

# Маятник с осциллирующим подвесом (субгармонические резонансы)

Е. И. Бутиков

Санкт-Петербургский государственный университет

## Содержание

1	Введение	2
2	Моделируемая физическая система	3
3	Субгармонические резонансы высших порядков и уточненный критерий устойчивости перевернутого маятника	5
4	Спектр и границы субгармонических колебаний	8
5	Сосуществование субгармонических резонансов разных порядков $n$	12
6	Верхняя граница динамической стабилизации и параметрический резонанс	15
7	Влияние трения	20
8	Заключительные замечания	23
	Список литературы	23

## Аннотация

*В предыдущей статье автора [1] было приведено описание параметрического резонанса для простого жесткого маятника с осциллирующим подвесом и дано наглядное физическое объяснение явления динамической стабилизации перевернутого маятника. В этой статье рассматриваются условия возникновения в такой системе субгармонических резонансов, обсуждается их связь с динамической стабилизацией перевернутого маятника и получен уточненный критерий стабилизации. Установлена связь верхнего предела устойчивости перевернутого маятника с явлением параметрического резонанса, т. е. с потерей устойчивости нижнего положения. Компьютерное моделирование физической системы и аналитическое исследование взаимно дополняют и обогащают друг друга.*

**Ключевые слова:** маятник Капицы, перевернутый маятник, параметрический резонанс, динамическая стабилизация, критерий устойчивости.

# 1 Введение

В предыдущей статье автора [1] о маятнике, подвес которого совершает принудительные колебания в вертикальном направлении, были рассмотрены некоторые необычные виды движения маятника. В частности, было показано, что нижнее положение равновесия маятника становится неустойчивым, когда период колебаний оси равен приблизительно половине периода собственных колебаний маятника. При этом первоначально сколь угодно малые колебания начинают прогрессивно нарастать. Это явление называется параметрическим резонансом.

Другой возможный вид регулярного поведения маятника — это *полные перевороты* в одном направлении, синхронизированные с осцилляциями подвеса. Период такого неравномерного вращения либо равен периоду возбуждения, либо в целое число раз больше. Благодаря синхронизации переворотов с осцилляциями подвеса (благодаря так называемому «фазовому захвату») обеспечивается подпитка маятника энергией, необходимая для компенсации потерь из-за трения. Более сложные виды регулярных установившихся движений маятника при параметрическом возбуждении состоят из нескольких колебаний, чередующихся с переворотами в ту или другую сторону, также синхронизированных с осцилляциями подвеса. Различные конкурирующие между собой виды движений могут сосуществовать при одних и тех же значениях амплитуды и частоты колебаний подвеса. Это свойство нелинейных систем называют мультистабильностью. Какое именно движение из нескольких возможных установится после завершения переходного процесса, зависит от начальных условий: каждому установившемуся режиму соответствует свой «бассейн притяжения» на плоскости начальных состояний.

Когда амплитуда принудительных осцилляций подвеса достаточно велика, а их частота лежит в некоторых определенных интервалах, поведение маятника может быть нерегулярным, *хаотическим* несмотря на строго периодический характер возбуждающего воздействия. Это пример так называемого *динамического хаоса*, когда нерегулярное, никогда не повторяющееся во времени поведение системы сочетается с полным детерминизмом ее математического описания: при заданных начальных условиях решение соответствующего дифференциального уравнения единственно. Динамический хаос в простых нелинейных системах стал предметом интенсивного изучения на протяжении последних десятилетий. Маятник с осциллирующим подвесом дает прекрасный пример физической модели для исследования закономерностей как хаотических, так и разнообразных регулярных движений в простых нелинейных динамических системах.

В этой статье подробно рассматриваются недавно открытые виды периодических движений жесткого маятника с осциллирующим подвесом — так называемые *субгармонические резонансы*. Рассчитаны условия возникновения субгармонических резонансов, обсуждается их связь с динамической стабилизацией. Получен уточненный критерий стабилизации, справедливый в более широкой области параметров системы, включая сравнительно низкие частоты и большие амплитуды возбуждения. Установлена генетическая связь верхнего предела устойчивости перевернутого маятника с параметрическим резонансом, т.е. с потерей устойчивости нижнего положения.

## 2 Моделируемая физическая система

Как и в статье [1], мы рассматриваем маятник в виде легкого жесткого стержня длиной  $l$  с грузом (точечной массой)  $m$  на конце, считая для простоты, что именно здесь сосредоточена вся масса маятника. Сила тяжести  $mg$  создает возвращающий момент  $-mgl \sin \varphi$ , пропорциональный синусу угла отклонения  $\varphi$  маятника от положения равновесия. Когда подвес маятника неподвижен, этот момент заставляет отклоненный маятник совершать колебания относительно нижнего положения устойчивого равновесия. Если же подвес принудительно движется с некоторым ускорением, поведение маятника удобно описывать с помощью неинерциальной системы отсчета, связанной с подвесом. Из-за ускоренного движения такой системы отсчета на маятник действует, наряду с силой тяжести, еще и сила инерции, направленная противоположно ускорению системы отсчета. Допустим, что подвес осциллирует вдоль вертикали и его координата  $z(t)$  изменяется со временем по гармоническому закону с некоторой частотой  $\omega$  и амплитудой  $a$ :

$$z(t) = a \cos \omega t \quad \text{или} \quad z(t) = a \sin \omega t. \quad (1)$$

В зависимости от характера решаемой задачи в (1) может оказаться удобным либо первый, либо второй выбор начальной фазы осцилляций подвеса. Приложенная к грузу маятника сила инерции  $F_{\text{in}}(t)$  также зависит от времени по синусоидальному закону:

$$F_{\text{in}}(t) = -m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -m \ddot{z}(t) = m \omega^2 z(t). \quad (2)$$

Сила инерции направлена вниз в течение тех интервалов времени, когда осциллирующий подвес находится ниже своего среднего положения, т.е. когда  $z(t) < 0$ . Это непосредственно видно из выражения (2) для  $F_{\text{in}}(t)$ , правая часть которого зависит от времени так же, как и  $z$ -координата подвеса. Поэтому на протяжении соответствующей половины периода колебаний подвеса действие силы инерции равносильно некоторому увеличению силы тяжести. На протяжении другой половины периода, когда подвес находится выше среднего положения (когда  $z(t) > 0$ ), сила инерции направлена вверх, что равносильно уменьшению силы тяжести.

Приводимые в этой статье графики и фазовые траектории для разных режимов поведения маятника получены численным интегрированием точного дифференциального уравнения для угла отклонения  $\varphi(t)$  маятника с осциллирующим подвесом. В это уравнение, наряду с моментом  $mg \sin \varphi$  силы тяжести  $mg$  (здесь  $g$  — ускорение свободного падения), включен момент силы инерции  $F_{\text{in}}(t)$ , который явно зависит от времени  $t$ :

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma \dot{\varphi} + \left( \frac{g}{l} - \frac{a}{l} \omega^2 \cos \omega t \right) \sin \varphi = 0. \quad (3)$$

Второй член в (3) учитывает момент силы трения, который в этой модели принят пропорциональным мгновенному значению угловой скорости маятника  $\dot{\varphi}$ . Постоянная затухания  $\gamma$  обратно пропорциональна добротности  $Q$ , которую обычно используют для характеристики затухания малых собственных колебаний под действием вязкого трения:  $Q = \omega_0 / 2\gamma$ , где  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  — частота собственных колебаний предельно малой амплитуды в отсутствие осцилляций подвеса.

Как уже отмечалось в [1], колебания около перевернутого положения можно формально описывать тем же самым дифференциальным уравнением (3) с отрицательными значениями  $g$ . Иными словами, в уравнении (3) ускорение свободного падения  $g$  можно рассматривать как управляющий параметр, изменение которого физически эквивалентно изменению действующей на маятник силы тяжести. Когда этот параметр уменьшается до нуля и дальше в область отрицательных значений, момент силы тяжести в уравнении (3) сначала обращается в нуль, а затем изменяет знак на противоположный. Подобная обращенная по направлению «сила тяжести» стремится привести маятник в перевернутое положение  $\varphi = \pi$ , отчего (в отсутствие вибраций подвеса) оно становится устойчивым, а положение  $\varphi = 0$  — неустойчивым: при  $g < 0$  верхнее положение маятника в уравнении (3) эквивалентно нижнему положению при положительном значении  $g$ .

В предыдущей статье [1] было показано, что при достаточно малых относительных амплитудах  $a/l$  и высоких относительных частотах  $\omega/\omega_0$  вынужденных осцилляций подвеса движение маятника можно представить в виде сравнительно медленных колебаний, искаженных наложением небольших быстрых (высокочастотных) колебаний.

$$\varphi(t) = \psi(t) + \delta(t) = \psi(t) - \frac{z(t)}{l} \sin \psi = \psi(t) - \frac{a}{l} \sin \psi \cos \omega t. \quad (4)$$

Медленную компоненту движения маятника  $\psi(t)$  удобно представлять как движение частицы в эффективном потенциальном поле, описываемом функцией  $U = U(\psi)$ . График этой потенциальной энергии показан на рис. 1:

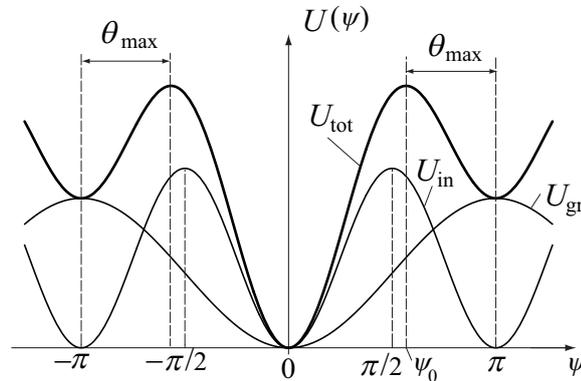


Рис. 1: Графики потенциальной энергии в поле тяжести  $U_{gr}(\psi)$ , потенциальной энергии  $U_{in}(\psi)$ , соответствующей моменту средней силы инерции, и полной потенциальной энергии  $U(\psi) = U_{tot}(\psi)$  для маятника с осциллирующим подвесом.

