

---

---

Санкт-Петербургский государственный университет

Физический факультет

Е. И. Бутиков

# **ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ**

ЛАБОРАТОРИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

**Учебное пособие**

Санкт-Петербург

2008

---

---

# Оглавление

Введение . . . . .	5
<b>1 Собственные колебания линейного осциллятора</b>	<b>7</b>
1.1 Теоретические сведения . . . . .	7
1.1.1 Общие положения . . . . .	7
1.1.2 Модель линейного осциллятора . . . . .	8
1.1.3 Дифференциальное уравнение осциллятора . . . . .	8
1.1.4 Время затухания и добротность $Q$ . . . . .	10
1.1.5 Неколебательное движение системы . . . . .	11
1.1.6 Фазовая диаграмма линейного осциллятора . . . . .	12
1.1.7 Превращения энергии . . . . .	15
1.1.8 Электромагнитный аналог линейного механического осциллятора . . . . .	16
1.1.9 Компьютерное моделирование колебаний линейного осциллятора . . . . .	17
1.2 Контрольные вопросы и задачи . . . . .	18
1.2.1 Колебания в отсутствие трения . . . . .	18
1.2.2 Затухающие собственные колебания . . . . .	19
1.2.3 Неколебательное движение осциллятора . . . . .	20
1.2.4 Приложение: Сводка основных формул . . . . .	21
<b>2 Осциллятор с сухим и вязким трением</b>	<b>23</b>
2.1 Теоретические сведения . . . . .	23
2.1.1 Модель физической системы . . . . .	23
2.1.2 Дифференциальное уравнение осциллятора . . . . .	25
2.1.3 Затухание колебаний под действием сухого трения . . . . .	26
2.1.4 Фазовая траектория . . . . .	27
2.1.5 Превращения энергии при колебаниях . . . . .	28
2.1.6 Роль вязкого трения . . . . .	30
2.2 Контрольные вопросы и задачи . . . . .	31
2.2.1 Затухание колебаний под действием сухого трения . . . . .	31
2.2.2 Влияние вязкого трения . . . . .	33
2.2.3 Приложение: Сводка основных формул . . . . .	33
<b>3 Колебания и перевороты жесткого маятника</b>	<b>35</b>
3.1 Теоретические сведения . . . . .	35
3.1.1 Физическая система . . . . .	35
3.1.2 Дифференциальное уравнение маятника . . . . .	36
3.1.3 Физические параметры маятника . . . . .	37
3.1.4 Фазовый портрет маятника . . . . .	37
3.1.5 Период малых колебаний маятника . . . . .	42

3.1.6	Лимитационное движение маятника . . . . .	44
3.1.7	Колебания маятника с большими амплитудами . . . . .	47
3.1.8	Колебания с большими амплитудами и перевороты маятника . . . . .	48
3.1.9	Средние значения потенциальной и кинетической энергий . . . . .	51
3.1.10	Влияние трения . . . . .	52
3.2	Контрольные вопросы и задачи . . . . .	54
3.2.1	Малые колебания маятника . . . . .	54
3.2.2	Колебания с большими амплитудами . . . . .	56
3.2.3	Перевороты и вращения маятника . . . . .	59
3.2.4	Приложение: Сводка основных формул . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Вынужденные колебания линейного осциллятора</b>	<b>61</b>
4.1	Теоретические сведения . . . . .	61
4.1.1	Общие положения . . . . .	61
4.1.2	Модель физической системы . . . . .	62
4.1.3	Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний . . . . .	63
4.1.4	Принцип суперпозиции . . . . .	64
4.1.5	Установившиеся вынужденные колебания . . . . .	64
4.1.6	Колебания в отсутствии трения . . . . .	65
4.1.7	Резонансные кривые . . . . .	66
4.1.8	Резонанс угловой скорости . . . . .	68
4.1.9	Энергетические превращения . . . . .	68
4.1.10	Поглощаемая и рассеиваемая осциллятором мощность. Лоренцевский контур . . . . .	70
4.1.11	Переходные процессы . . . . .	71
4.1.12	Условия отсутствия переходного процесса . . . . .	73
4.1.13	Резонансная раскачка осциллятора . . . . .	73
4.1.14	Классический механический аналог вынужденного излучения . . . . .	75
4.1.15	Переходные процессы вблизи резонанса . . . . .	78
4.1.16	Переходные процессы вдали от резонанса . . . . .	79
4.1.17	Фазовая траектория переходных процессов и сечения Пуанкаре . . . . .	80
4.2	Контрольные вопросы и задачи . . . . .	81
4.2.1	Установившиеся вынужденные колебания . . . . .	81
4.2.2	Переходные процессы . . . . .	83
4.2.3	Приложение: сводка основных формул . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Осциллятор с несинусоидальной внешней силой</b>	<b>88</b>
5.1	Теоретические сведения . . . . .	88
5.1.1	Моделируемая физическая система . . . . .	88
5.1.2	Дифференциальное уравнение колебаний осциллятора . . . . .	89
5.1.3	Гармоники внешней силы и установившихся колебаний осциллятора . . . . .	90
5.1.4	Вынужденные колебания осциллятора как собственные колебания около чередующихся смещенных положений равновесия . . . . .	93
5.1.5	Переходные процессы при раскачке колебаний осциллятора ступенчатым внешним моментом . . . . .	94
5.1.6	Оценка размаха установившихся колебаний . . . . .	96
5.1.7	Установившиеся колебания при частых поворотах шатуна . . . . .	99
5.1.8	Превращения энергии . . . . .	100

5.1.9	Электромагнитный аналог осциллятора . . . . .	102
5.2	Контрольные вопросы и задачи . . . . .	103
5.2.1	Резонансное возбуждение осциллятора . . . . .	103
5.2.2	Нерезонансные вынужденные колебания . . . . .	105
5.2.3	Приложение: сводка основных формул . . . . .	107
<b>6</b>	<b>Параметрическое возбуждение линейного осциллятора</b>	<b>108</b>
6.1	Общие положения . . . . .	108
6.1.1	О классификации колебаний . . . . .	108
6.1.2	Моделируемая физическая система . . . . .	109
6.1.3	Параметрическое возбуждение электромагнитных колебаний . . . . .	111
6.1.4	Условия параметрического резонанса . . . . .	112
6.2	Прямоугольная модуляция . . . . .	113
6.2.1	Порог параметрического возбуждения при прямоугольной модуляции мо- мента инерции . . . . .	113
6.2.2	Дифференциальное уравнение параметрических колебаний . . . . .	115
6.2.3	Частотные интервалы параметрического резонанса . . . . .	116
6.2.4	Спектр стационарных колебаний . . . . .	126
6.3	Контрольные вопросы и задачи . . . . .	127
6.3.1	Основной параметрический резонанс . . . . .	127
6.3.2	Ручное управление параметром . . . . .	129
6.3.3	Параметрические резонансы и интервалы неустойчивости высоких поряд- ков ( $n > 1$ ) . . . . .	130
<b>7</b>	<b>Параметрические колебания при плавной модуляции</b>	<b>133</b>
7.1	Теоретические сведения . . . . .	133
7.1.1	Физические причины параметрического резонанса и оценка порога воз- буждения . . . . .	133
7.1.2	Дифференциальное уравнение колебаний осциллятора для случая синусоидального движения грузов . . . . .	138
7.1.3	Интервалы параметрического резонанса . . . . .	139
7.1.4	Резонансы высших порядков . . . . .	142
7.2	Контрольные вопросы и задачи . . . . .	146
7.2.1	Основной параметрический резонанс . . . . .	146
7.2.2	Основной частотный интервал параметрического резонанса . . . . .	148
7.2.3	Параметрический резонанс второго порядка . . . . .	149

# Введение

Окружающий нас мир физических явлений чрезвычайно многообразен и сложен. Для познания этого мира мы вынуждены использовать упрощенные математические модели реальных физических систем. Необходимо, чтобы выбранная модель сохраняла наиболее важные и самые характерные черты изучаемого реального явления. Можно считать, что мы понимаем физическое явление, если мы в состоянии построить для него адекватную математическую модель.

В некоторых случаях в рамках принятой модели удастся получить точное или приближенное аналитическое решение поставленной задачи. К сожалению, точные аналитические решения редко встречаются в физике. В большинстве практически важных задач дифференциальные уравнения движения оказываются неинтегрируемыми. В таких случаях на помощь приходят численные методы решения уравнений, и проверить правильность своих представлений о реальном изучаемом явлении можно с помощью вычислительного эксперимента на компьютере. Вычислительный эксперимент — это метод изучения физического явления путем построения его математической модели и последующего численного исследования этой модели, позволяющего “проиграть” ее поведение в различных условиях. Компьютерное моделирование может оказать существенную помощь как исследователю, прокладывающему путь в неизведанное, так и студенту, осваивающему новые для себя знания.

Учебные моделирующие компьютерные программы представляют собой не просто электронное дополнение к традиционному учебнику, а своего рода настольную лабораторию для индивидуальной интерактивной работы учащегося с математической моделью изучаемого физического явления. В этом отношении моделирующие программы принципиально отличаются от традиционных компьютерных обучающе-контролирующих программ, так как именно при моделировании физических явлений по-настоящему используются предоставляемые компьютером уникальные возможности. Работа с моделирующими программами во многом сходна с небольшим научным исследованием, в котором студент играет активную роль.

В данном учебном пособии предлагается использовать возможности компьютерного моделирования для изучения колебаний — важного раздела курса физики. Без преувеличения можно сказать, что колебания окружают нас всюду. Благодаря световым и акустическим колебаниям мы получаем большую часть информации об окружающем нас мире. Электромагнитные колебания (в частности, световые, или оптические колебания) лежат в основе всех современных электронных средств передачи и обработки информации. Значение колебательных процессов в природе и технике трудно переоценить.

Колебания в различных динамических системах могут иметь совершенно разную физическую природу. Но в то же время все они имеют много общего. Изучение общих закономерностей всех колебательных процессов составляет предмет теории колебаний.

Для облегчения понимания общих закономерностей колебательных процессов целесообразно начинать их изучение с наиболее наглядных примеров, в которых движение доступно непосредственному зрительному восприятию. Это прежде всего такие знакомые всем механические колебательные системы, как груз на пружине и простой маятник. Электромагнитным аналогом

этих механических систем может служить замкнутая цепь, содержащая конденсатор и катушку индуктивности. Изменение во времени физических величин, характеризующих разные колебательные системы, описывается одинаковыми дифференциальными уравнениями. Разобравшись в происходящих на наших глазах колебаниях в механической системе, по аналогии легко освоиться с закономерностями колебаний в электромагнитном контуре, где все далеко не так наглядно.

