивости пропорциональна квадрату глубины модуляции.

8 Диаграммы параметрической неустойчивости

Интервалы неустойчивости для первых пяти параметрических резонансов показаны на диаграмме рис. 11 для разных значений глубины модуляции m . Диаграмма получена численным решением обсуждавшихся выше уравнений. Отметим, насколько узки интервалы для резонансов четных порядков ($n = 2, 4$) при малых значениях m . С ростом m эти интервалы расширяются и становятся сравнимыми с интервалами нечетных порядков.

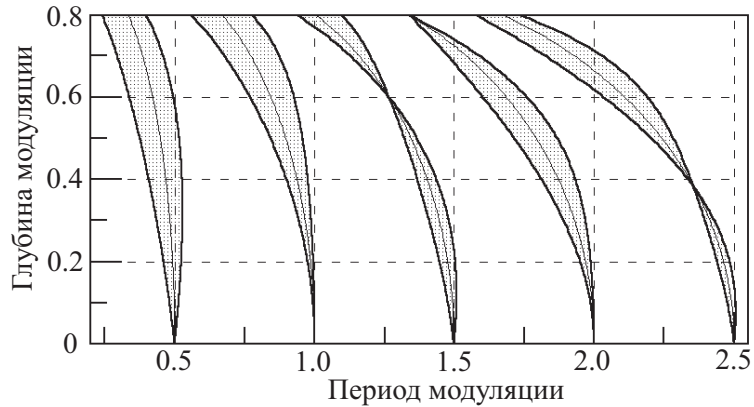


Рис. 11: Интервалы параметрического возбуждения при прямоугольной модуляции момента инерции в отсутствие трения.

Из диаграммы на рис. 11 видно, что для некоторых значений глубины модуляции m обе границы интервалов с $n > 2$ совпадают (можно считать, что при таких m они *пересекаются*). Это значит, что при таких значениях глубины модуляции соответствующие интервалы параметрического возбуждения исчезают. Этому исчезновению интервалов параметрического возбуждения можно дать простое физическое объяснение, если обратить внимание на соотношение периодов собственных колебаний T_1 и T_2 (при раздвинутых и сдвинутых грузах) для соответствующих значений m .

Оказывается, что T_1 и T_2 относятся как 2:1, 3:1, и 3:2. В случае первого пересечения (с отношением собственных периодов 2:1) за первую половину цикла модуляции происходит ровно половина собственного колебания ротора с периодом T_1 , а за вторую — целое колебание с периодом T_2 (три полных собственных колебания за один цикл модуляции). Ясно, что в таких условиях модуляции процесс колебаний будет периодическим всегда, при любых начальных условиях. Следовательно, для соответствующих значений глубины модуляции m и периода модуляции T не будет ни роста, ни убывания амплитуды: при любых начальных условиях происходят стационарные колебания.

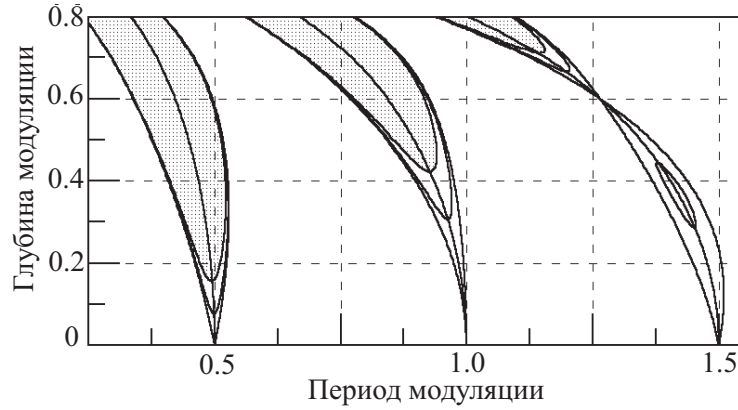


Рис. 12: Интервалы параметрического возбуждения для первых трех резонансов при модуляции момента инерции (в отсутствие трения, для $Q = 20$ и для $Q = 10$).

При наличии трения в системе интервалы параметрического резонанса становятся уже и при достаточно сильном трении исчезают совсем. Когда глубина модуляции превышает пороговое значение, приближенные значения для границ первого интервала даются выражениями (19) или (20), если подставить в них вместо m величину $\sqrt{m^2 - m_{\min}^2}$, в которой пороговое значение глубины модуляции $m_{\min} = \pi/(2Q)$ определяется выражением (5). Для третьего интервала можно воспользоваться выражением (21) или (22), подставляя туда вместо m величину $\sqrt{m^2 - m_{\min}^2}$, в которой $m_{\min} = 3\pi/(2Q)$. Когда глубина модуляции m равна пороговому значению m_{\min} , соответствующий интервал параметрического возбуждения исчезает.

Границы второго интервала параметрического резонанса при наличии трения даются выражениями (28) или (29), если подставить в них вместо m^2 выражение $\sqrt{m^4 - m_{\min}^4}$ с пороговым значением $m_{\min} = \sqrt{2/Q}$, соответствующим резонансу второго порядка (см. задачи 3.2 и 3.3).