Если выполняется подробно рассмотренный в [1] критерий устойчивости перевернутого маятника

$$a^2 \omega^2 > 2gl \quad \text{или} \quad \frac{a}{l} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2}, \quad (5)$$

полный потенциал  $U = U(\psi)$  имеет (помимо абсолютного минимума при  $\psi = 0$ , соответствующего нижнему положению равновесия) относительные минимумы при  $\psi = \pm\pi$ . Эти дополнительные минимумы соответствуют перевернутому положению маятника. Колебания частицы, захваченной в таком минимуме, описывают

усредненное поведение маятника в окрестности динамически стабилизированного перевернутого положения.

Дифференциальное уравнение для движения частицы в потенциале  $U = U(\psi)$ , т.е. для медленной компоненты  $\psi(t)$  имеет вид:

$$\ddot{\psi} = -\omega_0^2 \sin \psi - \frac{1}{2} \frac{a^2}{l^2} \omega^2 \cos \psi \sin \psi. \quad (6)$$

Медленные колебания малой амплитуды, происходящие вблизи дна каждой из потенциальных ям потенциала  $U = U(\psi)$ , будут почти гармоническими. В статье [1] было показано, что в соответствии с (6) частоты  $\omega_{\text{down}}$  и  $\omega_{\text{up}}$  колебаний маятника соответственно около нижнего ( $\psi = 0$ ) и верхнего ( $\psi = \pm\pi$ ) положений равновесия при малом размахе этих колебаний даются следующими выражениями:

$$\omega_{\text{down}}^2 = \frac{a^2 \omega^2}{2l^2} + \omega_0^2, \quad \omega_{\text{up}}^2 = \frac{a^2 \omega^2}{2l^2} - \omega_0^2. \quad (7)$$

### 3 Субгармонические резонансы высших порядков и уточненный критерий устойчивости перевернутого маятника

Ограниченная применимость использованного в [1] метода усреднения, основанного на разделении быстрых и медленных движений, означает, что мы не вправе ожидать от него исчерпывающего описания поведения маятника с осциллирующим подвесом во всех случаях. Тем не менее, применение эффективного потенциала для описания медленной компоненты движения позволяет нам получить наглядное представление о некоторых необычных особенностях изучаемой физической системы, включая динамическую стабилизацию перевернутого положения маятника, субгармонические резонансы (см. ниже) и такие сугубо нелинейные свойства, как зависимость периода медленных колебаний от амплитуды.

Когда частота и амплитуда вынужденных осцилляций подвеса лежат в определенных интервалах, маятник, вместо совершения затухающих колебаний и постепенного приближения к положению равновесия (динамически стабилизированному верхнему или обычному нижнему), может оказаться захваченным в  $n$ -периодический предельный цикл. Один период таких незатухающих колебаний маятника оказывается равным в точности  $n$  циклам осцилляций подвеса. Жесткая связь фаз установившихся колебаний маятника и осцилляций подвеса («фазовый захват») обеспечивает постоянную «подпитку» маятника энергией для компенсации потерь на трение. Фазовая траектория замыкается после завершения  $n$  периодов возбуждения  $T$ . Поскольку период таких колебаний маятника равен  $nT$ , а частота основной гармоники составляет  $1/n$  от частоты возбуждения, это явление можно назвать *субгармоническим резонансом  $n$ -го порядка*.

Периодические колебания такого типа около динамически стабилизированного перевернутого положения были впервые описаны в 1995 году Д. Ачесоном [2], который назвал их “multiple-nodding oscillations,” что можно перевести как «колебания с несколькими кивками». Компьютерное моделирование показывает, что движение маятника при этом напоминает своеобразный танец. В действительности

такие колебания с «пританцовыванием» могут происходить и около нижнего положения равновесия, а также и в отсутствие силы тяжести около каждого из двух эквивалентных динамически стабилизированных положений равновесия [3]. Пример стационарных колебаний в отсутствие силы тяжести, период которых равен 8 циклам осцилляций подвеса, приведен на рис. 2.

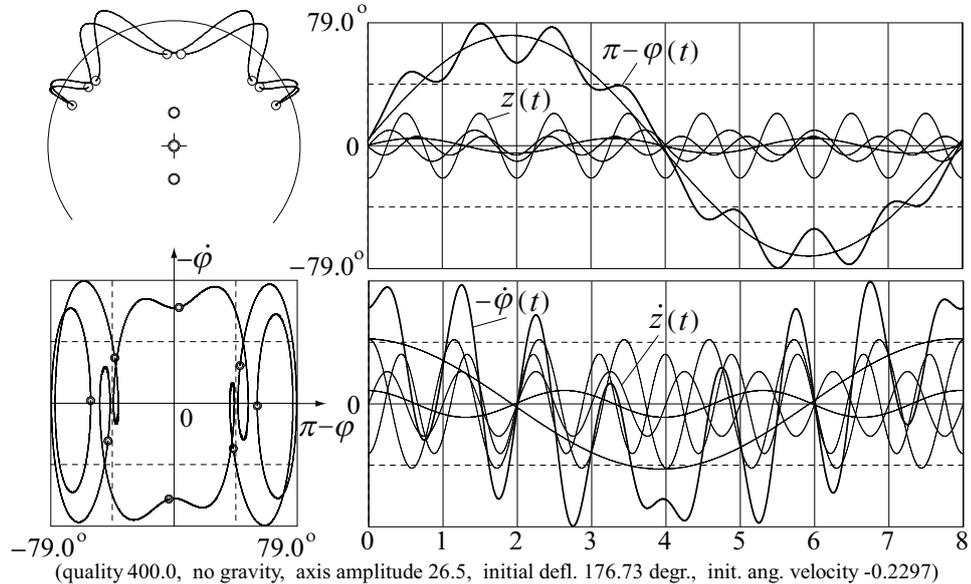


Рис. 2: Траектория в пространстве, фазовая траектория с сечениями Пуанкаре и графики стационарных колебаний для субгармонического резонанса 8-го порядка. Тонкими линиями показаны графики отдельных гармоник. В спектре доминирует основная гармоника с частотой  $\omega/8$ . Амплитуды 7-й и 9-й гармоник почти одинаковы.

На рис. 2 вверху слева показана пространственная траектория груза маятника, внизу слева — замкнутая петлеобразная фазовая траектория на плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$ . Справа показаны графики  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  и их гармонических составляющих, а также графики осцилляций подвеса. В спектре доминирует основная гармоника с частотой  $\omega/8$ , период которой равен 8 периодам подвеса. Её можно рассматривать как субгармонику осцилляций подвеса. Именно эта гармоника описывает плавную компоненту  $\psi(t)$  составного 8-периодического движения маятника.

Покажем, что приближенный подход к описанию медленного движения, основанный на эффективном потенциале  $U_{\text{tot}}(\psi)$  (см. рис. 1), дает простое качественное объяснение такому необычному на первый взгляд и противоречащему интуиции поведению маятника. Более того, для субгармонических резонансов высоких порядков с  $n \gg 1$  этот подход обеспечивает неплохое количественное согласие. В самом деле, естественно предположить, что захват маятника в субгармонический резонанс порядка  $n$  может произойти, если период медленного (слабо затухающего) собственного колебательного движения вблизи минимума эффективного потенциала составляет приблизительно  $n$  периодов возбуждения, т.е. когда частота возбуждения  $\omega$  близка к целому кратному  $n$  частоты собственных медленных колебаний либо вблизи перевернутого, либо нижнего положения равновесия:  $\omega = n\omega_{\text{up}}$

или  $\omega = n\omega_{\text{down}}$ . В таких условиях может произойти синхронизация (фазовый захват) колебаний маятника и осцилляций подвеса, так что один цикл медленного движения будет *в точности* совпадать с  $n$  периодами возбуждения, и весь процесс станет строго периодическим.

В качестве примера рассмотрим вначале частный случай маятника с вибрирующим подвесом в отсутствие силы тяжести или, что в сущности то же самое, предельный случай очень высокой частоты возбуждения  $\omega \gg \omega_0$  ( $\omega/\omega_0 \rightarrow \infty$ ). В этом предельном случае оба положения равновесия (обычное и перевернутое) эквивалентны, и относительная амплитуда осцилляций подвеса  $m = a/l$  становится единственным физическим параметром, определяющим искомое условие возможности субгармонического резонанса порядка  $n$ . При  $\omega_0 = 0$  (т.е. в отсутствие силы тяжести) частота медленных колебаний, как следует из (7), равна  $\omega_{\text{slow}} = m\omega/\sqrt{2}$ . Отсюда для минимального (порогового) значения относительной амплитуды, при котором один период медленного движения составляет  $n$  циклов возбуждения, получаем:

$$m_{\min} = \sqrt{2} \frac{\omega_{\text{slow}}}{\omega} = \sqrt{2}/n. \quad (8)$$

Для субгармонического резонанса 8 порядка (рис. 2)  $n = 8$  и (8) дает  $m_{\min} = \sqrt{2}/8 = 0.177$ . Это значение достаточно хорошо совпадает с результатами моделирующего эксперимента в случае малых колебаний ( $m = a/l = 0.173$ ) и с предсказанием порога данной моды в рамках более точной теории, основанной на линеаризованном дифференциальном уравнении системы (см. уравнение (13) ниже), которое при  $n = 8$  дает для относительной амплитуды то же значение  $a/l = 0.173$ .

Медленные  $n$ -периодические колебания большого размаха, когда отклонения маятника простираются за пределы параболической части эффективного потенциала (см. рис. 1), захватывая его пологие склоны, уже не будут гармоническими и характеризуются увеличенным периодом по сравнению с малыми колебаниями вблизи дна потенциальной ямы. Поэтому для наблюдения больших колебаний требуются значительно бóльшие значения амплитуды осцилляций подвеса. В частности, показанные на рис. 2 колебания с амплитудой  $80^\circ$  происходят при  $a/l = 0.265$  (сравните с пороговым значением  $a/l = 0.173$ ). Зависимость размаха колебаний от превышения над порогом обсуждается ниже.