Предлагаемые вниманию читателя компьютерные программы по существу представляют собой лабораторию для изучения колебаний с помощью математических моделей сравнительно простых физических систем. Подчеркнем, что программы предназначены для изучения физики, а не информатики. Для работы с ними не нужно уметь программировать. Если проводить параллель с экспериментальной физикой, то этим программам можно сопоставить готовые, тщательно отлаженные и настроенные лабораторные установки. Поскольку вся работа по программированию выполнена заранее, студент может сосредоточиться на физике изучаемых явлений, не отвлекаясь на чисто технические проблемы моделирования.

Для компьютерного моделирования в предлагаемых программах выбраны механические колебательные системы, потому что их движение можно непосредственно отобразить на экране. Моделирование позволяет получить наглядные, запоминающиеся иллюстрации изучаемых физических явлений во всей их динамике, воспроизвести тонкие детали явлений, ускользающие обычно при непосредственном наблюдении. Можно изменять временной масштаб, варьировать в широких пределах параметры и условия эксперимента, моделировать ситуации, недоступные для изучения в натурном эксперименте. Моделирующие программы позволяют строить графики временной зависимости описывающих систему переменных, получать фазовую траекторию (и сечения Пуанкаре), отображать энергетические превращения при колебаниях. Графический способ отображения результатов моделирования облегчает усвоение больших объемов получаемой информации. Графики зависимости всех переменных от времени выводятся на экран одновременно с отображением движения самой системы. Это придает графикам особую наглядность и облегчает понимание общих закономерностей изучаемых процессов.

В компьютерных программах моделируются разные способы возбуждения колебаний (собственные, вынужденные, параметрические колебания и автоколебания) в сравнительно простых линейных и нелинейных механических системах и их электромагнитных аналогах. В данном учебном пособии приводятся краткие теоретические сведения по изучаемым физическим явлениям, подробно описывается принятая математическая модель явления и условия ее применимости к реальным системам, формулируются задачи для предварительного самостоятельного решения и конкретные задания студентам для экспериментальной работы на компьютере. Пособие включает описание семи лабораторных работ, ориентированных на изучение общих закономерностей собственных, вынужденных и параметрических колебаний в физических системах с одной степенью свободы.

Структура и содержание учебного пособия и компьютерных программ допускают разную глубину изучения материала — от ознакомительного уровня с динамическими иллюстрациями, имеющими цель развить физическую интуицию, до углубленного уровня, приближающегося к небольшому научному исследованию, с самостоятельным выполнением студентом довольно сложных теоретических заданий и постановкой вычислительного эксперимента на компьютере. Этим обеспечивается возможность адаптации курса к условиям разных учебных заведений в зависимости от подготовленности студентов и отведенного учебным планом времени для изучения физики колебаний.

# Глава 1

## Собственные колебания линейного осциллятора

### 1.1 Теоретические сведения

#### 1.1.1 Общие положения

Состояние равновесия физической системы называется *устойчивым*, если при любом отклонении из равновесия возникает возвращающая, или *восстанавливающая* сила, которая стремится вернуть систему в равновесие. Если систему вывести из устойчивого равновесия каким-либо внешним воздействием и затем предоставить самой себе, в системе будут происходить колебания около устойчивого положения равновесия. Такие колебания, происходящие в отсутствие периодического внешнего воздействия на систему, в соответствии с общепринятой классификацией колебаний по способу возбуждения называют *собственными* или *свободными*. Любая система, способная совершать собственные колебания, называется *осциллятором*.

В отсутствие трения энергия, сообщенная системе при начальном возбуждении, остается неизменной в процессе последующих собственных колебаний. Поэтому в идеализированных консервативных системах собственные колебания продолжаются неограниченно долго. В консервативных системах с одной степенью свободы собственные колебания будут строго периодически, так как начальное состояние системы воспроизводится через равные промежутки времени. При наличии трения, неизбежного в любой реальной системе, собственные колебания постепенно затухают из-за диссипации (рассеяния) механической энергии, и в конце концов система приходит в состояние покоя в положении равновесия.

Если восстанавливающая сила пропорциональна отклонению из положения равновесия, то такая система в отсутствие трения, а также при наличии вязкого трения (сила трения пропорциональна скорости) описывается *линейным дифференциальным уравнением*. В отсутствие трения собственные колебания в линейной системе будут гармоническими (синусоидальными), а при слабом вязком трении — почти гармоническими (с экспоненциально убывающей амплитудой). Модель линейного осциллятора пригодна также для описания малых колебаний вблизи устойчивого положения равновесия и в нелинейных системах при условии, что зависимость возвращающей силы от смещения из положения равновесия может быть аппроксимирована линейной функцией вплоть до отклонений, соответствующих амплитуде рассматриваемых колебаний.

### 1.1.2 Модель линейного осциллятора

Хорошо известный пример линейной механической системы — это груз, подвешенный на упругой пружине, подчиняющейся закону Гука. Другой пример — торсионный пружинный осциллятор, представляющий собой уравновешенный ротор (маховик) со спиральной пружиной, закручивающейся при повороте маховика (рис. 1.1).

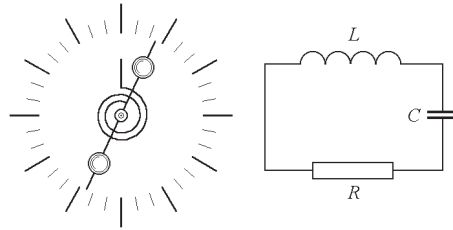


Рис. 1.1: Торсионный пружинный осциллятор и его электромагнитный аналог — последовательный  $RLC$ -контур.

Подобное устройство используется в механических карманных или наручных часах (балансовый механизм). Собственные крутильные колебания такого торсионного осциллятора и моделируются в данной компьютерной программе. Для удобства наблюдения крутильных колебаний в компьютерной программе можно выбрать опцию условного изображения системы (см. рис. 1.4, стр. 13), на котором вместо маховика в виде стержня с закрепленными на нем грузами показана только прикрепленная к ротору стрелка.

Электромагнитный аналог механического пружинного линейного осциллятора — последовательный  $LCR$ -контур — показан в правой части рис. 1.1.

### 1.1.3 Дифференциальное уравнение осциллятора

При повороте маховика из положения равновесия на угол  $\varphi$  прикрепленная к нему спиральная пружина (другой конец которой закреплен неподвижно) создает возвращающий момент  $N$ , пропорциональный углу отклонения:

$$N = -D\varphi. \quad (1.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $D$  называется жесткостью пружины. Угол отклонения маховика из положения равновесия измеряется по неподвижной шкале при помощи стрелки, прикрепленной к маховику. В положении равновесия стрелка указывает на нулевое деление шкалы. Угол  $\varphi$  измеряется в радианах, хотя в моделирующей программе для удобства наблюдения шкала проградуирована в более привычных для нас градусах.

Применяя к движению маховика с моментом инерции  $J$  основное уравнение динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, получаем следующее дифференциальное уравнение собственных колебаний торсионного пружинного осциллятора:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (1.2)$$

где введено обозначение  $\omega_0^2 = D/J$ . Общее решение уравнения (1.2) представляет собой простое гармоническое колебание:

$$\varphi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \delta_0). \quad (1.3)$$



Амплитуда  $A_0$  и начальная фаза  $\delta_0$  в (1.2) зависят от *начальных условий*, т. е. от угла отклонения  $\varphi(0)$  и угловой скорости  $\dot{\varphi}(0)$  при  $t = 0$ . Другими словами, эти характеристики колебательного движения зависят от способа возбуждения колебаний. Колебания происходят с угловой частотой  $\omega_0$ , квадрат которой пропорционален жесткости пружины  $D$  и обратно пропорционален моменту инерции  $J$  маховика. Частота  $\omega_0$  и соответствующий ей период  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , в отличие от амплитуды и начальной фазы, не зависят от начальных условий — они целиком определяются свойствами самого осциллятора, т. е. значениями параметров осциллятора  $D$  и  $J$ . Собственные колебания линейного осциллятора всегда происходят с одной и той же собственной частотой  $\omega_0$  независимо от способа возбуждения. Независимость частоты собственных колебаний от начальных условий, а следовательно от амплитуды (и энергии) колебаний называют *изохронностью* линейного осциллятора.

При наличии силы вязкого трения в дифференциальном уравнении будет присутствовать тормозящий момент этой силы, пропорциональный угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ :

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (1.4)$$

где *постоянная затухания*  $\gamma$  характеризует интенсивность вязкого трения в системе. Постоянная затухания  $\gamma$ , как и  $\omega_0$ , имеет размерность частоты.

Уравнения (1.2) и (1.4) — это *линейные* дифференциальные уравнения, потому что искомая функция  $\varphi(t)$ , как и ее производные по времени, входят в эти уравнения в первой степени. Эти уравнения *однородны*, так как искомая функция или ее производные присутствуют в одинаковой степени во всех членах уравнения. Однородность уравнений отражает отсутствие возбуждающей внешней силы. Таким образом, собственные колебания моделируемой системы описываются однородным линейным уравнением.

Как и любое однородное уравнение, уравнения (1.2) и (1.4) имеют тривиальное нулевое решение  $\varphi(t) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(t) = 0$ . Такое решение соответствует отсутствию начального возбуждения (нулевым начальным условиям) и описывает осциллятор, который постоянно находится в покое в положении равновесия. Собственные колебания осциллятора могут возникнуть только в результате некоторого начального возбуждения.

Если трение настолько слабо, что  $\gamma < \omega_0$ , общее решение уравнения (1.4) имеет колебательный характер и может быть представлено в следующем виде:

$$\varphi(t) = A_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \delta_0). \quad (1.5)$$

Это решение описывает *затухающие колебания*, медленно меняющаяся амплитуда которых  $A_0 \exp(-\gamma t)$  экспоненциально убывает со временем. Начальное значение амплитуды  $A_0$  и начальная фаза  $\delta_0$  определяются из начальных условий. Частота  $\omega_1$  периодического (косинусоидального) сомножителя в (1.5) дается следующим выражением:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}. \quad (1.6)$$

В случае слабого трения, когда постоянная затухания  $\gamma$  мала по сравнению с величиной  $\omega_0$ , характеризующей собственную частоту в отсутствие трения, частота  $\omega_1$  косинусоидального сомножителя в (1.5) очень близка к  $\omega_0$ :

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \gamma^2/(2\omega_0). \quad (1.7)$$

Относительное отклонение частоты затухающих колебаний  $\omega_1$  от собственной частоты осциллятора  $(\omega_0 - \omega_1)/\omega_0$  пропорционально квадрату малого параметра  $\gamma/\omega_0$ .

Графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости для затухающих колебаний показаны на рисунке 1.2 для случая возбуждения собственных колебаний начальным отклонением ротора из положения равновесия при нулевой начальной скорости.



Рис. 1.2: Графики затухающих колебаний при  $Q = 18.1$ .