Диаграмма на рис. 12 показывает границы первых трех интервалов параметрического резонанса в отсутствие трения, для $Q = 20$, и для $Q = 10$. Обратите внимание на «островок» параметрического резонанса для $n = 3$ и $Q = 20$. Этот резонанс пропадает, когда глубина модуляции достигает значения 45% и появляется снова, когда m превышает примерно 66%.

Для каждого данного значения глубины модуляции m могут существовать лишь несколько первых интервалов параметрического возбуждения, для которых m превышает пороговое значение.

Подчеркнем еще раз, что даже в том случае, когда положение равновесия системы неустойчиво вследствие периодической модуляции параметра (т. е. когда выполняются необходимые условия для возбуждения параметрического резонанса), осциллятор будет оставаться в покое в положении равновесия, если заданы нулевые начальные условия, т. е. $\varphi(0)$ и $\dot{\varphi}(0)$ в точности равны нулю. В этом заключается одно из отличий параметрического резонанса от обычного резонанса при вынужденных колебаниях, для которого амплитуда растет даже при нулевых начальных условиях. Для возбуждения параметрического резонанса, кроме выполнения условия превышения порога, в системе должны обязательно существовать хотя бы слабые собственные колебания. В реальных системах такие колебания всегда существуют из-за флуктуаций.

В линейной системе при превышении порога параметрического возбуждения амплитуда колебаний неограниченно растет со временем по экспоненциальному закону. В противоположность случаю вынужденных колебаний, вязкое трение не в состоянии ограничить рост амплитуды колебаний при параметрическом резонансе. В реальных системах рост амплитуды ограничивается нелинейными явлениями, приводящими к зависимости периода собственных колебаний от амплитуды. По

мере роста амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний изменяется собственный период колебаний и поэтому нарушаются условия резонанса. Рост амплитуды сменяется ее уменьшением. Когда амплитуда становится достаточно малой, условия резонанса восстанавливаются, и амплитуда снова начинает расти. При наличии трения такие переходные биения в нелинейной системе постепенно затухают, и в конце концов устанавливается стационарный режим колебаний с конечной амплитудой.

9 Задания для самостоятельной работы с программой

1. Основной резонанс ($n = 1$) в отсутствие трения. Задайте умеренное значение глубины m модуляции момента инерции (около 10 – 15%). Пусть период модуляции T равен половине периода T_0 собственных колебаний осциллятора. Чтобы принудительная модуляция параметра вызвала резонанс, осциллятор с самого начала должен совершать хотя бы небольшие собственные колебания, т. е. должны быть заданы ненулевые начальные условия.

(а) Какого вида начальные условия следует задать, чтобы сразу после включения модуляции момента инерции начался быстрейший резонансный рост амплитуды колебаний? Напомним, что в принятой модели в начальный момент времени $t = 0$ грузы скачкообразно раздвигаются в стороны от оси вращения, так что момент инерции ротора возрастает.

(б) Какого вида начальные условия приведут сначала к постепенному затуханию уже существующих колебаний? Проверьте свой ответ в моделирующем эксперименте. Используя полученные графики колебаний, объясните физическую причину первоначального уменьшения амплитуды колебаний. Примите во внимание фазовые соотношения между собственными колебаниями ротора и принудительными периодическими изменениями его момента инерции. Почему через некоторое время убывание амплитуды колебаний сменяется ее возрастанием?

(в) Попробуйте выяснить, какими факторами определяется промежуток времени, по истечении которого первоначальное затухание колебаний сменяется их неограниченным ростом.

2. Рост амплитуды в условиях основного резонанса в отсутствие трения. Пусть принудительная модуляция момента инерции происходит с периодом T , равным половине периода T_0 собственных колебаний осциллятора ($T = T_0/2$).

(а) По какому закону растет со временем амплитуда колебаний в условиях основного резонанса, если задано некоторое начальное отклонение $\varphi(0) = \varphi_0$ и нулевая начальная скорость $\dot{\varphi}(0) = 0$? При каком значении глубины модуляции m (в отсутствие трения) начальная амплитуда колебаний удвоится за 10 циклов модуляции момента инерции? Проверьте свой результат в моделирующем эксперименте.

(б) Чем будет отличаться процесс резонансной раскачки от случая, рассмотренного в пункте (а), если задать такое же по величине начальное отклонение в противоположную сторону?

3. Порог возбуждения для основного резонанса.

(а) Выбрав умеренное значение глубины модуляции момента инерции (скажем, $m = 15\%$), оцените пороговое (минимальное) значение добротности Q_{\min} в условиях настройки периода модуляции на основной резонанс ($T = T_0/2$). Напомним, что пороговый режим соответствует стационарным колебаниям неизменной амплитуды (параметрическая регенерация). При каких начальных условиях колебания осциллятора с пороговым значением добротности $Q = Q_{\min}$ сразу будут стационарными?

(б) Уточните Вашу теоретическую оценку порогового значения добротности Q_{\min} с помощью моделирующего эксперимента на компьютере (методом проб и ошибок). В чем заключается причина расхождений теоретического и экспериментального значений?