При наличии силы тяжести для нахождения минимальной относительной амплитуды осцилляций подвеса, необходимой для возбуждения субгармонического резонанса  $n$ -го порядка, нужно положить  $\omega_{\text{down, up}} = \omega/n$  (т.е.  $n$  циклов возбуждения должны укладываться на протяжении одного периода медленных колебаний). Используя выражения (7) для  $\omega_{\text{down, up}}$ , получаем пороговые значения  $m_{\min}$  соответственно для нижнего и перевернутого положений:

$$m_{\min} = \sqrt{2 \left( \frac{1}{n^2} \mp \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)}. \quad (9)$$

Минимальная амплитуда осцилляций подвеса, обеспечивающая динамическую стабилизацию перевернутого маятника, соответствует порогу возбуждения субгармонических колебаний бесконечного порядка и получается из соотношения (9) в предельном случае  $n \rightarrow \infty$ :  $m_{\min} = \sqrt{2}\omega_0/\omega$ . Это выражение совпадает с полученным выше приближенным критерием (5) стабилизации перевернутого маятника.

## 4 Спектр и границы субгармонических колебаний

В условиях субгармонического резонанса  $n$ -го порядка медленная компонента движения маятника  $\psi(t)$ , как хорошо видно из рис. 2, имеет практически синусоидальную зависимость от времени с частотой  $\omega/n$ :  $\psi(t) = A \sin(\omega t/n)$ . При небольших превышениях амплитуды осцилляций подвеса над пороговым значением размах колебаний маятника мал, что позволяет заменить  $\sin \psi$  на  $\psi$  в выражении (4) для мгновенного значения угла отклонения  $\varphi(t)$ :

$$\varphi(t) \approx \psi(t) - (a/l) \sin \psi(t) \cos \omega t \approx \psi(t) - m\psi(t) \cos \omega t, \quad m = a/l. \quad (10)$$

Это значит, что спектр  $n$ -периодических колебаний малой амплитуды состоит из основной гармоник  $A \sin(\omega t/n)$  с частотой  $\omega/n$  и двух высших гармоник порядков  $n - 1$  и  $n + 1$  с равными амплитудами:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= A \sin\left(\frac{\omega}{n}t\right) - mA \sin\left(\frac{\omega}{n}t\right) \cos \omega t \\ &= A \sin\left(\frac{\omega}{n}t\right) + \frac{mA}{2} \sin\left(\frac{n-1}{n}\omega t\right) - \frac{mA}{2} \sin\left(\frac{n+1}{n}\omega t\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Такой спектральный состав в главном подтверждается графиками на рис. 2, полученными численным интегрированием точного уравнения (3). Доминирующая основная гармоника с периодом  $nT$  ( $T = 2\pi/\omega$  — период возбуждения) описывает медленную компоненту движения маятника. Может показаться странным, что гармоника порядка  $n$  с частотой возбуждения  $\omega$  отсутствует в спектре. Однако эта особенность легко объясняется тем, что быстрая компонента  $\cos \omega t$  входит в выражение для  $\varphi(t)$  умноженной на  $\sin \psi(t) \approx \psi(t)$ , т.е. имеет медленно изменяющуюся амплитуду, которая меняет знак каждый раз, когда маятник пересекает положение равновесия. Это значит, что колебание с частотой  $\omega$  не является гармоникой  $\varphi(t)$ , так как гармоники периодической функции должны иметь постоянные амплитуды.

Когда маятник пересекает положение равновесия, высшие гармоники порядков  $n - 1$  и  $n + 1$  складываются в противоположных фазах и почти не искажают график плавного движения, описываемого основной гармоникой. В моменты максимальных отклонений маятника фазы высших гармоник совпадают, и здесь эти гармоники вносят наибольшие искажения в медленную компоненту движения.

Согласно уравнению (11) обе высшие гармоники в  $\varphi(t)$  имеют равные амплитуды  $mA/2$ . Однако из графиков на рис. 2 при большом размахе колебаний маятника можно заметить, что эти амплитуды немного различаются. Поэтому можно улучшить теоретическую оценку порога субгармонических резонансов (9), предположив, что более точное решение  $\varphi(t)$  уравнения (3) характеризуется аналогичным спектром, но с неравными амплитудами  $A_{n-1}$  и  $A_{n+1}$  высших гармоник (для  $n > 2$ , случай  $n = 2$  будет рассмотрен отдельно):

$$\varphi(t) = A_1 \sin\left(\frac{\omega}{n}t\right) + A_{n-1} \sin\left(\frac{n-1}{n}\omega t\right) + A_{n+1} \sin\left(\frac{n+1}{n}\omega t\right). \quad (12)$$

В условиях порога возбуждения субгармонических резонансов амплитуду колебаний маятника можно считать бесконечно малой, что позволяет в точном уравнении (3) положить  $\sin \varphi \approx \varphi$ . В результате (3) сводится к уравнению Матье:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + (g/l - m\omega^2 \cos \omega t)\varphi = 0, \quad (m = a/l). \quad (13)$$

Подставляя  $\varphi(t)$  из (12) в уравнение (13) с  $\gamma = 0$  и выполняя разложение произведений тригонометрических функций, получаем систему приближенных уравнений для амплитуд  $A_1$ ,  $A_{n-1}$  и  $A_{n+1}$  гармоник пробной функции  $\varphi(t)$ :

$$\begin{aligned} 2(kn^2 - 1)A_1 + mn^2A_{n-1} - mn^2A_{n+1} &= 0, \\ mn^2A_1 + 2[n^2(k-1) + 2n - 1]A_{n-1} &= 0, \\ -mn^2A_1 + 2[n^2(k-1) - 2n - 1]A_{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь использовано обозначение  $k = g/(l\omega^2)$ . Однородная система уравнений (14) имеет нетривиальное решение, если её определитель равен нулю. Это условие дает уравнение для минимального (порогового) значения амплитуды осцилляций подвеса  $m_{\min}$ , при которой может существовать  $n$ -периодическое движение, описываемое функцией  $\varphi(t)$  из (12). Решая уравнение, получаем:

$$m_{\min}^2 = \frac{2}{n^4} \frac{[n^6k(k-1)^2 - n^4(3k^2 + 1) + n^2(3k + 2) - 1]}{[n^2(1-k) + 1]}. \quad (15)$$

Относительные амплитуды высших гармоник  $A_{n-1}/A_1$  и  $A_{n+1}/A_1$  для заданного значения  $n$  можно найти как решения однородной системы уравнений (14) после подстановки в нее  $m_{\min}$  из (15). Выражаемая соотношением (15) относительная амплитуда подвеса  $m_{\min} = a/l$  как функция параметра  $k = g/(l\omega^2)$  (квадрата обратной относительной частоты подвеса) в условиях порога субгармонических резонансов нескольких порядков  $n$  дается кривыми на рис. (15).

Как уже отмечалось, колебаниям около перевернутого положения формально соответствуют отрицательные значения  $g$  в уравнениях (3) и (13), как если бы сила тяготения была направлена вверх. Поэтому для перевернутого маятника в (15) нужно положить  $k = -g/(l\omega^2) < 0$ . Приближенный критерий (5) динамической стабилизации перевернутого маятника через этот параметр  $k$  записывается следующим образом:

$$m_{\min} = \frac{a_{\min}}{l} = \sqrt{-2k}, \quad k = \frac{-g}{l\omega^2} < 0. \quad (16)$$

Критерий устойчивости перевернутого маятника можно связать с условием существования субгармонических колебаний в окрестности  $\varphi = \pm\pi$ , порядок которых  $n$  стремится к бесконечности. Поэтому улучшенное значение для  $m_{\min}$  по сравнению с приближенным критерием (16) можно получить из (15) как предельный случай при  $n \rightarrow \infty$ :

$$m_{\min} = \sqrt{-2k(1-k)}, \quad k = \frac{-g}{l\omega^2} < 0. \quad (17)$$

Левая кривая на рис. 3 ( $n \rightarrow \infty$ ), целиком лежащая в области  $k < 0$ , соответствует уточненному критерию (17) динамической стабилизации перевернутого маятника. Она показывает минимальную (пороговую) относительную амплитуду подвеса  $m_{\min} = a_{\min}/l$  в зависимости от параметра  $k = -g/(l\omega^2)$ . Другие кривые,

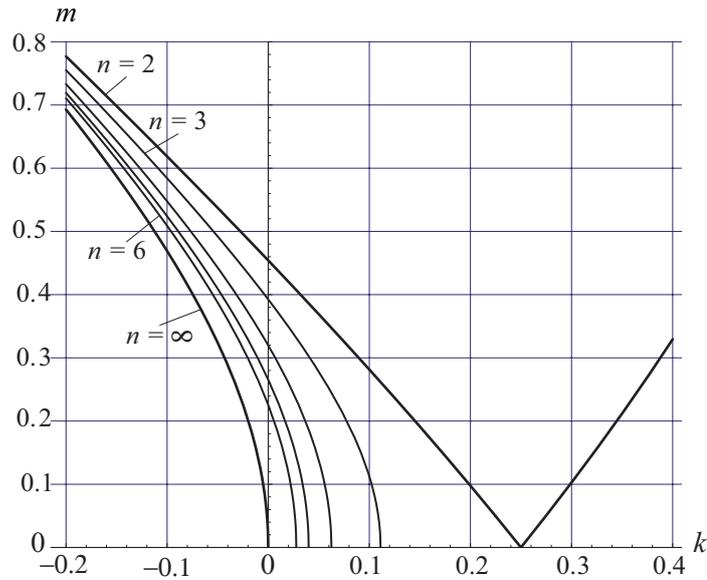


Рис. 3: Относительная амплитуда подвеса  $m = a/l$  как функция  $k = g/(l\omega^2)$  (квадрата обратной относительной частоты подвеса) в условиях порога субгармонических резонансов нескольких порядков  $n$ . Границе области динамической стабилизации перевернутого маятника соответствует левая кривая, обозначенная как  $n \rightarrow \infty$  (см. подробности в тексте).

расположенные при  $k < 0$  правее этой границы устойчивости, показывают зависимость от  $k$  пороговых значений амплитуды подвеса для субгармонических резонансов нескольких порядков перевернутого маятника (начиная с  $n = 6$  до  $n = 2$  слева направо).<sup>1</sup>

Кривая с  $n = 2$  на рис. 3 в области  $k < 0$  дает верхнюю границу динамической стабилизации перевернутого маятника: как будет показано ниже, при превышении этой границы перевернутый маятник теряет устойчивость и переходит в стационарный режим колебаний с периодом  $2T$  (флаттер-мода). Субгармоническим резонансам разных порядков соответствуют кривые, заключенные между нижней ( $n \rightarrow \infty$ ) и верхней ( $n = 2$ ) границами динамической стабилизации. Возможность возбуждения таких колебаний не влияет на критерий устойчивости перевернутого положения, поскольку маятник может быть захвачен в  $n$ -периодический предельный цикл только при определенном начальном возбуждении: начальное состояние должно принадлежать бассейну притяжения соответствующего аттрактора. В противном случае перевернутый маятник в конце концов приходит в состояние покоя.