### 1.1.4 Время затухания и добротность $Q$

В условиях слабого и умеренного трения зависящий от времени множитель  $A_0 \exp(-\gamma t)$  в выражении (1.5) можно рассматривать как постепенно уменьшающуюся амплитуду затухающих колебаний. Спустя промежуток времени  $\tau = 1/\gamma$ , эта амплитуда приблизительно в  $e \approx 2.72$  раз меньше своего начального значения. Это время  $\tau$  называется *временем затухания* или *временем жизни* колебаний. Хотя формально колебания продолжаются бесконечно долго, характерное время  $\tau$  условно можно рассматривать как длительность процесса затухания колебаний: за конечное число таких интервалов амплитуда становится меньше любого сколь угодно малого значения.

При малом трении, когда  $\gamma \ll \omega_0$ , или  $\tau \gg T_0 = 2\pi/\omega_0$  (условие слабого затухания), осциллятор совершает большое число  $N$  циклов собственных колебаний в течение времени жизни  $\tau$ :  $N = \tau/T_0 \gg 1$ . Последовательные максимальные отклонения из положения равновесия убывают в геометрической прогрессии. В самом деле, пусть  $\varphi_n$  есть максимальное отклонение ротора при  $n$ -м колебании. Тогда

$$\varphi_{n+1}/\varphi_n \approx \exp(-\gamma T_0) \approx 1 - \gamma T_0. \quad (1.8)$$

Таким образом, отношение последовательных членов (знаменатель) этой бесконечно убывающей геометрической прогрессии меньше единицы на величину  $\gamma T_0 = T_0/\tau \ll 1$ .

Для характеристики быстроты затухания колебаний используют, наряду с размерной постоянной затухания  $\gamma$ , также безразмерный *логарифмический декремент затухания*, определяемый как натуральный логарифм отношения последовательных максимальных отклонений в одну сторону:

$$d = \ln(\varphi_n/\varphi_{n+1}) = \gamma T = T/\tau. \quad (1.9)$$

Обратная логарифмическому декременту величина  $1/d = \tau/T$  — это число циклов колебаний, совершаемых осциллятором за время затухания  $\tau$ .

Другая эквивалентная логарифмическому декременту безразмерная величина, используемая для характеристики быстроты затухания колебаний, это *добротность*  $Q$ , определяемая соотношением:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \pi \frac{\tau}{T_0}. \quad (1.10)$$

Число циклов, на протяжении которых размах колебаний осциллятора уменьшается в  $e \approx 2.72$  раза, равно деленному на  $\pi \approx 3.14$  значению его добротности. Число колебаний  $N_{1/2}$ , на протяжении которых амплитуда уменьшается вдвое, выражается через добротность следующим соотношением:

$$N_{1/2} = (\ln 2/\pi)Q = 0.22 Q = Q/4.53. \quad (1.11)$$

### 1.1.5 Неколебательное движение системы

Когда параметры системы удовлетворяют условию  $\gamma \geq \omega_0$  (условие сильного затухания), осциллятор после начального возбуждения возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. В этом движении ротор либо асимптотически приближается к положению равновесия с одной стороны, либо только один раз пересекает среднее положение и затем приближается к нему с другой стороны. Последний случай возможен, если при возбуждении ротор получает достаточно большую начальную скорость в направлении положения равновесия.

Если  $\gamma = \omega_0$ , затухание осциллятора называют *критическим*. В этом случае общее решение дифференциального уравнения (1.4) принимает следующий вид:

$$\varphi(t) = (C_1 t + C_2) \exp(-\gamma t), \quad (1.12)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы, значения которых определяются из начальных условий. Например, если ротор, первоначально находившийся в положении равновесия ( $\varphi(0) = 0$ ), в результате толчка получает начальную скорость  $\dot{\varphi}(0) = \Omega_0$ , то  $C_1 = \Omega_0$ ,  $C_2 = 0$ , и дальнейшее движение ротора описывается функцией

$$\varphi(t) = \Omega_0 t \exp(-\gamma t). \quad (1.13)$$

Графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости для осциллятора с критическим затуханием, движение которого возбуждается начальным толчком из положения равновесия, показаны на рис. 1.3.

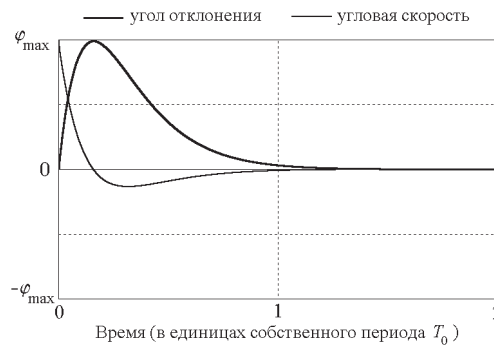


Рис. 1.3: Графики угла отклонения и угловой скорости при критическом затухании.

Замечательная особенность системы с критическим затуханием заключается в том, что после начального возбуждения она возвращается в состояние покоя в положении равновесия быстрее, чем при любом другом значении постоянной затухания  $\gamma$  (при данном значении  $\omega_0$ ). Как видно из уравнения (1.10), критическому затуханию, т. е. случаю ( $\gamma = \omega_0$ ), соответствует добротность  $Q = 0.5$ .

Неколебательное движение при очень сильном трении (при сверхкритическом затухании), когда  $\gamma > \omega_0$ , можно представить в виде суперпозиции двух убывающих экспоненциальных функций, характеризуемых различными постоянными времени  $\tau_1 = -1/\alpha_1$  и  $\tau_2 = -1/\alpha_2$  в показателях экспонент:

$$\varphi(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \quad \text{где } \alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (1.14)$$

Значения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  из находятся из начальных условий, т. е. определяются способом возбуждения системы. В измерительных приборах таких как гальванометры затухание вводится преднамеренно для того чтобы преодолеть трудности считывания показаний при осциллирующей стрелке. Демпфирование называют *критическим*, если подвижная система прибора приходит в равновесие и успокаивается за кратчайшее время, не совершая колебаний. При недостаточном демпфировании прибора ( $Q > 0.5$ ) перед остановкой стрелка совершает колебания. В случае передемпфированного прибора ( $Q < 0.5$  — сверхкритическое затухание) стрелка не совершает колебаний, но тем не менее для ее прихода в положение равновесия требуется большее время по сравнению со случаем критического демпфирования.

Другой пример преднамеренного введения затухания, близкого к критическому — применение гидравлических амортизаторов в упругой подвеске кузова автомобиля. При неисправных амортизаторах после каждого бугорка или ямки на дороге кузов автомобиля совершает колебания, неприятные для пассажиров и опасные с точки зрения надежности сцепления колес с дорогой.

### 1.1.6 Фазовая диаграмма линейного осциллятора

Механическое состояние торсионного осциллятора определяется двумя динамическими переменными: *обобщенной координатой* (в данном случае углом отклонения)  $\varphi$  и *обобщенной скоростью* (угловой скоростью)  $\dot{\varphi}$ , или, что эквивалентно, углом отклонения  $\varphi$  и угловым моментом (моментом импульса)  $J\dot{\varphi}$ .

Механическое состояние динамической системы в любой момент времени можно наглядно изобразить с помощью точки (*изображающей точки*) в фазовом пространстве. Для системы с одной степенью свободы, положение которой определяется единственной координатой (в случае торсионного осциллятора это угол отклонения), фазовое пространство динамических переменных двумерно, т. е. представляет собой плоскость. На такой *фазовой плоскости* по оси абсцисс отложена обобщенная координата (угол отклонения)  $\varphi$ , а по оси ординат — угловая скорость  $\dot{\varphi}$ . Очень наглядное графическое представление всему процессу эволюции механического состояния системы дает *фазовая диаграмма*, т. е. линия, которую изображающая точка вычерчивает на фазовой плоскости. Фазовая диаграмма для торсионного осциллятора — это график зависимости угловой скорости  $\dot{\varphi}$  (или момента импульса  $J\dot{\varphi}$ ) от угла отклонения  $\varphi$ .

Если система совершает *периодическое движение*, изображающая точка на фазовой плоскости описывает *замкнутую кривую*, двигаясь по ней в направлении по часовой стрелке. Фазовая траектория периодического движения замкнута, потому что система возвращается в исходное механическое состояние после каждого цикла колебаний.

В моделирующей программе (при работе в окне «Фазовая траектория», рис. 1.4) выбрано такое взаимное расположение фазовой плоскости и графиков зависимости угла отклонения и

угловой скорости от времени, чтобы было удобно в каждый момент времени сопоставлять движущуюся по фазовой плоскости изображающую точку с выводимыми одновременно на графики значениями динамических переменных (угла отклонения и угловой скорости). Для этого направления соответствующих осей и масштабы по ним на фазовой диаграмме и на графиках временной зависимости выбраны одинаковыми, а ось времени на графике угла отклонения направлена вниз.

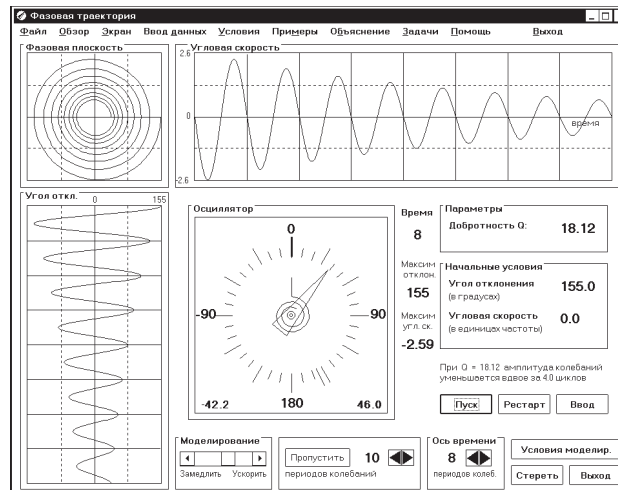


Рис. 1.4: Взаимное расположение фазовой плоскости и графиков угла отклонения и угловой скорости на экране.

Совокупность фазовых траекторий, соответствующих разным способам возбуждения (разным начальным условиям) при неизменных параметрах системы образует ее *фазовый портрет*. Через каждую точку фазовой плоскости проходит, вообще говоря, только одна фазовая траектория: если эту точку выбрать в качестве начального состояния системы, дальнейшее движение системы будет определено однозначно в соответствии с единственностью решения задачи Коши для дифференциального уравнения системы. Это движение и будет происходить вдоль фазовой траектории, проходящей через данную точку фазовой плоскости. Другими словами, фазовые траектории системы не пересекаются. Исключение составляют лишь отдельные, изолированные точки фазовой плоскости. Такие точки, через которые проходит более одной фазовой траектории или не проходит ни одной траектории, называются *особыми*. Примеры особых точек будут рассмотрены ниже. Фазовый портрет (вместе с совокупностью особых точек) дает очень наглядное графическое представление о возможных движениях изучаемой динамической системы.

