Телематика2005

XII Всероссийская
научно-методическая
конференция

Компьютерное моделирование нелинейных явлений в учебной лаборатории

Е. И. Бутиков
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург
Тел.: (812) 542-37-63, e-mail: butikov@spb.runnet.ru, web: www.ifmo.ru/butikov

В сравнительно простых нелинейных механических системах, таких, как маятник с осциллирующим подвесом, можно наблюдать множество сложных периодических и хаотических режимов. На протяжении последних десятилетий удалось достичь весьма глубоко понимания природы таких явлений. В частности, кажущееся противоречие между детерминизмом и случайностью получило внятное математическое объяснение. Однако существующие аналитические методы исследования нелинейных систем слишком сложны, и при этом не в состоянии описать наблюдаемое в эксперименте разнообразие их поведения. Результаты трудоемких приближенных математических расчетов имеют очень ограниченную применимость. Причина заключается, по-видимому, не в ущербности аналитических методов математики, а в сложности самих возможных движений. Поэтому лучшим введением в детерминистский хаос может служить демонстрация простой механической системы в движении. Для наблюдения хаотических движений, возможных только в нелинейных системах, компьютерное моделирование становится наиболее важным (если не единственным) доступным инструментом. В данном сообщении представлены некоторые примеры из обширной коллекции разнообразных простых и весьма сложных, порой противоречащих нашей интуиции, регулярных и хаотических движений, открытых сравнительно недавно с помощью компьютерного моделирования.

Обычный жесткий маятник, ось которого совершает заданные вертикальные колебания, интересен не только как пример простой нелинейной системы, но главным образом потому, что описывающее его дифференциальное уравнение встречается в самых разных проблемах современной физики. Механические аналоги физических систем допускают прямую визуализацию и тем самым очень полезны для облегчения интуитивного понимания сложных явлений (см., например, [1]). Пример хаотического поведения такого маятника приведен на рис. 1.

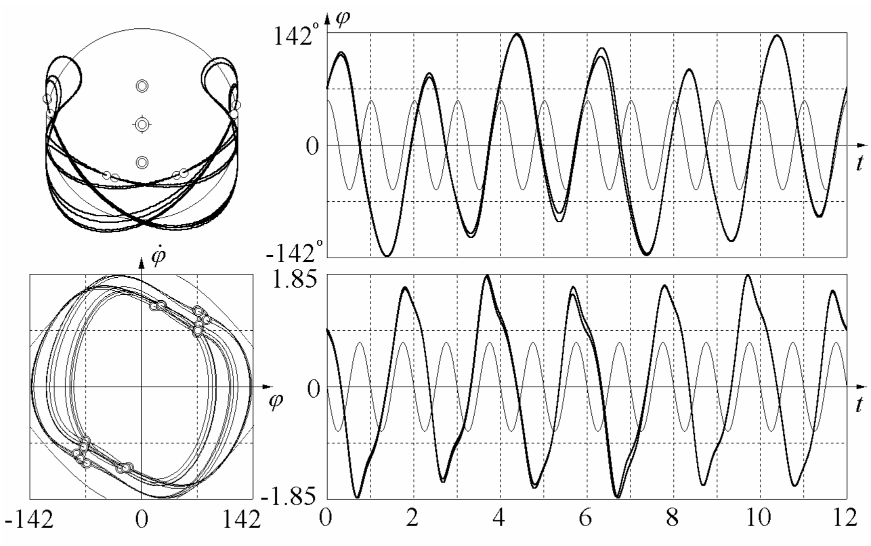
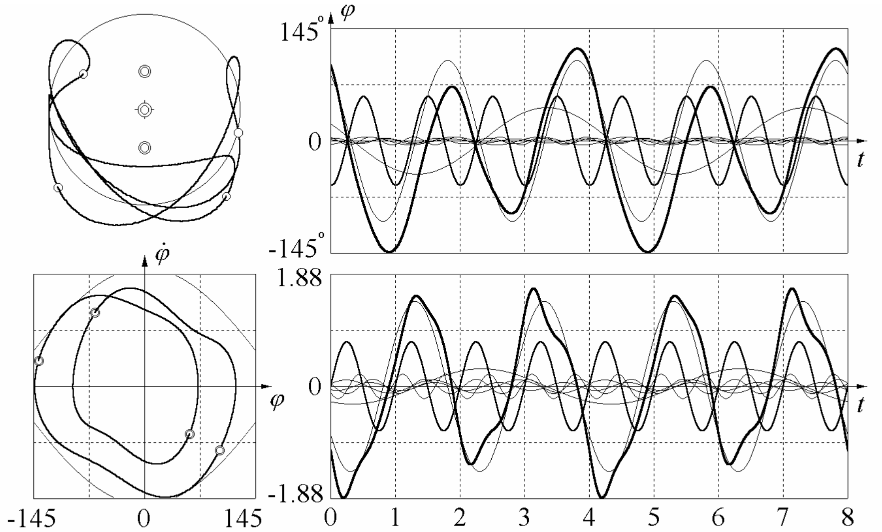


Рис. 1. Хаотические колебания маятника при параметрическом возбуждении. Слева показаны траектория и фазовая траектория с сечениями Пуанкаре, справа – графики угла отклонения и угловой скорости.