Предельному случаю очень высокой частоты возбуждения ( $\omega\sqrt{l/g} = \omega/\omega_0 \rightarrow \infty$ ), когда сила тяжести становится пренебрежимой по сравнению с силой инерции (или, что то же самое, случаю маятника в отсутствие силы тяжести, т.е.  $\omega_0/\omega = 0$ ) соответствует значение  $k = 0$ . Это точки пересечения кривых на рис. 3 с вертикальной  $m$ -осью. Продолжения этих кривых через  $k = 0$  в область положительных значений  $k = (\omega_0/\omega)^2$  описывают переход через невесомость от «силы тяготения»,

<sup>1</sup>Кривые на рис. 3 построены с помощью несколько более сложных формул по сравнению с (15), которые получены при включении еще двух высокочастотных гармоник в пробную функцию  $\varphi(t)$ .

направленной вверх, к обычной ситуации, т.е. дают пороговые амплитуды субгармонических резонансов неперевернутого маятника. Субгармонические колебания некоторого порядка  $n$  (при  $n > 2$ ) возможны при значениях  $k < 1/n^2$ , т.е. при частоте возбуждения  $\omega > n\omega_0$ . Кривые на рис. 3 показывают, что при уменьшении параметра  $k$  от критического значения  $1/n^2$  к нулю (т.е. при увеличении частоты  $\omega$  за пределы значения  $n\omega_0$ , при котором вообще становятся возможными субгармонические колебания порядка  $n$ ), пороговая амплитуда возбуждения  $n$ -периодических колебаний быстро возрастает.

Полное исследование режимов маятника с осциллирующим подвесом осложняется большим числом параметров, характеризующих систему ( $\omega_0, \omega, a, \gamma$ ). Значительное упрощение достигается, если исключить один из параметров, а именно собственную частоту  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  малых колебаний, т.е. перейти к изучению маятника в отсутствие силы тяжести. Такая упрощенная модель полезна также для качественного объяснения поведения маятника в поле тяжести при высокой частоте и/или большой амплитуде осцилляций подвеса, когда сила тяжести играет роль малой добавки к силе инерции. Происхождение многих сложных движений маятника, обсуждаемых в этой статье, не связано с силой тяжести, и для их изучения можно рассмотреть простейший случай осцилляций подвеса в невесомости, который описывается уравнением (3) с  $\omega_0 = 0$ .

Точки пересечения кривых на рис. 3 с осью ординат, соответствующие пороговым условиям в отсутствие силы тяжести ( $k = 0$ ), дают, в соответствии с выражением (15), следующие значения для относительной амплитуды возбуждения:

$$m_{\min} = \frac{\sqrt{2}(n^2 - 1)}{n^2\sqrt{n^2 + 1}}. \quad (18)$$

Относительный вклад  $A_{n-1}/A_1$  и  $A_{n+1}/A_1$  наиболее важных высших гармоник  $\varphi(t)$  в (12) дается при  $k = 0$  следующими выражениями:

$$\frac{A_{n-1}}{A_1} = \frac{n+1}{\sqrt{2}\sqrt{n^2+1}(n-1)}, \quad \frac{A_{n+1}}{A_1} = \frac{n-1}{\sqrt{2}\sqrt{n^2+1}(n+1)}. \quad (19)$$

Для субгармонических колебаний высоких порядков ( $n \gg 1$ ) выражение (18) дает в случае отсутствия силы тяжести приближенное значение  $m_{\min} \approx \sqrt{2}/n$ , которое было получено выше (см. (8)) с помощью простого подхода, основанного на разделении быстрого и медленного движений, из условия совпадения  $n$  циклов возбуждения с одним периодом медленного движения маятника вблизи дна эффективного потенциала. Относительные вклады высших гармоник  $A_{n-1}/A_1$  и  $A_{n+1}/A_1$ , определяемые формулами (19), при  $n \gg 1$  имеют почти одинаковые значения, стремящиеся к  $1/(\sqrt{2}n) = m_{\min}/2$  в соответствии с выражением (11), описывающим  $n$ -периодические колебания как суперпозицию быстрого и медленного движений.

Для небольших значений  $n$  мы не вправе ожидать хороших количественных предсказаний от простого подхода, использующего эффективный потенциал, потому что период медленного движения равен лишь нескольким периодам осцилляций подвеса: «быстрая» компонента в таких случаях оказывается недостаточно быстрой для получения хороших результатов при усреднении. При малых  $n$  критерии (17) и (18) дают более точные теоретические значения  $m_{\min}$ , а выражения (19) дают улучшенные значения для (неравных) вкладов высших гармоник  $A_{n-1}/A_1$  и  $A_{n+1}/A_1$  в колебания периода  $nT$  (при  $\omega_0 = 0$ ). Так, для  $n = 8$  формула (18) дает

$m_{\min} = a_{\min}/l = 63/(32\sqrt{130}) = 0.173$ , а (19) дает для амплитуд 7-й и 9-й гармоник значения  $A_7/A_1 = 9/(7\sqrt{130}) = 0.113$ ,  $A_9/A_1 = 7/(9\sqrt{130}) = 0.068$ . Эти теоретические значения с высокой точностью совпадают с результатами компьютерного моделирования, основанного на численном интегрировании уравнения (3).

Пример  $n$ -периодических колебаний с нечетным  $n = 5$  приведен на рис. 4. В спектре доминирует основная гармоника с частотой  $\omega/5$ . Значительный вклад в  $\varphi(t)$  дают 4-я и 6-я гармоники.

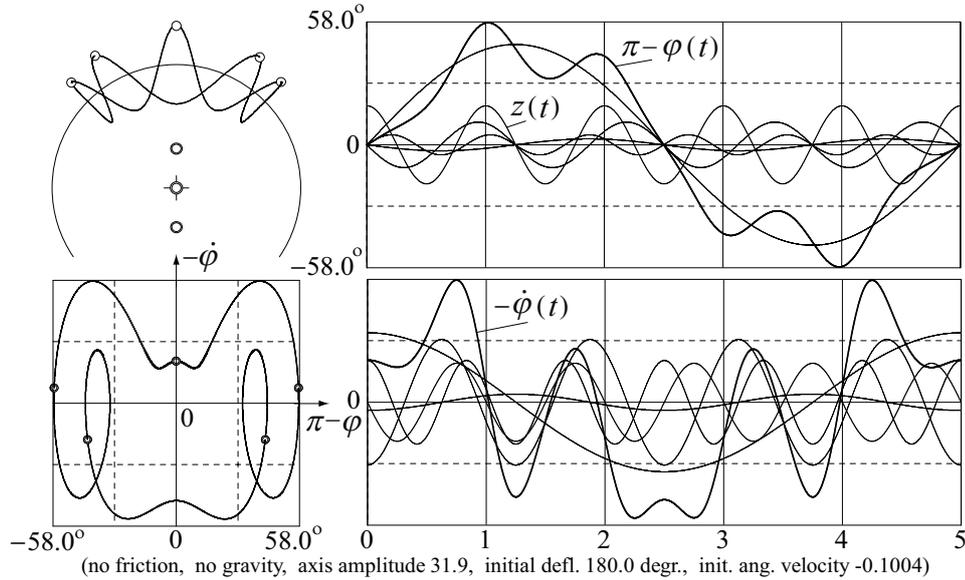


Рис. 4: Траектория в пространстве, фазовая траектория с сечениями Пуанкаре и графики стационарных колебаний для субгармонического резонанса 5-го порядка. Тонкими линиями показаны графики отдельных гармоник. В спектре доминирует основная гармоника с частотой  $\omega/5$ . Значительный вклад в  $\varphi(t)$  дают 4-я и 6-я гармоники. При большом размахе колебаний вклад второй гармоники  $2\omega/5$  также заметен.

При превышении порога в спектре субгармонических резонансов появляются дополнительные компоненты: отметим 3-ю гармонику в спектре колебаний с  $n = 8$  на рис. 2 и 2-ю в спектре колебаний с  $n = 5$  на рис. 4. При наличии силы тяжести обсуждаемые здесь  $n$ -периодические «кивающие» колебания (“multiple-nodding oscillations”) возможны как для перевернутого, так и неперевернутого маятника.

## 5 Сосуществование субгармонических резонансов разных порядков $n$

Представление об эффективном потенциале, будучи применимым к описанию медленных колебаний большого размаха, позволяет объяснить сосуществование субгармонических резонансов разных порядков при одних и тех же значениях частоты и амплитуды осцилляций подвеса. При оценке условий возникновения  $n$ -периодических колебаний с помощью выражения (8) предполагалось, что медленное дви-

жение маятника в яме эффективного потенциала представляет собой гармоническое колебание, что справедливо только тогда, когда это движение ограничено малой окрестностью дна потенциальной ямы (см. рис. 1). Поэтому условие (18) дает лишь нижний предел амплитуды возбуждения, соответствующий возбуждению  $n$ -периодических колебаний бесконечно малой амплитуды. Медленные  $n$ -периодические колебания конечного размаха, когда отклонения маятника простираются за пределы параболической части эффективного потенциала, захватывая его пологие склоны, уже не будут гармоническими и характеризуются увеличенным периодом по сравнению с малыми колебаниями вблизи дна потенциальной ямы.

Для колебаний большого размаха, как видно из рис. 2, вклад третьей гармоники становится заметным. В приближенном подходе, основанном на разделении быстрого и медленного движений, этот вклад объясняется отклонением формы эффективного потенциала от параболической, т.е. ангармоничностью медленных колебаний большого размаха. Эффективному потенциалу  $U(\psi)$  соответствует «мягкая» возвращающая сила, поэтому период колебаний возрастает с увеличением их размаха. Благодаря этой зависимости периода от размаха оказывается возможным сосуществование стационарных  $n$ -периодических колебаний с разными  $n$  при одних и тех же значениях амплитуды и частоты осцилляций подвеса. Например, один цикл медленного колебания некоторого размаха может охватывать 6 периодов возбуждения, а цикл колебания несколько большего размаха в той же непараболической потенциальной яме — 8 периодов возбуждения.