Фазовая траектория гармонических колебаний (например, собственных колебаний линейного осциллятора в отсутствие трения) представляет собой эллипс (или окружность при соответствующем выборе масштаба). Точки, где фазовая траектория пересекает ось абсцисс (в этих точках поворота скорость изменяет знак), соответствуют максимальным отклонениям ротора из положения равновесия.

Фазовый портрет консервативного линейного осциллятора образован набором геометрически подобных эллипсов с общим центром в начале координат фазовой плоскости. Этот центр изображает состояние покоя осциллятора в положении равновесия. Так как через начало координат не проходит ни одна из фазовых траекторий (все траектории окружают эту точку), такая точка фазовой плоскости называется особой точкой типа *центр*.

Как уже отмечалось, период гармонических колебаний целиком определяется параметрами физической системы, а именно значениями жесткости пружины  $D$  и моментом инерции ротора

*J.* В отличие от амплитуды и начальной фазы, период не зависит от начальных условий, т. е. от способа возбуждения колебаний. Это свойство линейного осциллятора называется *изохронностью*. Благодаря свойству изохронности изображающие точки обходят эллипсы разных размеров на фазовом портрете осциллятора (соответствующие разным амплитудам колебаний осциллятора с данными параметрами) в течение одного и того же времени  $T_0$ .

В присутствии сравнительно слабого вязкого трения ( $\gamma < \omega_0$ ) максимальные отклонения, как и максимальные значения угловой скорости, постепенно уменьшаются с каждым последующим циклом колебаний. Поэтому фазовая траектория собственных колебаний благодаря трению трансформируется из замкнутой кривой (эллипса или окружности) для консервативного осциллятора в постепенно скручивающуюся спираль, сжимающиеся витки которой наматываются вокруг фокальной точки, расположенной в начале координат фазовой плоскости. В этом случае начало координат из особой точки типа центр превращается в особую точку типа *фокус*. Для семейства фазовых траекторий фокус представляет собой *аттрактор* (от англ. *attract* — притягивать): все фазовые траектории, независимо от того, где они начинаются, асимптотически приближаются к фокусу, совершая вокруг него бесконечное число оборотов по все более сжимающимся виткам (левая часть рис. 1.5).

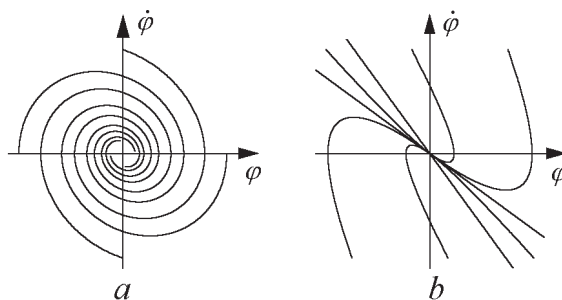


Рис. 1.5: Фазовый портрет затухающего линейного осциллятора (a) и системы со сверхкритическим затуханием  $\gamma > \omega_0$  (b).

В случае сравнительно сильного вязкого трения ( $\gamma > \omega_0$ ) аттрактор фазовых траекторий из фокуса превращается в особую точку типа *узел*: все фазовые траектории неколебательных движений приближаются к этому узлу напрямую без наматывания, не совершив и одного оборота. Фазовый портрет передемпфированной системы показан в правой части рис. 1.5. Все фазовые траектории асимптотически приближаются к началу координат, где у них общая касательная  $\dot{\varphi} = \alpha_1 \varphi$  с наклоном  $\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  (за исключением одной прямолинейной фазовой траектории  $\dot{\varphi} = \alpha_2 \varphi$ ). При специфических начальных условиях вида  $\dot{\varphi}(0) = \alpha_1 \varphi(0)$  изображающая точка движется к узлу непосредственно вдоль этой прямолинейной фазовой траектории (общей касательной всех траекторий). Другая прямолинейная фазовая траектория  $\dot{\varphi} = \alpha_2 \varphi$  соответствует движению при начальных условиях типа  $\dot{\varphi}(0) = \alpha_2 \varphi(0)$ .

Таким образом, на фазовом портрете линейного осциллятора имеется только одна особая точка: начало координат фазовой плоскости, где обе динамические переменные  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  равны нулю. Как уже отмечалось, этой точке соответствует состояние покоя в положении равновесия. При  $\gamma = 0$  это точка типа центр, через которую не проходит ни одна траектория. При  $\gamma < \omega_0$  это фокус, а при  $\gamma > \omega_0$  это узел фазовых траекторий.

Особые точки типа фокус и узел дают примеры аттракторов, к которым притягиваются все фазовые траектории. В дальнейшем, при изучении движения жесткого маятника в поле тяжести, мы встретимся с еще одним типом особых точек, возможных в нелинейных консервативных системах, а именно, с особой точкой типа *седло*, через которую проходят две фазовые траектории.

### 1.1.7 Превращения энергии

Полная энергия  $E$  торсионного пружинного маятника представляет собой сумму потенциальной энергии  $E_{\text{pot}}$  упруго деформированной пружины и кинетической энергии  $E_{\text{kin}}$  вращающегося маховика:

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}D\varphi^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2. \quad (1.15)$$

Собственные колебания в отсутствие трения характеризуются обратимыми полными превращениями энергии одного из этих видов в другой и обратно. В точках максимального отклонения от положения равновесия кинетическая энергия равна нулю, и полная энергия осциллятора представляет собой потенциальную энергию деформированной пружины. Спустя четверть периода колебаний ротор проходит через положение равновесия, где потенциальная энергия пружины равна нулю, и полная энергия осциллятора представляет собой кинетическую энергию вращающегося маховика. В течение следующей четверти периода происходит обратное превращение энергии: кинетическая энергия превращается в потенциальную энергию упругой деформации. Таким образом, два вида энергии совершают колебания в противофазе друг с другом на частоте  $2\omega_0$ , т. е. на удвоенной собственной частоте  $\omega_0$  колебаний самого осциллятора.

Описанный выше полный обмен между двумя видами энергии характерен для консервативной системы, в которой энергетические превращения обратимы. Сумма кинетической и потенциальной энергий, т. е. полная энергия  $E$  осциллятора, имеет одно и то же значение в любой момент времени, совпадающее с максимальными значениями каждого из этих видов энергии:

$$E = \frac{1}{2}DA_0^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2A_0^2. \quad (1.16)$$

Полная энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды его колебаний. Средние за период колебаний значения кинетической и потенциальной энергии осциллятора, совершающего собственные колебания, равны друг другу и составляют половину неизменного значения полной энергии:

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = \langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2}E = \frac{1}{4}DA_0^2 = \frac{1}{4}J\omega_0^2A_0^2. \quad (1.17)$$

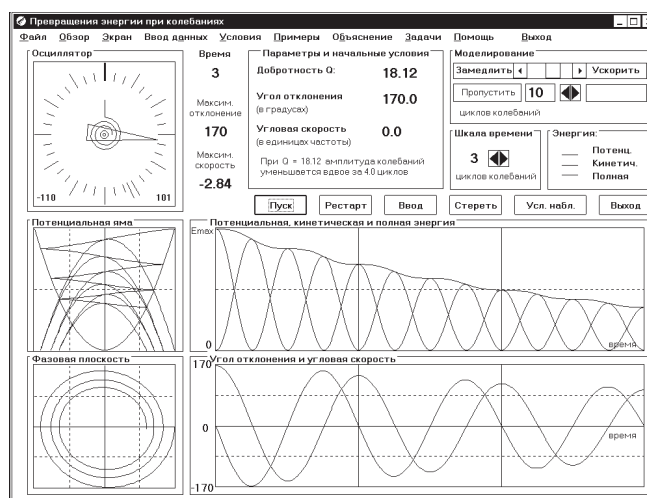


Рис. 1.6: Превращения энергии при затухающих колебаниях.

При наличии трения взаимные превращения потенциальной и кинетической энергий становятся частично необратимыми из-за рассеяния (диссипации) механической энергии. Графики энергетических превращений при затухающих колебаниях показаны на рис. 1.6. Отметим, что диссипация энергии происходит неравномерно на протяжении цикла колебаний. Скорость диссипации  $-dE/dt$  максимальна при движении ротора в окрестности положения равновесия, а именно в те моменты времени, когда максимальна величина угловой скорости маховика. В самом деле, скорость рассеяния энергии из-за вязкого трения  $-dE/dt = -N_{\text{fr}}\dot{\varphi}$ , где  $N_{\text{fr}} \propto \dot{\varphi}$ , пропорциональна квадрату угловой скорости и тем самым мгновенному значению кинетической энергии  $J\dot{\varphi}^2/2$  маховика. Вблизи точек поворота, когда маховик изменяет направление вращения и его угловая скорость обращается в нуль, диссипации энергии не происходит. Утверждение об экспоненциальном характере убывания энергии затухающего осциллятора, которое часто встречается в учебниках, на самом деле справедливо не для мгновенного, а только для усредненного по периоду колебаний значения полной энергии осциллятора:

$$\langle E(t) \rangle = E_0 \exp(-2\gamma t) = E_0 \exp(-2t/\tau). \quad (1.18)$$

Из (1.18) видно, что время затухания средней энергии осциллятора (время, в течение которого среднее за период значение полной энергии убывает в  $e \approx 2.72$  раза) равно  $\tau/2$ , т. е. вдвое меньше времени затухания амплитуды колебаний.

Отмеченную неравномерность рассеяния полной энергии на протяжении цикла колебаний легко проследить по графикам на рис. 1.6 (представляющему собой копию экрана при выборе в программе окна «Превращения энергии»), где вместе с графиками потенциальной, кинетической и полной энергий показаны также (в том же временном масштабе) графики угла отклонения и угловой скорости (а также потенциальная яма осциллятора и фазовая траектория).

### 1.1.8 Электромагнитный аналог линейного механического осциллятора

Колебания заряда  $q$  на пластинах конденсатора в электрическом контуре, состоящем из последовательно соединенных конденсатора  $C$ , катушки индуктивности  $L$  и резистора  $R$  (см. рис. 1.1, стр. 8), описываются таким же дифференциальным уравнением (1.4), что и колебания угла отклонения  $\varphi$  механического торсионного осциллятора. В самом деле, алгебраическая сумма напряжений  $U_C$ ,  $U_L$ , и  $U_R$  на отдельных элементах такой замкнутой последовательной электрической цепи квазистационарного тока (т. е. цепи, во всех элементах которой ток в данный момент одинаков) должна быть равна нулю для любого момента времени:

$$U_L + U_R + U_C = 0. \quad (1.19)$$

Подставляя в (1.19)  $U_C = q/C$ ,  $U_L = LdI/dt = L\ddot{q}$  и  $U_R = IR = R\dot{q}$ , получаем дифференциальное уравнение второго порядка для заряда на пластинах конденсатора  $q(t)$ :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0. \quad (1.20)$$

Вводя обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\gamma = \frac{R}{L}, \quad (1.21)$$

перепишем это уравнение в виде

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (1.22)$$

что совпадает с уравнением (1.4 для угла отклонения  $\varphi(t)$  ротора механического осциллятора. Таким образом, собственные электромагнитные колебания в последовательном  $LCR$ -контуре и



колебания механического пружинного осциллятора, несмотря на совершенно разную физическую природу происходящих процессов, подчиняются одинаковым закономерностям. В колебательном контуре катушка индуктивности  $L$  служит аналогом инертного элемента (маховика) механической системы, а конденсатор  $C$  — аналогом упругого элемента (спиральной пружины). Роль вязкого трения играет сопротивление резистора  $R$  электрическому току.