(в) Исследуйте устойчивость режима параметрической регенерации, т. е. режима стационарных колебаний в условиях порога возбуждения (для $Q = Q_{\min}$). Устойчив ли этот режим по отношению к малым изменениям параметров системы (периода и глубины модуляции, добротности)? Устойчив ли режим регенерации по отношению к малым изменениям начальных условий?

(г) Пороговое значение добротности, обеспечивающее стационарные колебания при заданной глубине модуляции m , будет абсолютно минимальным при *точной* настройке периода модуляции на резонанс. При малых значениях m основной резонанс имеет место при $T = T_0/2$. Однако с ростом m резонансное значение периода модуляции начинает отклоняться от $T_0/2$. Получите вы-

ражение для резонансного значения периода модуляции при произвольно большой глубине модуляции m и сделайте численные оценки T для $m = 15\%$ и $m = 40\%$.

4. Начальные условия для периодических колебаний на границах интервала.

(а) Введите значение периода модуляции, соответствующее нижней границе основного интервала параметрической неустойчивости при заданном значении глубины модуляции m (в отсутствие трения). Задайте произвольно некоторое начальное отклонение ротора. Какую начальную скорость необходимо задать для того, чтобы получить в моделирующем эксперименте стационарные периодические колебания неизменной амплитуды? Сделайте соответствующие расчеты и эксперименты также и для верхней границы интервала неустойчивости.

(б) Объясните характерные особенности наблюдаемых графиков и фазовой траектории для стационарных колебаний на каждой из границ основного интервала параметрической неустойчивости.

(в) Для выбранного значения начального угла отклонения φ_0 и рассчитанного значения начальной угловой скорости $\dot{\varphi}(0)$, обеспечивающей стационарные колебания на границе интервала, рассчитайте амплитуду колебаний (для каждой из границ интервала). Проверьте свои теоретические значения в эксперименте.

5. Ручное управление параметром. Моделирующая программа допускает, наряду с автоматическим программным режимом принудительной модуляции момента инерции с заданным периодом (это режим по умолчанию), возможность включения режима ручного управления моментом инерции ротора. Для перехода на ручное управление нужно поставить галочку в контрольный бокс «Ручное управление» в любом из рабочих экранов программы. Глубина модуляции и добротность осциллятора и в этом случае определяется значениями, введенными в панели «Ввод параметров», но автоматическая модуляция момента инерции подавляется: моменты перемещений грузов Вы выбираете самостоятельно, щелкая мышью по соответствующей кнопке или нажимая клавишу «Пробел» на клавиатуре. Если грузы находились в придвинутом к оси положении, то при первом щелчке (или нажатии пробела) они смещаются в сторону от оси (и наоборот), а при следующем щелчке возвращаются в прежние положения. Пытаясь раскачать осциллятор таким способом, Вы не только придете к более глубокому пониманию механизма параметрического возбуждения колебаний, но сможете выработать у себя чувственное ощущение физических причин параметрического резонанса.

(а) Введите некоторое значение m глубины модуляции (около 15 – 30%) и выберите значение добротности, превышающее пороговое (для данного m) значение. Задав подходящие начальные условия, возбудите собственные колебания небольшой амплитуды (10 – 20 градусов). Попробуйте увеличить размах колебаний, щелкая мышью по кнопке ручного управления в подходящие моменты времени (либо нажимая клавишу «Пробел» на клавиатуре). В какие моменты времени следует смещать грузы в сторону оси и в какие моменты раздвигать их в прежние положения, чтобы размах колебаний увеличивался как можно быстрее?

(б) Возможно ли с помощью ручного управления добиться увеличения размаха колебаний ротора до заданной величины (скажем, до 180°) за меньшее число циклов изменения момента инерции, чем в автоматическом режиме в условиях точной настройки периода прямоугольной модуляции на основной резонанс? Подразумевается, что все параметры системы (глубина модуляции, добротность, начальная амплитуда) одинаковы для режимов ручной и автоматической модуляции момента инерции. Приведите достаточно убедительные аргументы для обоснования своего ответа.

(в) После того, как Вы возбудили достаточно сильные колебания осциллятора с помощью подходящего манипулирования моментом инерции ротора, попробуйте вручную как можно быстрее погасить колебания ротора с помощью принудительных изменений его момента инерции. Для перехода от раскачки к гашению колебаний придется должным образом изменить фазу принудительных изменений момента инерции. В какие моменты времени следует сдвигать грузы к оси ротора, и в какие моменты раздвигать их обратно, чтобы как можно быстрее погасить колебания ротора?

Abstract

The phenomenon of parametric resonance in a linear torsion spring oscillator caused by a square-wave modulation of its moment of inertia is explained and investigated both analytically and with the help of a computer simulation. Characteristics of parametric resonance and regeneration are found and discussed in detail. Ranges of frequencies within which parametric excitation is possible are determined. Stationary oscillations at the boundaries of these ranges and at the threshold conditions are investigated.