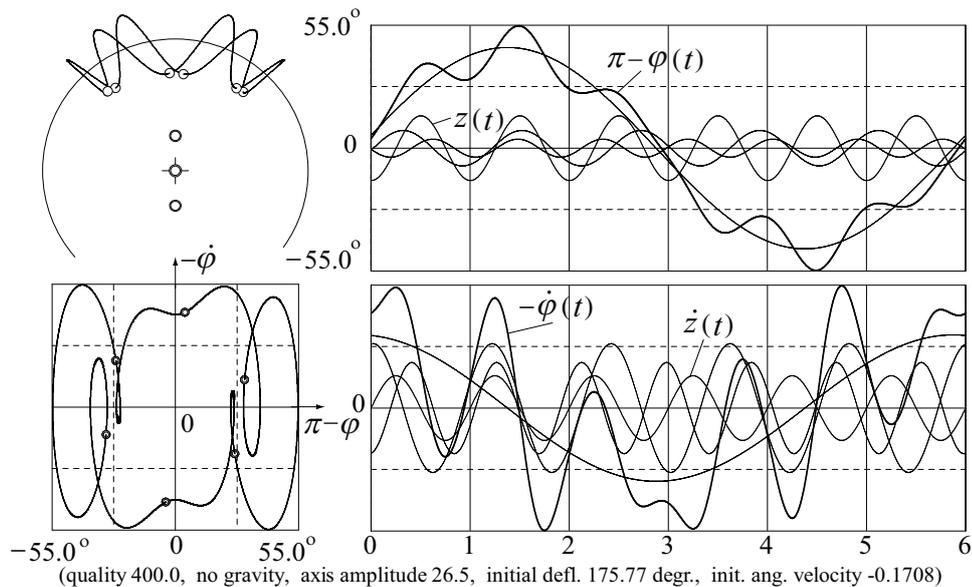


Рис. 5: Траектория в пространстве, фазовая траектория с сечениями Пуанкаре и графики стационарных колебаний для субгармонического резонанса 6-го порядка. Тонкими линиями показаны графики отдельных гармоник. В спектре доминирует основная гармоника с частотой  $\omega/6$ . Заметный вклад в  $\varphi(t)$  дают 5-я и 7-я гармоники.

На рис. 5 показаны установившиеся колебания с периодом  $6T$ , сосуществующие с показанными на рис. 2 колебаниями периода  $8T$  при тех же значениях

параметров системы. В какой именно из этих конкурирующих стационарных режимов (аттракторов) будет захвачен маятник после завершения переходного процесса, зависит от начальных условий. Множество начальных состояний, которое в конце концов приводит маятник в определенный стационарный режим, образует «бассейн притяжения» соответствующего аттрактора. Режимам на рис. 2 и 5 соответствуют разные бассейны притяжения.

Чтобы оценить, как размах колебаний при субгармоническом резонансе порядка  $n$  зависит от превышения  $a - a_{\min}$  амплитуды возбуждения  $a$  над пороговым значением  $a_{\min}$ , и как вклад третьей гармоники зависит от размаха колебаний, можно в дифференциальном уравнении (6), описывающем медленную компоненту движения, разложить  $\sin \psi$  и  $\sin 2\psi$  в ряд по степеням  $\psi$  и удержать первые два члена:

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2(\psi - \frac{1}{6}\psi^3) + \frac{1}{2}m^2\omega^2(\psi - \frac{2}{3}\psi^3) = 0. \quad (20)$$

Решение уравнения (20) можно искать в виде суперпозиции первой и третьей гармоник:

$$\psi = A_1 \sin \omega_1 t + A_3 \sin 3\omega_1 t. \quad (21)$$

Подставляя  $\psi$  из (21) в уравнение (20) и приравнявая нулю коэффициент при  $\sin \omega_1 t$ , находим зависимость частоты медленных колебаний от амплитуды  $A_1$ :

$$\omega_{\text{down, up}}^2 = \frac{1}{2}m^2\omega^2(1 - \frac{1}{2}A_1^2) \pm \omega_0^2(1 - \frac{1}{8}A_1^2). \quad (22)$$

Это выражение переходит в (7) при  $A_1 \rightarrow 0$ . При субгармонических колебаниях порядка  $n$  собственная частота медленных колебаний  $\omega_{\text{down}}$  или  $\omega_{\text{up}}$  в  $n$  раз меньше частоты осцилляций подвеса  $\omega$ . Приравнявая соответствующие выражения, находим приближенную зависимость амплитуды основной гармоники  $A_1$  от превышения амплитуды возбуждения над порогом  $m - m_{\min}$ . Для случая  $\omega_0 = 0$  (отсутствие силы тяжести) получаем:

$$A_1 = \sqrt{2}\sqrt{1 - m_{\min}^2/m^2} \approx 2\sqrt{1 - m_{\min}/m}. \quad (23)$$

Последнее приближенное выражение справедливо, когда амплитуда возбуждения  $m = a/l$  лишь немного превышает критическое значение, т.е. когда  $(m - m_{\min}) \ll m_{\min}$ .

Для субгармонических резонансов порядков  $n = 8$  и  $n = 6$  зависимость  $A_1$  от  $m$  (23) показана сплошными линиями на рис. 6 слева вместе с экспериментальными значениями  $A_1$  (точки), полученными путем численного моделирования системы с помощью точного уравнения (3). Если амплитуда  $m$  осцилляций подвеса больше, чем  $m_{\min} = 0.226$  для  $n = 6$ , стационарные  $n$ -периодические колебания с  $n = 8$  и  $n = 6$  могут сосуществовать при одних и тех же значениях параметров системы.

Амплитуду  $A_3$  третьей гармоники в уравнении (21) можно оценить аналогично, приравнявая нулю коэффициент при  $\cos 3\omega_1 t$  после подстановки  $\psi$  из (21) в уравнение (20). Удобно представить  $A_3$  как функцию амплитуды  $A_1$  медленного движения:  $A_3 = \frac{1}{3}A_1^3/(16 - 7A_1^2)$ . Соответствующий график показан сплошной линией на рис. 6 справа. Точками показаны результаты компьютерного моделирования для резонанса  $n = 8$ .

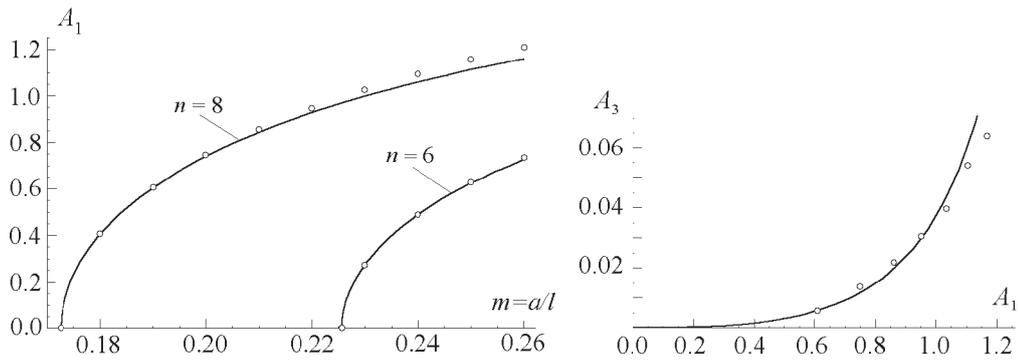


Рис. 6: Амплитуда основной гармоники в субгармонических резонансах порядков  $n = 8$  и  $n = 6$  как функция амплитуды возбуждения  $m = a/l$  (слева) и амплитуда  $A_3$  третьей гармоники в субгармоническом резонансе порядка  $n = 8$  как функция амплитуды основной гармоники  $A_1$ . Кривые — приближенная теория (подробности в тексте), точки — компьютерное моделирование.

Трение вносит некоторый сдвиг фаз между вынужденными осцилляциями подвеса и гармониками установившихся  $n$ -периодических колебаний маятника. Благодаря этому сдвигу фаз маятник получает энергию, необходимую для компенсации потерь энергии из-за трения. При наличии трения пространственные траектории прямого и обратного движения маятника не совпадают и нарушается симметрия фазовой траектории относительно оси ординат, что заметно на рис. 2 и 5 даже для движения при очень слабом трении.

## 6 Верхняя граница динамической стабилизации и параметрический резонанс

Если амплитуда  $a$  принудительных осцилляций подвеса превышает определенное критическое значение  $a_{\max}$ , динамически стабилизированный перевернутый маятник утрачивает устойчивость. После небольшого возмущения маятник не возвращается в перевернутое положение даже при сколь угодно малом отклонении, а в конце концов оказывается захваченным в предельный цикл, совершая стационарные колебания конечного размаха около перевернутого положения. Период этих колебаний равен двум периодам возбуждения. Размах установившихся колебаний растет с увеличением превышения амплитуды осцилляций подвеса над порогом  $a_{\max}$ .

Потеря устойчивости перевернутого маятника впервые описана в 1992 г. Блэкберном и др. [4] и продемонстрирована на опыте в [5]. Авторы назвали возбуждаемые при этом колебания «флаттер»-модой (“flutter-mode”), что можно перевести как «машущие» или «трепещущие» колебания. Графики таких колебаний и характерная фазовая траектория с двумя «вмятинами» показаны на рис. 7.