Аналогия между механической и электромагнитной системами распространяется и на происходящие в них энергетические превращения. Энергия электрического поля  $E_C = q^2/2C$  в конденсаторе колебательного контура полностью аналогична потенциальной энергии  $E_{\text{pot}} = D\varphi^2/2$  деформированной пружины. Энергия магнитного поля катушки  $E_L = LI^2/2$  при протекании в ней электрического тока полностью аналогична кинетической энергии  $E_{\text{kin}}$  вращающегося маховика. При электромагнитных колебаниях в контуре происходят взаимные превращения энергии электрического поля в конденсаторе и энергии магнитного поля в катушке. В отсутствие сопротивления (при  $R = 0$ ) полная энергия  $E_C + E_L$  остается неизменной. При наличии электрического сопротивления превращения энергии из одного вида в другой частично необратимы: рассеяние энергии в резисторе (выделение джоулевой теплоты  $I^2R = R\dot{q}^2$ ) приводит к экспоненциальному затуханию электромагнитных колебаний в контуре подобно тому, как вязкое трение в механическом осцилляторе приводит к затуханию собственных механических колебаний.

### 1.1.9 Компьютерное моделирование колебаний линейного осциллятора

Компьютерная программа, моделирующая поведение линейного осциллятора, выполняет *численное интегрирование* дифференциального уравнения (1.4). Несмотря на то, что это уравнение линейное и имеет аналитическое решение (1.5), при компьютерном моделировании это решение не используется (за исключением лишь определения максимальных значений угла отклонения и угловой скорости, необходимых для выбора оптимальных масштабов перед построением графиков). Совпадение наблюдаемых результатов численного интегрирования с аналитическими предсказаниями может служить для проверки качества используемого алгоритма (метод Рунге-Кутты четвертого порядка). Такая проверка делает убедительными результаты численного моделирования нелинейных систем (для которых не существует аналитического решения, да и наша интуиция отказывается работать) в последующих программах комплекса, поскольку и там использован тот же самый численный метод.

При численном моделировании колебаний линейного осциллятора выбирается естественная для него единица времени, а именно период собственных колебаний в отсутствие трения  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Поэтому в данной модели нет необходимости задавать ни момент инерции маховика  $J$ , ни жесткость пружины  $D$ , ни даже их отношение  $D/J = \omega_0^2$ . Таким образом, в принятой модели осциллятор полностью характеризуется единственным физическим параметром  $\gamma/\omega_0$  — безразмерным отношением коэффициента затухания к собственной частоте, или, как это сделано в программе, более распространенной эквивалентной характеристикой — добротностью  $Q = \omega_0/2\gamma$ , значение которой обратно пропорционально коэффициенту затухания.

Угол  $\varphi$  отклонения ротора от положения равновесия при численном моделировании измеряется в радианах (но шкала и графики  $\varphi(t)$  для удобства проградуированы в угловых градусах), а угловая скорость  $\dot{\varphi}$  ротора измеряется в единицах собственной круговой частоты  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ . При задании начальных условий угловую скорость ротора нужно также выражать в единицах  $\omega_0$  (а начальный угол отклонения — в градусах).

## 1.2 Контрольные вопросы и задачи

### 1.2.1 Колебания в отсутствие трения

**1.1 Начальные условия и форма графиков.** В отсутствие трения линейный осциллятор совершает незатухающее гармоническое колебание, характеризуемое чисто синусоидальной зависимостью обобщенной координаты (угла отклонения) и обобщенной скорости (угловой скорости) от времени.

(а) Какой тип начальных условий приводит к чисто косинусоидальной зависимости угла отклонения от времени (т. е. к зависимости, выражаемой функцией  $\varphi_0 \cos \omega_0 t$ )?

(б) Допустим, что нужно получить колебания с угловой амплитудой  $90^\circ$ . Каким должно быть начальное отклонение  $\varphi(0) = \varphi_0$  при нулевой начальной скорости ротора  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ? Какую начальную угловую скорость  $\dot{\varphi}(0) = \Omega$  нужно сообщить ротору в положении равновесия, чтобы получить колебания той же амплитуды  $90^\circ$ ? Напоминаем, что начальную угловую скорость  $\Omega$  при вводе нужно выражать в единицах собственной частоты  $\omega_0$ . Проверьте Ваш расчет с помощью моделирующего эксперимента на компьютере.

(в) Какую начальную угловую скорость  $\dot{\varphi}(0) = \Omega$  нужно сообщить ротору, отклоненному на угол  $45^\circ$  из положения равновесия, чтобы получить колебания той же амплитуды  $90^\circ$ ?

**1.2 Максимальное отклонение и сохранение энергии.** Предположим, что осциллятор возбуждается из положения равновесия начальным толчком, который сообщает ротору угловую скорость  $\Omega = 2\omega_0$ . С помощью закона сохранения энергии рассчитайте максимальный угол, на который отклонится ротор из положения равновесия. Результат расчета проверьте в моделирующем эксперименте на компьютере. Обратите внимание на то, что компьютерная программа выполняет численное интегрирование дифференциального уравнения движения, «ничего не зная» о законе сохранения энергии.

**1.3 Фазовая траектория и начальные условия.** Сопоставьте движение изображающей точки вдоль фазовой траектории консервативного осциллятора с графиками зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости. Расположение графиков на экране компьютера (когда открыто окно «Фазовая траектория») особенно удобно для такого сопоставления.

(а) Как изменится фазовая траектория, если изменить начальные условия? Зависит ли направление движения изображающей точки по фазовой траектории от начальных условий?

(б) Возможно ли, чтобы фазовые траектории для разных начальных условий оказались совпадающими? Если да, то каким требованиям должны удовлетворять начальные условия для такого совпадения фазовых траекторий?

#### 1.4 Эллиптическая и круговая формы фазовой траектории линейного осциллятора.

(а) Докажите аналитически, что фазовая траектория консервативного линейного осциллятора представляет собой эллипс с центром в начале координат фазовой плоскости. Воспользуйтесь общим решением дифференциального уравнения (1.2), выражаемым соотношением (1.3). Чему равны полуоси этого эллипса?

(б) Покажите, что эллиптическая форма фазовой траектории линейного консервативного осциллятора непосредственно следует из закона сохранения энергии.

(в) При каком масштабе по оси ординат фазовой плоскости (по оси угловой скорости) фазовая траектория будет окружностью? С какой угловой скоростью движется изображающая точка по этой окружности при колебаниях осциллятора? Зависит ли угловая скорость точки от энергии осциллятора?

**1.5 Фазовая траектория и энергетические превращения.** Сопоставьте движение изображающей точки по фазовой траектории с графиком зависимости потенциальной энергии от угла

отклонения ротора. Взаимное расположение фазовой плоскости и потенциальной ямы осциллятора в окне «Превращения энергии» компьютерной программы (см. рис. 1.6) особенно удобно для выполнения такого сопоставления. Особое внимание обратите на положение точек максимального отклонения в параболической потенциальной яме и на фазовой плоскости. Почему в этих точках полная энергия осциллятора совпадает с потенциальной энергией пружины? Чему равны значения потенциальной и кинетической энергий в точках поворота и в положении равновесия при колебаниях, возбуждаемых начальными условиями  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = \Omega$ ? Чему равны значения угла отклонения  $\varphi_{\max}$  в точках поворота?

**1.6 Форма и частота колебаний кинетической и потенциальной энергий.** Изучите графики зависимости от времени кинетической и потенциальной энергий осциллятора, совершающего колебания в отсутствие трения.

(а) Что можно сказать о максимальных и средних значениях каждого из видов энергии? Сопоставьте эти графики с графиками угла отклонения и угловой скорости. Взаимное расположение графиков в окне «Превращения энергии» особенно удобно для такого сопоставления.

(б) С какой частотой и в каких пределах происходят колебания каждого из видов энергии?

## 1.2.2 Затухающие собственные колебания

**2.1 Последовательность максимальных отклонений.** При действии слабой силы вязкого трения последовательность максимальных отклонений осциллятора, совершающего затухающие собственные колебания, образует убывающую геометрическую прогрессию: каждое максимальное отклонение равно предыдущему, умноженному на одно и то же число, меньшее единицы:  $\exp(-\gamma T_0) \approx 1 - \gamma T_0$  [см. (1.10)].

(а) Рассчитайте значение добротности осциллятора, при котором размах колебаний уменьшается ровно вдвое через каждые два цикла колебаний. Введите это значение и проверьте закономерность убывания максимальных отклонений в моделирующем эксперименте. Зависит ли эта закономерность от способа возбуждения собственных колебаний (т. е. от начальных условий)?

(б) Оцените, на сколько процентов увеличивается период колебаний при этом значении добротности (по сравнению с периодом  $T_0$  в отсутствие трения). Можно ли заметить такое увеличение периода колебаний в моделирующем эксперименте? Метки времени на графиках соответствуют целому числу периодов  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  в отсутствие трения.

**2.2\* Максимальное отклонение после возбуждения начальным толчком.** Представьте, что колебания осциллятора возбуждаются начальным толчком, в результате которого маховик в положении равновесия получает угловую скорость  $2\omega_0$ .

(а) Рассчитайте первое максимальное отклонение маховика, если добротность осциллятора  $Q = 5$ .

(б) Каким будет следующее максимальное отклонение в противоположную сторону? Проверьте свои ответы в моделирующем эксперименте на компьютере.

**2.3\*\* Сложные начальные условия.** Пусть колебания осциллятора возбуждаются сообщением ротору некоторой начальной скорости в отклоненном из равновесия положении.

(а) Допустим, что начальное отклонение ротора составляет 155 градусов, а начальная угловая скорость равна  $2\omega_0$ . Добротность осциллятора  $Q = 5$ . Рассчитайте максимальное отклонение маховика из положения равновесия при колебаниях.

(б) Рассчитайте максимальное отклонение маховика из положения равновесия для осциллятора с  $Q = 5$  при том же начальном отклонении в 155 градусов, но при начальной скорости  $-2\omega_0$ .