Данное хаотическое движение чисто колебательное (без переворотов), почти (но не точно) повторяющееся после каждых шести циклов возбуждения. Сечения Пуанкаре образуют две группы, каждая из которых состоит из трех изолированных островков. Изображающая состояние маятника фазовая точка посещает эти группы по очереди. Она проходит через островки тоже в строго определенном порядке, но в пределах каждого островка точки сечений Пуанкаре смещаются хаотически от одного прохода к другому. Такой 6-зонный хаотический аттрактор имеет весьма протяженную (и очень сложную по форме) область притяжения на фазовой плоскости начальных состояний.

Тем не менее, при тех же значениях параметров система имеет несколько сосуществующих установившихся режимов. На рис. 2 показано регулярное установившееся движение, период которого (как и период его фундаментальной гармоники) равен четырем циклам возбуждения. Однако период гармоники, доминирующей в спектре такого колебания, равен двум циклам возбуждения, поскольку в целом характер колебаний близок к основному параметрическому резонансу. Такая мода установившихся колебаний возбуждается в тех случаях, когда (при тех же параметрах системы) начальное состояние лежит в иной области фазовой плоскости, нежели область притяжения приведенного выше хаотического режима. При других начальных условиях (и тех же параметрах) маятник приходит в хорошо знакомый режим установившихся параметрических колебаний с периодом, равным двум периодам возбуждения.



(quality 3.055, axis frequency 1.57, axis ampl. 40.0, initial defl. 98.8 degr., init. ang. velocity -1.08)

Рис. 2. Регулярные установившиеся колебания, происходящие при тех же значениях параметров системы, что и хаотические колебания, показанные на рис. 1. Период колебаний равен 4 периодам возбуждения. Графики колебаний (жирные линии) показаны вместе с составляющими их гармониками (тонкие линии).

Поведение маятника при параметрическом возбуждении оказывается намного сложнее, чем можно было бы ожидать от такой простой системы, полагаясь на нашу физическую интуицию. Другие многочисленные сложные режимы регулярных и хаотических движений можно наблюдать с помощью разработанной нами моделирующей компьютерной программы, доступной через Интернет [2]. В частности, при определенных условиях можно возбудить субгармонические резонансы (стационарные колебания, период которых кратен периоду возбуждения), ясное физическое объяснение которых предложено в [3], где приведена также приближенная количественная теория таких явлений. В работе [3] впервые описаны и физически объяснены субгармонические резонансы дробных порядков. Тем не менее, многие из режимов сложного поведения параметрически возбуждаемого маятника, обнаруженных с помощью компьютерного моделирования (см. [2]), до сих пор не нашли ясного физического объяснения.

Традиционный способ исследования перехода к хаосу при моделировании нелинейных физических систем состоит в медленном сканировании одного из параметров при фиксированных значениях других параметров системы. Если, например, в процессе некоторого регулярного (периодического) движения начать медленное изменение амплитуды либо частоты возбуждения (либо параметра затухания), можно наблюдать интригующие последовательности бифуркаций, включающие нарушения симметрии, каскады удвоения периода и т.п., которые могут привести систему в один из хаотических режимов, описываемых странным аттрактором в фазовой плоскости. Однако существует множество режимов регулярного и хаотического поведения, которых невозможно достичь таким способом. Если даже требуемые значения параметров будут обеспечены (встретятся) в процессе сканирования, этого может оказаться недостаточно для возбуждения данного режима, потому что режим может характеризоваться некоторой очень узкой областью притяжения на фазовой плоскости начальных состояний. Как правило, нелинейные системы могут находиться в различных установившихся режимах при совпадающих значениях параметров системы (мультистабильность). Какой из нескольких возможных асимптотических режимов реализуется в конкретном эксперименте, решающим образом зависит от начальных условий.

Литература

1. Eugene Butikov. *On the dynamic stabilization of an inverted pendulum*, Am. J. Phys., **69** (7) 755 – 768, 2001
2. Eugene Butikov. *The parametrically driven pendulum* (the simulation program) http://www.ifmo.ru/butikov/Inverted.html
3. Eugene Butikov. *Subharmonic resonances of the parametrically driven pendulum*, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 6209-6231, 2002