Этот стационарный режим колебаний перевернутого маятника можно, разумеется, рассматривать как частный случай субгармонических резонансов, а именно как резонанс с  $n = 2$ . Как уже отмечалось, в случае малых  $n$  движение маятника

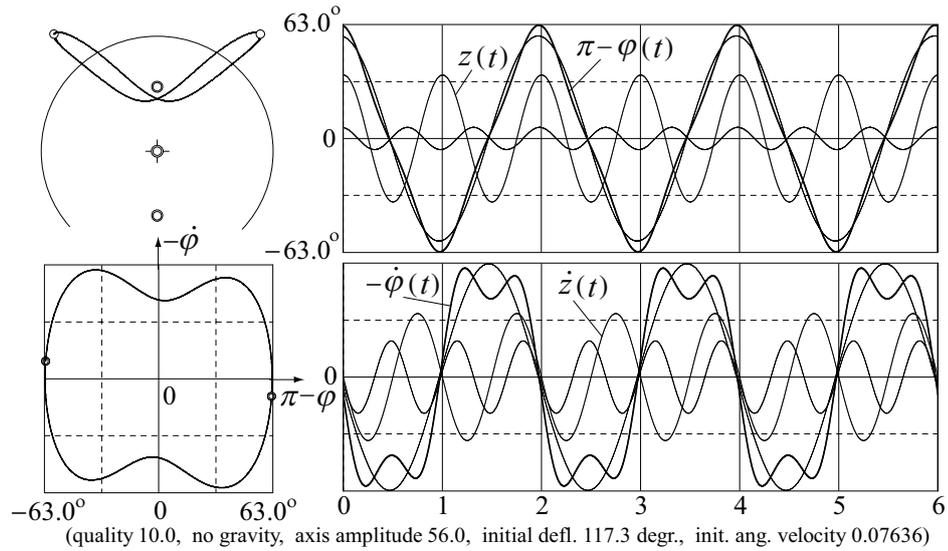


Рис. 7: Стационарные колебания перевернутого маятника с периодом  $2T$  («флаттер»-мода), происходящие при превышении верхней границы динамической стабилизации. Спектр состоит из основной гармоники с частотой  $\omega/2$  и третьей гармоники с частотой  $3\omega/2$ .

невозможно представить корректно в виде суперпозиции быстрой и медленной составляющих. Амплитуда подвеса  $a_{\max}$ , при которой возможны такие колебания, не мала по сравнению с длиной маятника  $l$ . Поэтому данный режим колебаний оказывается за пределами применимости метода усреднения, т.е. приближения, основанного на использовании эффективного потенциала для маятника с осциллирующим подвесом. Такой подход не в состоянии объяснить как дестабилизацию перевернутого маятника, так и потерю устойчивости нижнего положения равновесия, происходящую в условиях параметрического резонанса (в последнем случае амплитуда подвеса может быть и малой, но частота его осцилляций недостаточно велика для разделения быстрого и медленного движений).

Компьютерное моделирование (см. рис. 7) показывает очень простой спектральный состав флаттер-колебаний с периодом  $2T$ , происходящих при превышении верхней границы динамической устойчивости: это основная гармоника с частотой  $\omega/2$ , и небольшая примесь третьей гармоники с частотой  $3\omega/2$ . Отметим, что подобным спектром характеризуются установившиеся колебания неперевернутого маятника в условиях обычного параметрического резонанса (см. рис. 8). Это сходство не случайно: основной параметрический резонанс неперевернутого маятника, возбуждающийся при  $\omega \approx 2\omega_0$ , и флаттер-мода, разрушающая динамическую устойчивость перевернутого маятника, принадлежат одной и той же ветви стационарных колебаний маятника с осциллирующим подвесом, которую можно рассматривать как субгармонический резонанс порядка  $n = 2$ . Поэтому верхняя граница динамической стабилизации перевернутого маятника может быть найдена непосредственно из дифференциального уравнения системы (3) тем же методом, который используется для нахождения условий параметрической неустойчивости обычного маятника (см., например, [6]). Для решения этой задачи можно

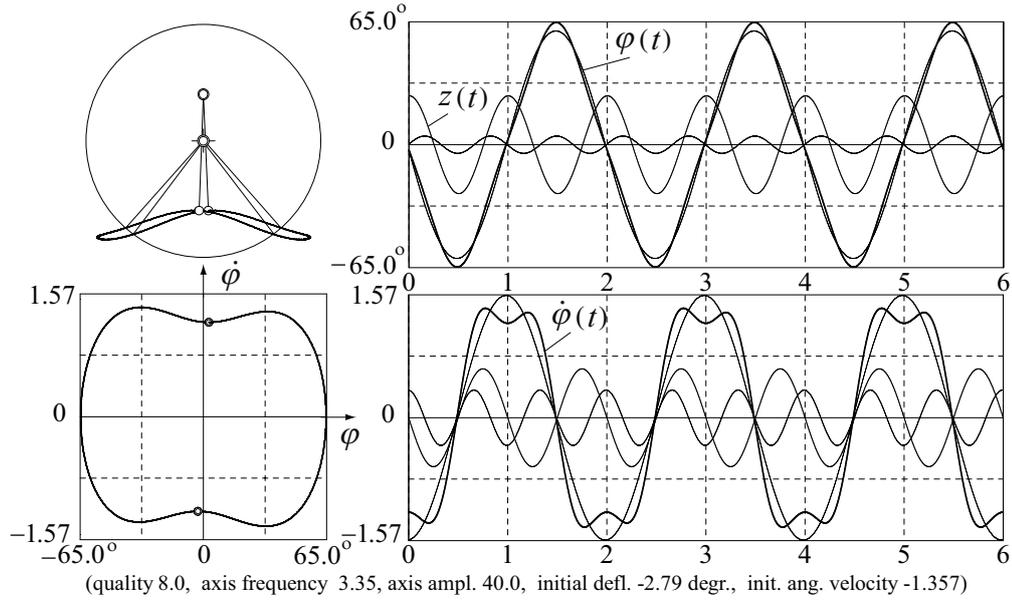


Рис. 8: Траектория в пространстве, фазовая орбита и графики стационарных колебаний маятника с периодом  $2T$  (параметрический резонанс). Спектр состоит из основной гармоники с частотой  $\omega/2$  и третьей гармоники с частотой  $3\omega/2$ , графики которых показаны тонкими линиями.

пользоваться линеаризованным уравнением (13), поскольку на границе динамической стабилизации амплитуда колебаний бесконечно мала. Периодическое решение уравнения (13), соответствующее искомой границе, можно представить в виде суперпозиции основной гармоники, частота которой  $\omega/2$  равна половине частоты осцилляций подвеса, и третьей гармоники с частотой  $3\omega/2$ :

$$\varphi(t) = A_1 \sin(\omega t/2) + A_3 \sin(3\omega t/2). \quad (24)$$

Фазы гармоник в (24) соответствуют осцилляциям подвеса в виде  $z(t) = a \cos \omega t$ . Подставляя пробную функцию  $\varphi(t)$  из (24) в линеаризованное дифференциальное уравнение (13) с  $\gamma = 0$  и разлагая произведения тригонометрических функций, приходим к уравнению, в котором нужно приравнять нулю коэффициенты при  $\sin(\omega t/2)$  и  $\sin(3\omega t/2)$ . Таким образом мы получаем систему однородных уравнений для коэффициентов  $A_1$  и  $A_3$ , которая имеет нетривиальное решение, если её определитель равен нулю. Это условие приводит к квадратному уравнению для искомой критической амплитуды осцилляций подвеса  $a_{\max}/l = m_{\max}$ , релевантный корень которого в случае  $\omega_0 = 0$  (отсутствие силы тяжести или предельно высокая частота осцилляций подвеса) равен  $m_{\max} = 3(\sqrt{13} - 3)/4 = 0.454$ . Соответствующее этому корню отношение амплитуд третьей и основной гармоник равно  $A_3/A_1 = (\sqrt{13} - 3)/6 = 0.101$ .

Несколько более сложное вычисление, в котором учитываются гармоники пробной функции  $\varphi(t)$  вплоть до 7-й, дает для  $m_{\max}$  и  $A_3/A_1$  значения, совпадающие с приведенными выше (в пределах принятой здесь точности). Эти значения хорошо согласуются с результатами компьютерного моделирования в отсутствие силы тяжести ( $\omega_0 = 0$ ) при малых угловых отклонениях маятника. Когда амплитуда воз-

буждения  $m = a/l$  превышает критическое значение  $m_{\max} = 0.454$ , размах колебаний флаттер-моды (амплитуда основной гармоники  $A_1$ ) растет пропорционально квадратному корню из этого превышения:  $A_1 \sim \sqrt{a - a_{\max}}$ . Такая зависимость следует из нелинейного дифференциального уравнения маятника (3), если в нем  $\sin \varphi$  аппроксимировать разложением  $\varphi - \varphi^3/6$ , и подтверждается компьютерным моделированием вплоть до амплитуд  $45^\circ$  (рис. 9).

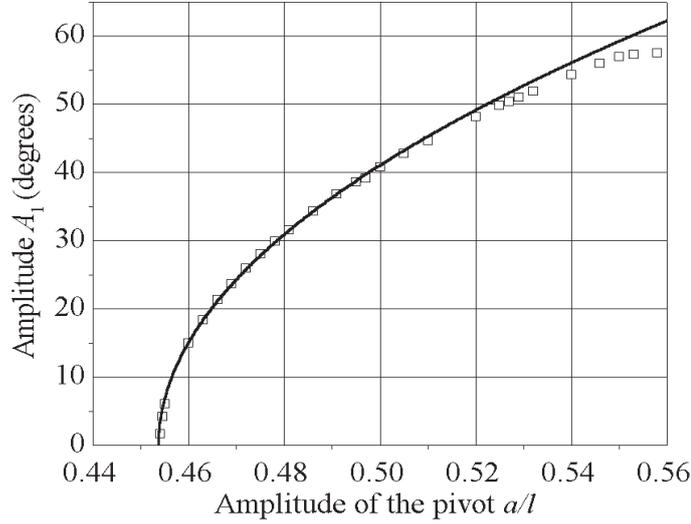


Рис. 9: Амплитуда  $A_1$  основной гармоники стационарных колебаний флаттер-моды при превышении верхней границы динамической стабилизации.

При увеличении амплитуды  $a$  осцилляций подвеса выше значения  $0.555 l$  происходит бифуркация нарушения симметрии: максимальные отклонения маятника в одну и другую сторону становятся различными, что разрушает симметрию колебаний в пространстве и симметрию фазовой траектории. При дальнейшем увеличении амплитуды осцилляций подвеса, после достижения значения  $a/l = 0.565$ , система претерпевает последовательность бифуркаций удвоения периода и наконец, при  $a/l = 0.56622$  (для  $Q = 20$ ), колебательное движение маятника после продолжительного хаотического переходного процесса сменяется однонаправленным вращением с периодом, равным периоду возбуждения.