(в) Пусть начальное отклонение ротора из положения равновесия составляет  $-155$  градусов. Какой должна быть начальная скорость, чтобы ротор отклонился от положения равновесия на такой же угол  $155$  градусов в противоположную сторону? Добротность осциллятора  $Q = 20$ .

**2.4\* Фазовая траектория затухающих колебаний.** Фазовая траектория затухающих собственных колебаний при  $Q > 0.5$  представляет собой спираль, которая образована бесконечным числом постепенно сжимающихся витков вокруг фокуса, расположенного в начале координат фазовой плоскости. Этот фокус соответствует состоянию покоя в положении равновесия, к которому осциллятор асимптотически приближается.

(а) По какому закону уменьшается радиус этих витков по мере того, как фазовая траектория приближается к фокусу?

(б) Изменяется ли промежуток времени, в течение которого изображающая точка совершает один оборот вдоль очередного витка спирали, по мере уменьшения размера витков?

**2.5\* Рассеяние механической энергии.** Сравните преобразования кинетической энергии в потенциальную и обратно для случаев незатухающих колебаний в отсутствие трения и колебаний, затухающих под действием вязкого трения.

(а) При каком значении добротности осциллятора полная энергия уменьшается вдвое за два полных колебания? Сколько циклов колебаний должен совершить такой осциллятор, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась вдвое? Проверьте ваши теоретические предсказания в моделирующем эксперименте.

(б) Почему рассеяние механической энергии на протяжении одного цикла колебаний происходит неравномерно? В какие моменты скорость диссипации энергии максимальна? В какие моменты эта скорость минимальна?

### 1.2.3 Неколебательное движение осциллятора

При достаточно сильном вязком трении ( $Q \leq 0.5$ ) ротор осциллятора после начального возбуждения возвращается в положение равновесия без колебаний. В моделирующем эксперименте мы можем наблюдать, как в таких условиях стрелка асимптотически приближается с одной стороны к нулевому делению шкалы.

**3.1\* Неколебательное движение при критическом затухании.** Исследуйте теоретически и экспериментально случай критического затухания, когда  $\gamma = \omega_0$ .

(а) Почему именно критическое затухание предпочтительно для измерительных приборов типа гальванометра с подвижной катушкой? Почему такие же требования предъявляются к системе упругой подвески кузова автомобиля?

(б) Рассчитайте максимальный угол отклонения из равновесия, если система с  $Q = 0.5$  получает в положении равновесия начальную скорость  $\Omega = 5\omega_0$ .

(в) Сколько времени продолжается движение стрелки до этой точки максимального отклонения? Проверьте свои результаты в моделирующем эксперименте на компьютере. Обратите внимание, что стрелка приближается к положению равновесия с одной стороны, не пересекая средней точки шкалы.

### 3.2 Критическое затухание.

(а) Проверьте экспериментально, что значение  $Q = 0.5$  ( $\gamma = \omega_0$ ) действительно соответствует критическому затуханию. Чтобы убедиться в этом, покажите, что при немного большем значении  $Q$  (скажем, при  $Q = 0.51$ ) стрелка возмущенного осциллятора действительно совершает сильно затухающие колебания с пересечением нулевого деления шкалы. Если ротор осциллятора с  $Q = 0.51$  был отклонен из равновесия и отпущен без начальной скорости, то сколько времени

пройдет пока он пересечет нулевое деление и начнет движение в обратную сторону (к положению равновесия)?

(б) Для осциллятора с критическим затуханием  $Q = 0.5$  выразите константы  $C_1$  и  $C_2$  в общем решении  $\varphi(t) = (C_1 t + C_2) \exp(-\gamma t)$  дифференциального уравнения (1.4) через значения начального отклонения  $\varphi(0) = \varphi_0$  и начальной скорости  $\dot{\varphi}(0) = \Omega_0$ .

(в) Возможно ли, чтобы движение системы с критическим затуханием происходило после первоначального возбуждения по чисто экспоненциальному закону? Если да, то какие начальные условия порождают такое движение? Какой вид имеет фазовая траектория такого движения? Проверьте свои ответы в эксперименте на компьютере.

(г) При каких начальных условиях ротор системы с критическим затуханием пересечет положение равновесия после первоначального возбуждения? Какой должна быть начальная угловая скорость ротора  $\Omega$  при заданном начальном отклонении  $\varphi_0$  для того, чтобы ротор пересек положение равновесия через промежуток времени  $t = 3T_0$  после возбуждения (где  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  — период собственных колебаний в отсутствие трения)? Возможно ли повторное пересечение стрелкой нулевого деления шкалы?

### 3.3\* Движение при сверхкритическом затухании.

(а) Выразите значения констант  $C_1$  и  $C_2$  в общем решении (1.14) дифференциального уравнения для передемпфированной системы через произвольные значения начального отклонения  $\varphi(0) = \varphi_0$  и начальной угловой скорости  $\dot{\varphi}(0) = \Omega_0$ .

(б) При каких начальных условиях последующее движение системы со сверхкритическим затуханием будет происходить по моноэкспоненциальному закону, т. е. будет характеризоваться единственной постоянной времени? Какие фазовые траектории соответствуют таким движениям?

(в) Объясните, почему при произвольных начальных условиях неколебательное движение маховика к положению равновесия происходит вообще говоря медленнее и требует большего времени, чем в случае критического затухания (для системы с тем же значением  $\omega_0$ ). Возможно ли, чтобы передемпфированная система пришла в состояние покоя в положении равновесия за меньшее время, чем система с критическим затуханием (при том же значении  $\omega_0$ )? Если да, то при каких условиях возбуждения это произойдет?

(г) В чем заключается принципиальное отличие фазовых траекторий, соответствующих неколебательному движению, от фазовых траекторий затухающих колебаний?

(д) Возможно ли, чтобы ротор передемпфированной системы ( $\gamma > \omega_0$ ) пересек положение равновесия после первоначального возбуждения? Если да, то при каких начальных условиях это произойдет? Возможно ли повторное пересечение положения равновесия?

## 1.2.4 Приложение: Сводка основных формул

Дифференциальное уравнение движения линейного осциллятора:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0.$$

Частота и период собственных колебаний в отсутствие трения (при  $\gamma \ll \omega_0$ ):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Выражения для коэффициентов дифференциального уравнения через параметры электромагнитного колебательного контура:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}, \quad 2\gamma = \frac{R}{L}.$$

Решение, описывающее колебательное движение (справедливо при  $\gamma < \omega_0$ ):

$$\varphi(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \delta_0),$$

где постоянные  $A_0$  и  $\delta_0$  находятся из начальных условий  $\varphi(0)$ ,  $\dot{\varphi}(0)$ . Частота  $\omega_1$  затухающих колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0 - \gamma^2/(2\omega_0).$$

Эквивалентная форма общего решения:

$$\varphi(t) = e^{-\gamma t} (C \cos \omega_1 t + S \sin \omega_1 t),$$

где постоянные  $C$  и  $S$  находятся из начальных условий. Они связаны с  $A_0$  и  $\delta_0$  соотношениями:

$$A = \sqrt{C^2 + S^2}, \quad \tan \delta_0 = -S/C.$$

В случае слабого затухания ( $\gamma \ll \omega_0$ )

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \gamma^2/(2\omega_0).$$

Время жизни колебаний (в течение которого амплитуда уменьшается в  $e \approx 2.72$  раза):

$$\tau = 1/\gamma.$$

Неколебательное движение, происходящее при критическом затухании  $\gamma = \omega_0$ :

$$\varphi(t) = (C_1 t + C_2) e^{-\gamma t}.$$

Добротность  $Q$  осциллятора:

$$Q = \pi \frac{\tau}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$

Число колебаний, на протяжении которых амплитуда уменьшается вдвое:

$$N_{1/2} = \frac{\ln 2}{\pi} Q = 0.22 Q = \frac{Q}{4.53}.$$

Полная механическая энергия осциллятора складывается из потенциальной энергии упруго деформированной пружины и кинетической энергии вращающегося маховика:

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} D \varphi^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2.$$

Средние за период колебаний значения потенциальной и кинетической энергий равны друг другу. Каждое из этих средних значений составляет половину полной энергии:

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = \langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2} E = \frac{1}{4} D A_0^2 = \frac{1}{4} J \omega_0^2 A_0^2.$$

## Глава 2

# Осциллятор с сухим и вязким трением

Данная моделирующая программа предназначена для изучения собственных колебаний торсионного пружинного маятника, затухающих под действием сухого (кулоновского) трения. Используемая здесь идеализированная математическая модель сухого трения основана на так называемой  $z$ -характеристике, согласно которой сила трения скольжения предполагается не зависящей от скорости и равной предельному значению силы трения покоя. Моделируемая физическая система позволяет понять происхождение случайных ошибок некоторых стрелочных измерительных приборов типа гальванометра с подвижной катушкой.

## 2.1 Теоретические сведения

### 2.1.1 Модель физической системы

Подвижная часть торсионного пружинного осциллятора представляет собой уравновешенный маховик (ротор), центр масс которого расположен на оси вращения. При повороте маховика происходит закручивание прикрепленной к нему спиральной пружины, другой конец которой закреплен неподвижно. В результате на маховик со стороны пружины действует возвращающий момент сил, пропорциональный углу закручивания, т. е. углу отклонения маховика от положения равновесия.

Динамика поведения такой системы при действии сил вязкого трения, момент которых пропорционален угловой скорости, рассматривается в гл. 1. С приведенным там материалом следует познакомиться перед выполнением данной работы.

В случае вязкого трения собственные колебания пружинного маятника описываются *линейным* дифференциальным уравнением. Амплитуда таких колебаний убывает со временем экспоненциально, так что отношение соседних максимальных отклонений ротора постоянно, и вся их последовательность представляет собой убывающую геометрическую прогрессию.

В рамках такой модели затухание собственных колебаний формально продолжается бесконечно долго, а их амплитуда асимптотически приближается к нулю. Длительность процесса экспоненциального затухания принято характеризовать постоянной затухания (показателем затухания)  $\gamma$  или обратной величиной  $\tau = 1/\gamma$ , называемой временем затухания. Эта условная длительность затухающих колебаний представляет собой промежуток времени, на протяжении которого амплитуда колебаний уменьшается на множитель  $e \approx 2.72$ .

Экспоненциальный характер затухания колебаний под действием вязкого трения обусловлен тем, что сила трения пропорциональна скорости. Любая другая зависимость силы трения от скорости порождает затухание колебаний с иной зависимостью амплитуды от времени.

Случай сухого (или кулоновского) трения интересен с точки зрения практических приложений. При сухом трении, пока система находится в движении, величина силы трения почти постоянна, а ее направление противоположно скорости. Упрощенная идеализированная характеристика сухого трения (называемая  $z$ -характеристикой) показана на рис. 2.1. В соответствии с этой характеристикой при движении сила трения постоянна по модулю, но ее направление изменяется всякий раз при изменении направления скорости. Когда система покоится, момент силы статического трения может принимать любое значение от  $-N_{\max}$  до  $N_{\max}$ . Действительная величина момента силы трения покоя зависит от других приложенных сил, которые должны быть уравновешены трением для того, чтобы сохранялось состояние покоя. Величина момента силы трения скольжения принимается в этой модели равной максимально возможной величине момента силы трения покоя  $N_{\max}$ .

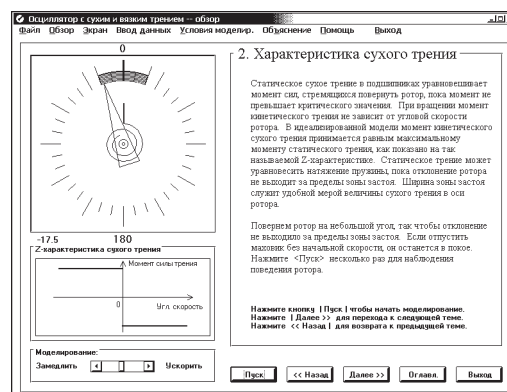


Рис. 2.1: Идеализированная характеристика момента силы сухого трения ( $z$ -характеристика).

В реальных системах сухое трение характеризуется более сложной зависимостью силы трения от скорости. Предельная величина силы трения покоя обычно несколько больше силы трения скольжения. Когда скорость движения начинает возрастать от нулевого значения, сила трения скольжения сначала несколько уменьшается, достигает минимума при некоторой скорости, а затем постепенно увеличивается по мере дальнейшего роста скорости. В идеализированной  $z$ -характеристике сухого трения эти особенности игнорируются. Тем не менее, принятая идеализация позволяет объяснить многие существенные особенности вызванного сухим трением процесса затухания колебаний в реальных физических системах.

Из-за того, что момент силы трения покоя может принимать любые значения вплоть до  $N_{\max}$ , по обе стороны от положения равновесия (в котором спиральная пружина не деформирована) имеется интервал углов отклонения, в пределах которого трение покоя в состоянии уравновесить силу натяжения деформированной пружины. Этот интервал называют *зоной застоя* или *мертвой зоной*. В любой точке мертвой зоны ротор осциллятора может находиться в покое в состоянии безразличного равновесия, в противоположность случаю вязкого трения, когда имеется только одно положение равновесия, в котором пружина не деформирована. Если угловая скорость ротора обращается в нуль где-либо в пределах зоны застоя, ротор останавливается и в дальнейшем покоится в этой точке.

Зона застоя простирается на одинаковые расстояния в обе стороны от точки, в которой пружина не деформирована. Чем сильнее трение покоя в рассматриваемой системе, тем шире мертвая зона. Ее границы определяются максимальным значением момента силы трения покоя  $N_{\max}$ .

Важная отличительная черта затухания колебаний под действием силы сухого трения заключается в том, что движение полностью прекращается после *конечного числа циклов*. Пока ос-



циллятор совершает колебания, знак скорости периодически изменяется, и каждое очередное изменение направления скорости происходит при все меньшем отклонении от средней точки зоны застоя. В конце концов точка поворота оказывается внутри зоны застоя, где трение покоя в состоянии уравновесить возвращающую силу пружины. В этот момент движение полностью прекращается. В какой именно точке произойдет остановка, зависит от начальных условий, которые могут меняться от случая к случаю.

Эти особенности присущи различным механическим системам с сухим трением. В частности, сухое трение может присутствовать в стрелочных измерительных приборах, таких как гальванометры с подвижной катушкой. В типичном гальванометре легкая проволоочная катушка помещена в магнитное поле между полюсами постоянного магнита и может поворачиваться вокруг оси, закрепленной в подшипниках. При прохождении измеряемого тока катушка поворачивается и закручивает спиральную пружину. Если со стороны подшипников на катушку действует момент сил сухого трения, стрелка прибора может остановиться в любой точке зоны застоя, окружающей с двух сторон деление шкалы, соответствующее измеряемой величине. Этим объясняется возникновение случайных ошибок, неизбежно сопутствующих измерениям, выполняемым при помощи стрелочных приборов. Чем сильнее сухое трение, тем больше погрешности измерений.

### 2.1.2 Дифференциальное уравнение осциллятора

На вращающийся ротор торсионного пружинного осциллятора действуют одновременно возвращающий момент  $-D\varphi$  упругой силы закрученной пружины и момент  $N_{\text{тр}}$  силы трения скольжения. Дифференциальное уравнение вращения ротора с моментом инерции  $J$  имеет следующий вид:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi + N_{\text{тр}}. \quad (2.1)$$

В соответствии с принятой идеализированной  $z$ -характеристикой сухого трения, момент силы трения скольжения  $N_{\text{тр}}$  направлен противоположно угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ , и остается постоянным до тех пор пока продолжается вращение ротора в одном направлении. Однако момент сил трения может принимать любое значение из интервала от  $-N_{\text{max}}$  до  $N_{\text{max}}$ , если скорость ротора равна нулю:

$$N_{\text{тр}}(\dot{\varphi}) = \begin{cases} -N_{\text{max}} & \text{для } \dot{\varphi} > 0, \\ N_{\text{max}} & \text{для } \dot{\varphi} < 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

или  $N_{\text{тр}} = -N_{\text{max}} \text{sign}(\dot{\varphi})$ . Здесь  $N_{\text{max}}$  — предельное (максимальное) значение момента сил сухого трения. Удобно выразить  $N_{\text{max}}$  через максимальный угол отклонения маховика  $\varphi_m$ , при котором он еще может находиться в состоянии покоя:

$$N_{\text{max}} = D\varphi_m. \quad (2.3)$$

Очевидно, что угол  $\varphi_m$  соответствует границе зоны застоя.

Дифференциальное уравнение (2.1), описывающее осциллятор с сухим трением, вообще говоря *нелинейно*, потому что момент силы сухого трения  $N_{\text{тр}}(\dot{\varphi})$  изменяется (скачкообразно) в те моменты, когда изменяется знак угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ , т. е. когда изменяется направление его вращения. Поэтому мы должны рассматривать по сути дела два линейных уравнения вместо одного:

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi + \varphi_m) \quad \text{при } \dot{\varphi} > 0, \quad (2.4)$$

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi - \varphi_m) \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} < 0. \quad (2.5)$$

Нелинейный характер задачи проявляется здесь в том, что мы должны переходить от одного из линейных уравнений (2.4)–(2.5) к другому всякий раз, когда изменяется направление вращения ротора.

Решение уравнений (2.4)–(2.5), соответствующее данным начальным условиям, можно найти методом поэтапного интегрирования каждого из линейных уравнений на интервале времени, соответствующем полупериоду колебаний, пока направление вращения ротора остается неизменным. Затем эти решения соединяются вместе («сшиваются») в моменты перехода от одного уравнения к другому таким образом, что угол отклонения и угловая скорость в конце очередного полупериода выполняют роль начальных условий для следующего полупериода колебаний ротора. Такая последовательность решений продолжается до тех пор, пока угол отклонения в конце очередного полупериода не оказывается в пределах мертвой зоны.

Если наряду с сухим трением осциллятор подвержен также действию вязкого трения, в уравнения (2.4)–(2.5) нужно добавить член, пропорциональный угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ , как и в уравнении (1.4) главы 1:

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2(\varphi + \varphi_m) - 2\gamma\dot{\varphi} \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} > 0, \quad (2.6)$$

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2(\varphi - \varphi_m) - 2\gamma\dot{\varphi} \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} < 0. \quad (2.7)$$

Здесь  $\omega_0^2 = D/J$  — квадрат частоты собственных колебаний осциллятора в отсутствие трения,  $\gamma$  — постоянная затухания. Как отмечалось в главе 1, для характеристики вязкого трения удобно вместо  $\gamma$  использовать безразмерную величину — добротность  $Q = \omega_0/2\gamma$ .

### 2.1.3 Затухание колебаний под действием сухого трения

Чтобы выявить основные особенности затухания колебаний, вызванного сухим трением, будем сначала предполагать, что вязкое трение полностью отсутствует ( $\gamma = 0$ ).

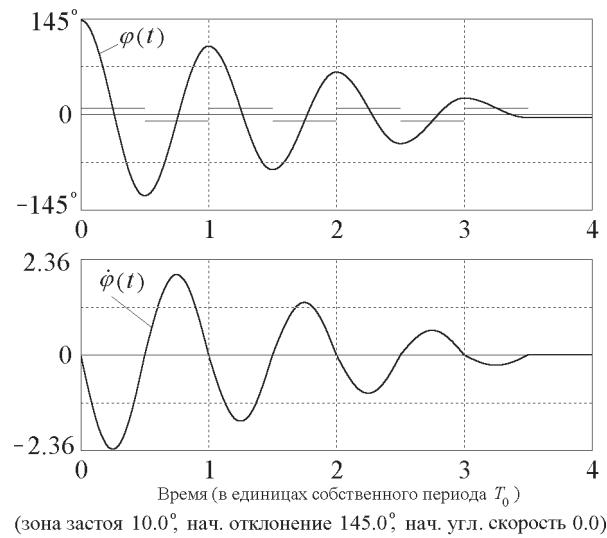


Рис. 2.2: Графики колебаний, затухающих под действием сухого трения.

Пусть в начальный момент  $t = 0$  ротор повернут вправо (по часовой стрелке) от положения равновесия, так что  $\varphi(0) > 0$ . Если это начальное отклонение выходит за границу зоны застоя, т. е.  $\varphi(0) > \varphi_m$ , ротор, будучи освобожденным без толчка, т. е. с нулевой начальной скоростью, начнет двигаться влево ( $\dot{\varphi} < 0$ ), и его движение будет описываться уравнением (2.5). Решение уравнения (2.5) представляет собой простое гармоническое колебание с частотой  $\omega_0$ . Среднее положение, около которого происходят эти колебания, совпадает с правой границей зоны застоя  $\varphi_m$ . Это смещение среднего положения колебаний ротора вызвано постоянным моментом силы сухого трения, который действует на ротор вправо (по часовой стрелке), пока он движется влево. При данных начальных условиях ( $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ) амплитуда колебания около средней точки  $\varphi_m$  равна  $\varphi_0 - \varphi_m$ . Первый отрезок графика таких колебаний на рис. 2.2 представляет собой часть синусоиды со средней точкой, смещенной вверх от оси абсцисс на расстояние  $\varphi_m$ . Крайнее отклонение ротора влево в конце первого полупериода колебаний равно  $\varphi(0) - 2\varphi_m$ .