Аналогичное, хотя и более сложное теоретическое исследование границ режимов установившихся колебаний маятника при наличии силы тяжести позволяет получить зависимость критической (дестабилизирующей) амплитуды подвеса  $m$  от частоты возбуждения  $\omega$ . Эту зависимость удобно выразить, используя параметр  $k = g/(l\omega^2)$ :

$$m_{\max} = \frac{1}{4}(\sqrt{117 - 232k + 80k^2} - 9 + 4k), \quad k = \frac{g}{l\omega^2}. \quad (25)$$

Соответствующая граница показана на рис. 3 кривой, обозначенной как  $n = 2$ . Критическая амплитуда возбуждения стремится к нулю при  $k \rightarrow 1/4$  (при  $\omega \rightarrow 2\omega_0$ ). Это условие соответствует параметрическому резонансу маятника в нижнем положении: при малых амплитудах подвеса резонанс наблюдается, когда частота возбуждения вдвое больше собственной частоты. Если  $\omega$  превышает  $2\omega_0$  (т.е. если

$k < 0.25$ ), для возникновения параметрических колебаний амплитуда возбуждения должна быть конечной даже в отсутствие трения.

Кривая  $n = 2$  пересекает ось ординат при  $m = 3(\sqrt{13} - 3)/4 = 0.454$ . Этот случай ( $k = 0$ ) соответствует пределу высокой частоты возбуждения ( $\omega/\omega_0 \rightarrow \infty$ ) или отсутствию силы тяжести ( $\omega_0 = 0$ ), так что  $m = 0.454$  дает верхний предел устойчивости каждого из двух динамически стабилизированных положений равновесия: если  $m > 0.454$  при  $g = 0$ , возбуждается флаттер-мода колебаний маятника. Продолжение кривой  $n = 2$  в область отрицательных значений  $k = g/(l\omega^2)$  соответствует переходу от обычной (направленной вниз) силы тяжести через «невесомость» к отрицательной (направленной вверх) «силе тяжести», что эквивалентно перевернутому маятнику в обычном (направленном вниз) поле тяжести. Таким образом, одна и та же формула (25) дает амплитуду возбуждения как функцию частоты  $\omega$ , при которой нижнее положение равновесия становится неустойчивым благодаря обычному параметрическому резонансу, и перевернутое (динамически стабилизированное) положение становится неустойчивым благодаря возбуждению флаттер-моды колебаний маятника. Как уже отмечалось, оба явления принадлежат одной ветви регулярного поведения маятника, т.е. тесно связаны между собой и имеют общую физическую природу. Все кривые, соответствующие субгармоническим резонансам высоких порядков ( $n > 2$ ), лежат между этой кривой  $n = 2$  и нижней границей динамической стабилизации перевернутого маятника (кривая  $n \rightarrow \infty$  на рис. 3).

В действительности выражение (25) дает обе границы интервала неустойчивости, окружающего основной параметрический резонанс, который имеет место при  $k = 1/4$ , т.е. при  $\omega = 2\omega_0$ . В области  $k > 1/4$  ( $\omega < 2\omega_0$ ) выражение (25) дает отрицательные значения  $m$ , абсолютная величина которых  $|m| = a/l$  соответствует стационарным колебаниям на второй границе интервала неустойчивости (справа от  $k = 0.25$ , см. рис. 3). Эти колебания тоже содержат две гармоники с частотами  $\omega/2$  и  $3\omega/2$ , но их фазы будут иными по сравнению с фазами гармоник в (24) — это гармоники косинусоидального типа (при  $m > 0$ ). При отрицательных  $m$ , что физически означает просто изменение фазы осцилляций подвеса на противоположную, гармоники колебаний на второй границе будут, как и в (24), синусоидального типа.

На рис. 10 кривые 1 и 2 показывают границы основного интервала параметрической неустойчивости ( $\omega \approx 2\omega_0$ ) как функции частоты возбуждения  $\omega/\omega_0$  (в отличие от более удобного для записи формул, но физически менее осмысленного параметра  $k = g/(l\omega^2) = (\omega_0/\omega)^2$ , использованного на рис. 3. Критическая амплитуда подвеса стремится к нулю, когда частота приближается к  $2\omega_0$  с любой стороны. Кривая 3 показывает на плоскости параметров ( $\omega/\omega_0$ ,  $a/l$ ) границу области параметрической неустойчивости при наличии трения (для  $Q = \omega_0/2\gamma = 5.0$ ). Когда подвес осциллирует с частотой  $2\omega_0$ , нижнее положение равновесия теряет устойчивость, если относительная амплитуда этих осцилляций  $m = a/l$  превышает пороговое значение  $1/2Q$ . Кривая 3 почти сливается с кривыми 1 и 2, как только частота  $\omega$  немного отклоняется от резонансного значения  $2\omega_0$  (детальное обсуждение роли трения приведено ниже). В предельном случае высокой частоты  $\omega$ , когда роль силы тяжести становится пренебрежимой, относительная амплитуда подвеса  $a/l$  стремится к значению 0.454, соответствующему дестабилизации каждого из двух симметрично расположенных положений равновесия.

Кривая 4 на рис. 10 соответствует дестабилизации перевернутого маятника в

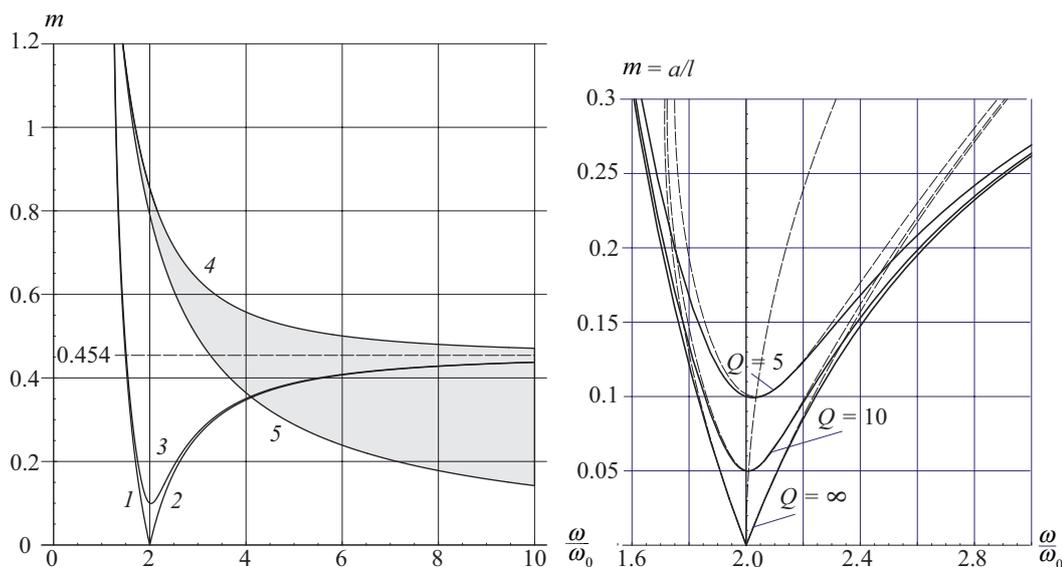


Рис. 10: Границы параметрической неустойчивости: амплитуда подвеса как функция частоты осцилляций. Кривые 1 и 2 — границы основного интервала ( $\omega \approx 2\omega_0$ ) для неперевернутого маятника в отсутствие трения; 3 — то же самое с трением ( $Q = 5.0$ ); кривые 4 и 5 — верхняя и нижняя границы динамической стабилизации перевернутого маятника. Справа показана кривая 3 в увеличенном масштабе.

результате возбуждения флаттер-моды. Чем ниже частота осцилляций подвеса, тем больше критическая амплитуда, при которой верхнее положение маятника становится неустойчивым. Фактически кривая 4 возбуждения флаттер-моды представляет собой продолжение (через бесконечное значение частоты  $\omega$ ) кривой 2 (или кривой 3 в присутствии трения), т.е. правой границы основного параметрического резонанса. Взаимосвязь этих явлений становится очевидной, если сопоставить кривым 4 и 2 эквивалентные им части единой кривой  $n = 2$  на диаграмме 3 в области отрицательных и положительных значений  $k$  соответственно.

Кривая 5 на диаграмме 10 показывает на плоскости параметров нижнюю границу динамической стабилизации перевернутого маятника, задаваемую критерием (17). Таким образом, область устойчивости перевернутого маятника занимает затененную часть этой плоскости между кривыми 5 и 4.

## 7 Влияние трения

При малых и умеренных амплитудах осцилляций подвеса основной параметрический резонанс происходит при частоте возбуждения приблизительно вдвое превосходящей собственную частоту:  $\omega \approx 2\omega_0$ . Порог параметрического возбуждения при  $\omega = 2\omega_0$  можно рассчитать, приравнявая работу, совершаемую силой инерции за период установившегося движения маятника, энергии, рассеиваемой из-за трения. При этом движение подвеса удобно считать происходящим по закону  $z(t) = -a \sin \omega t$  вместо (1), выбрав начало отсчета времени соответствующим образом. При таком выборе малые установившиеся колебания в условиях порога прибли-

женно описываются косинусоидальной функцией времени:  $\varphi(t) = C_1 \cos \omega t/2$ .

Момент силы инерции равен  $F_{\text{in}} l \sin \varphi$ , а элементарная работа  $dW$ , совершаемая этим моментом за бесконечно малое время  $dt$  равна

$$\begin{aligned} F_{\text{in}} l \sin \varphi d\varphi &= F_{\text{in}} l \sin \varphi \dot{\varphi} dt = \\ -I \frac{a}{l} \omega^2 \sin \omega t \sin \varphi \dot{\varphi} dt &\approx -I \frac{a}{l} \omega^2 \sin \omega t \varphi \dot{\varphi} dt. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь  $I$  — момент инерции маятника. Интегрируя это выражение по периоду колебаний маятника  $T = 2\pi/\omega_0 = 4\pi/\omega$ , находим вложение  $\Delta E$  в полную энергию  $E$  на протяжении двух циклов осцилляций подвеса:  $\Delta E = I\omega^2 C_1^2 (a/l)\omega/2\pi$ . Работа силы трения за то же время определяет рассеиваемую энергию. Элементарная работа силы трения за  $dt$  равна  $-2I\gamma(\dot{\varphi})^2 dt$ . Интегрируя по периоду колебаний, получаем  $-I\gamma C_1^2 \omega^2 \pi$ . Обратим внимание, что как потери энергии из-за трения, так и поступление энергии за счет осцилляций подвеса пропорциональны квадрату амплитуды колебаний  $C_1$ . Поэтому при превышении порога параметрического резонанса трение не в состоянии ограничить рост амплитуды. Приравнивая вложение энергии потерям, находим  $\omega(a/l) = 2\gamma$ . Поскольку в условиях резонанса  $\omega \approx 2\omega_0$ , получаем следующее приближенное выражение для порогового значения относительной амплитуды осцилляций подвеса:

$$m_{\text{thres}} = \frac{a_{\text{thres}}}{l} = \frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{1}{2Q}. \quad (27)$$

Если амплитуда осцилляций превышает это пороговое значение, параметрический резонанс возможен в некотором интервале частот возбуждения по обе стороны от резонансной частоты  $\omega_{\text{res}} = 2\omega_0$ . При заданной амплитуде возбуждения этот интервал тем шире, чем меньше трение. Чтобы найти границы интервала параметрической неустойчивости в присутствии трения, нужно включить член  $2\gamma\dot{\varphi}$  в линеаризованное дифференциальное уравнение маятника (13). При учете трения решение  $\varphi(t)$  этого уравнения, в отличие от (24), включает как синусоидальные, так и косинусоидальные члены:

$$\varphi(t) = A_1 \sin(\omega t/2) + A_3 \sin(3\omega t/2) + B_1 \cos(\omega t/2) + B_3 \cos(3\omega t/2). \quad (28)$$

Подставляя  $\varphi(t)$  из (28) в уравнение (13), получаем однородную систему приближенных уравнений для  $A_1, A_3$ , и  $B_1, B_3$ . Искомые границы интервала параметрической неустойчивости находятся из условия существования нетривиального решения этой системы. Получающиеся выражения для границ оказываются весьма громоздкими и поэтому здесь не приводятся. Соответствующий график в случае  $Q = 5$  показан как кривая 3 на диаграмме 10. Оказывается, что умеренное трение заметным образом влияет на границы интервала параметрической неустойчивости только в непосредственной окрестности  $\omega = 2\omega_0$ , т.е. при малых значениях относительной амплитуды осцилляций подвеса  $m = a/l$ . Детальная структура границ интервала в окрестности  $\omega = 2\omega_0$  показана тремя «языками» на рис. 10 справа для значений  $Q = 5, Q = 10$  и для отсутствия трения ( $Q \rightarrow \infty$ ). Тонкие кривые построены по приближенной формуле (29), справедливой при малых  $m = a/l \ll 1$  для границ интервала неустойчивости в окрестности  $\omega = 2\omega_0$ :

$$\omega_{1,2} = (2 \pm 2\sqrt{m^2 - 1/(2Q)^2} + 7m^2/2)\omega_0. \quad (29)$$

Если значения параметров лежат внутри этих «языков», поступление энергии за счет осцилляций подвеса превосходит диссипацию. Нижнее положение равновесия становится неустойчивым, и маятник покидает его при малейшем возмущении. При этом рост амплитуды ограничен нелинейными эффектами. Увеличение периода собственных колебаний маятника при больших амплитудах приводит к тому, что условия параметрической раскачки — два цикла осцилляций подвеса за один период собственных колебаний — с ростом амплитуды маятника перестают выполняться, и в результате после затухания переходных биений устанавливается колебание ограниченного размаха.

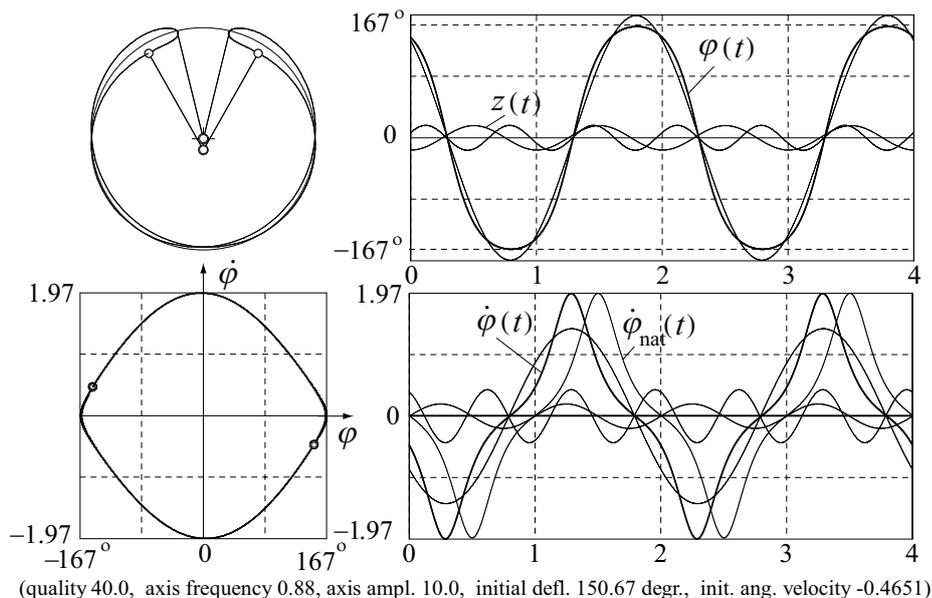


Рис. 11: Траектория в пространстве, фазовая орбита и графики стационарных колебаний маятника при  $\omega < 2\omega_0$ . Спектр состоит из основной гармоники с частотой  $\omega/2$  и третьей гармоники с частотой  $3\omega/2$ , графики которых показаны тонкими линиями.

Но благодаря тем же нелинейным свойствам маятника оказывается, что стационарные параметрические колебания с угловой амплитудой, приближающейся к  $180^\circ$ , в системе с малым трением возможны даже при небольшой амплитуде осцилляций подвеса. Пример таких параметрических колебаний приведен на рис. 11. Из-за увеличения собственного периода маятника при больших амплитудах синхронизация его колебаний с осцилляциями подвеса (фазовый захват) может произойти при  $\omega < 2\omega_0$ . Для этого при амплитуде  $167^\circ$  частота возбуждения  $\omega$  должна быть всего  $0.88\omega_0$  (сравните с условием параметрического резонанса  $\omega = 2\omega_0$  при малых амплитудах). По характеру параметрические колебания на рис. 11 очень близки к нелинейным собственным незатухающим колебаниям большого размаха [7]. Чтобы проиллюстрировать это сходство, на нижнем графике тонкой линией показана для сравнения угловая скорость  $\dot{\varphi}_{\text{nat}}(t)$  собственных колебаний такого же размаха в отсутствие трения. Как видно, период незатухающих собственных колебаний в точности равен периоду параметрических колебаний, и форма графиков  $\dot{\varphi}_{\text{nat}}(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  полностью совпадает. В этом случае роль осцилляций подвеса сво-

дится к подпитке маятника энергией для компенсации потерь на трение. В целом такие параметрические колебания имеют много общего с так называемой «модой звонаря» (“bell-ringer mode”), которую можно наблюдать при возбуждении жесткого маятника синусоидальным внешним моментом [8].

## 8 Заключительные замечания

При достаточно высокой частоте и малой амплитуде осцилляций подвеса многие замечательные особенности поведения маятника, в частности динамическую стабилизацию перевернутого положения, удастся наглядно объяснить на основе предложенного П.Л. Капицей метода разделения быстрых и медленных движений. Этот подход и связанная с ним концепция эффективного потенциала оказываются полезными и при изучении недавно открытых субгармонических резонансов высоких порядков, позволяя объяснить физические причины их возникновения и сосуществование резонансов разных порядков при одних и тех же значениях параметров системы. Соответствующая данному приближению количественная теория дает возможность рассчитать спектральный состав субгармонических резонансов и установить границы их существования в пространстве параметров системы.

Установление связи субгармонических резонансов с явлением стабилизации перевернутого маятника позволяет получить уточненный критерий динамической стабилизации (17), справедливый в широкой области значений частоты и амплитуды осцилляций подвеса, в том числе и при тех значениях, к которым метод разделения движений неприменим.

Отождествление субгармонического резонанса второго порядка с обычным параметрическим резонансом дает физическое объяснение недавно открытому явлению дестабилизации (динамически стабилизированного) перевернутого положения: при достаточно больших амплитудах осцилляций подвеса перевернутый маятник переходит в режим «флаттер»-моды колебаний с периодом  $2T$ . Это явление полностью аналогично потере устойчивости нижнего положения равновесия при выполнении условий параметрического резонанса. Установленная здесь принадлежность основного параметрического резонанса и флаттер-моды к одной и той же ветви стационарных колебаний маятника позволяет найти критерий потери устойчивости (25) для динамически стабилизированного верхнего положения равновесия тем же методом, что и для нижнего положения. Результаты аналитических расчетов границ стабилизации перевернутого маятника полностью подтверждаются компьютерным моделированием.

## Список литературы

- [1] Бутиков Е. И. “Стабилизация перевернутого маятника (60 лет маятнику Капицы)” Компьютерные инструменты в образовании, № 5, 40 – 51 (2010).
- [2] Acheson D. J. “Multiple-nodding oscillations of a driven inverted pendulum” *Proc. Roy. Soc. London A* **448** 89 – 95 (1995)
- [3] Butikov E. I. “On the dynamic stabilization of an inverted pendulum” *Am. J. Phys.* **69** 755 – 768 (2001)

- [4] Blackburn J A, Smith H J T, Groenbech-Jensen N “Stability and Hopf bifurcations in an inverted pendulum” *Am. J. Phys.* **60** 903 – 908 (1992)
- [5] Smith H J T Blackburn J A “Experimental study of an inverted pendulum” *Am. J. Phys.* **60** 909 – 911 (1992)
- [6] Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: «Наука», 123 – 125, 1988)
- [7] Butikov E I “The rigid pendulum – an antique but evergreen physical model” *Eur. J. Phys.* **20** 429 — 441 (1999)
- [8] Butikov E I “Extraordinary oscillations of an ordinary forced pendulum” *Eur. J. Phys.* **29** 215 — 233 (2008)