Когда ротор достигает этого положения, его угловая скорость обращается в нуль. Затем он начинает двигаться вправо. Поскольку при этом его угловая скорость  $\dot{\varphi}$  положительна, мы должны перейти к уравнению (2.4). Значения  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  в конце предыдущего полупериода служат начальными условиями для дальнейшего движения. Это движение опять представляет собой половину цикла гармонического колебания той же самой частоты  $\omega_0$ , но средняя точка колебаний теперь смещена к левой границе зоны застоя  $-\varphi_m$ . Амплитуда соответствующего сегмента синусоиды равна  $\varphi_0 - 3\varphi_m$ .

Продолжая дальше такой анализ движения, мы заключаем, что в последующие полупериоды ротор совершает гармонические колебания около средних точек, поочередно смещенных к границам мертвой зоны  $\varphi_m$  и  $-\varphi_m$ . Каждому полупериоду соответствует одна и та же частота  $\omega_0$  (частота собственных колебаний в отсутствие трения). Поэтому длительность каждого цикла затухающих колебаний равна периоду  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  собственных колебаний осциллятора в отсутствие трения.

Сшивание синусоидальных сегментов, средние точки которых поочередно смещены к правой и левой границам мертвой зоны, дает всю кривую процесса затухания колебаний под действием сухого трения, показанную на рис. 2.2. После каждого полного цикла таких колебаний максимальное отклонение ротора уменьшается на одну и ту же величину, равную удвоенной ширине зон застоя (т. е. на величину  $4\varphi_m$ ). Колебания продолжаются до тех пор, пока конечная точка очередного сегмента синусоиды не окажется внутри зоны застоя ( $-\varphi_m, \varphi_m$ ).

Таким образом, в случае затухания под действием сухого трения максимальные отклонения ротора убывают по линейному закону. Последовательность максимальных отклонений образует убывающую арифметическую прогрессию и колебания полностью прекращаются через конечное число циклов, в противоположность случаю вязкого трения, когда максимальные отклонения убывают в геометрической прогрессии (экспоненциально) и формально движение продолжается бесконечно долго.

### 2.1.4 Фазовая траектория

Общие закономерности затухания колебаний под действием сухого трения отчетливо отражает фазовая траектория на рис. 2.3. В начальный момент ротор имеет нулевую скорость ( $\dot{\varphi}(0) = 0$ ) и отклонен вправо за пределы зоны застоя ( $\varphi(0) = \varphi_0 > \varphi_m$ ). Это начальное состояние представлено крайней правой точкой на оси абсцисс (оси  $\varphi$ ). Начальный участок фазовой траектории, лежащий ниже горизонтальной оси, представляет движение ротора в течение первого полуцикла колебаний, пока ротор поворачивается влево. Эта кривая представляет собой нижнюю половину эллипса (или окружности, если масштабы выбраны соответствующим образом). Центр эллипса находится на оси абсцисс в точке  $\varphi_m$ , которая соответствует правой границе зоны застоя.

Вторая половина цикла колебаний, на протяжении которой ротор поворачивается вправо и его угловая скорость положительна, представлена половиной эллипса, расположенной над осью абсцисс. Центр этого полуэллипса находится в точке  $-\varphi_m$  оси  $\varphi$ . Вся фазовая траектория образована такими полуэллипсами постепенно уменьшающихся размеров, центры которых поочередно расположены в точках  $\varphi_m$  и  $-\varphi_m$  оси абсцисс. Горизонтальный диаметр очередного полуэллипса на  $2\varphi_m$  меньше, чем у предыдущего. Фазовая траектория обрывается на оси  $\varphi$  в первой же точке, где скорость обращается в нуль в пределах мертвой зоны (между точками  $\varphi_m$  и  $-\varphi_m$ ).

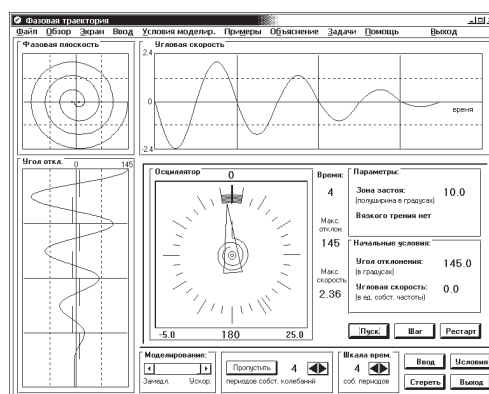


Рис. 2.3: Фазовая диаграмма и графики колебаний, затухающих под действием сухого трения.

Интересно сравнить эту фазовую траекторию со случаем затухания колебаний под действием вязкого трения. При вязком трении кривая скручивается в спираль вокруг начала координат фазовой плоскости. Фазовая траектория асимптотически приближается к этому фокусу и состоит из бесконечного числа постепенно сближающихся, все более тесных витков уменьшающегося размера. В случае сухого трения фазовая кривая образована конечным числом эквидистантных витков: она заканчивается (обрывается), как только достигает оси абсцисс в пределах отрезка  $(-\varphi_m, \varphi_m)$ , соответствующего мертвой зоне.

Если наряду с сухим трением осциллятор подвержен действию сравнительно небольшого вязкого трения ( $\gamma < \omega_0$ ), полуэллипсы фазовой траектории превращаются в отрезки слабо скручивающихся спиралей, соответствующих собственным затухающим колебаниям осциллятора с положением равновесия, поочередно смещенным к правой и левой границам зоны застоя. Витки фазовой траектории перестают быть эквидистантными. Но тем не менее скручивание фазовой траектории не продолжается до бесконечности: в этом случае она также обрывается после конечного числа оборотов вокруг начала координат, как только встречается с отрезком  $(-\varphi_m, \varphi_m)$  оси абсцисс, соответствующим мертвой зоне.

### 2.1.5 Превращения энергии при колебаниях

Пока маховик торсионного осциллятора вращается в одном направлении, действующий на него момент силы сухого трения постоянен (и равен  $N_{\max}$ ), поскольку сила сухого трения скольжения не зависит от скорости. При этом движении полная механическая энергия осциллятора уменьшается пропорционально пройденному маховиком угловому расстоянию  $\Delta\varphi$ , так как (отрицательная) работа  $-N_{\max}\Delta\varphi$  постоянного момента силы трения пропорциональна углу поворота  $\Delta\varphi$ . Поэтому полная энергия зависит от углового положения ротора  $\varphi$  по линейному закону, что хорошо видно из рис. 2.4, на котором показана параболическая потенциальная яма, соответствующая спиральной пружине, подчиняющейся закону Гука. Изображающая точка, ордината

которой равна мгновенному значению полной энергии  $E(\varphi)$  осциллятора, а абсцисса равна углу  $\varphi$ , при колебаниях осциллятора перемещается от одного берега этой потенциальной ямы к другому, постепенно опускаясь на ее дно. Траектория изображающей точки состоит из прямолинейных отрезков отрицательного наклона, соединяющих берега параболической потенциальной ямы.

Однако зависимость полной энергии осциллятора от времени  $E(t)$  при этом не будет линейной, поскольку ротор вращается неравномерно. Скорость рассеяния механической энергии  $-dE/dt$  пропорциональна величине угловой скорости  $|\dot{\varphi}(t)|$ . Поэтому скорость диссипации механической энергии из-за трения достигает максимума в те моменты, когда максимальна угловая скорость ротора  $\dot{\varphi}$ , т. е. когда ротор пересекает границы мертвой зоны. Вблизи положений наибольшего отклонения, где угловая скорость ротора мала, скорость рассеяния механической энергии уменьшается.

В противоположность случаю вязкого трения, после полного прекращения колебаний при сухом трении некоторая (небольшая) часть первоначальной энергии осциллятора может остаться в виде механической энергии. Так будет если окончательная остановка ротора произойдет не в средней точке зоны застоя. В таком случае пружина останется слегка деформированной, и потенциальная энергия упругой деформации не обратится в нуль. Остаточная механическая энергия осциллятора не может превышать значения  $D\varphi_m^2/2 = N_{\max}\varphi_m/2$ .

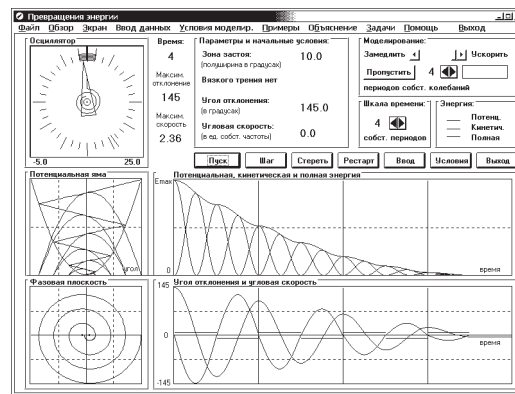


Рис. 2.4: Превращения энергии осциллятора при колебаниях, затухающих под действием сухого трения.

Если начальное возбуждение осциллятора достаточно сильное, т. е. если начальная энергия много больше значения  $D\varphi_m^2/2$ , осциллятор совершит большое число колебаний до полной остановки. В этом случае имеет смысл рассматривать полную энергию  $\langle E(t) \rangle$ , усредненную за период колебаний. Зависимость средней энергии от времени  $\langle E(t) \rangle$  на протяжении большого числа колебаний будет квадратичной, поскольку амплитуда колебаний при сухом трении убывает со временем по линейному закону, а энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Пусть  $t_f$  — момент времени, соответствующий полному прекращению колебаний, тогда в момент времени  $t$  полная энергия  $\langle E(t) \rangle$ , усредненная по периоду колебаний, пропорциональна  $(t_f - t)^2$ . Это выражение (применимое, разумеется, только для  $t < t_f$ ) строго справедливо только тогда, когда остановка осциллятора происходит в середине мертвой зоны. Если это не так, то небольшая часть энергии после прекращения колебаний остается в виде потенциальной энергии пружины. Тогда приведенное выражение будет верным лишь приближенно.

Типичные графики превращений потенциальной, кинетической и полной энергий осциллятора приведены на рис. 2.4.

### 2.1.6 Роль вязкого трения

В реальных физических системах сухое трение всегда в большей или меньшей степени сопровождается вязким трением. В этом случае затухание колебаний осциллятора можно исследовать описанным выше способом, а именно, поэтапным решением уравнений (2.6) и (2.7) с использованием в качестве начальных условий для очередного полуцикла колебаний угла отклонения и угловой скорости ротора в конце предыдущего полуцикла. Иными словами, решения уравнений для соседних временных интервалов «сшиваются» приравниванием угловых отклонений на общей границе этих интервалов при нулевых значениях угловых скоростей (на всех границах).

Фазовая диаграмма дает наглядное представление об эволюции механического состояния осциллятора, колебания которого затухают под одновременным действием сухого и вязкого трения. В отличие от случая только сухого трения, траектория в фазовом пространстве образована уже не последовательностью соединяющихся полуэллипсов (или полуокружностей) уменьшающегося размера, а последовательностью полупетель скручивающихся спиральных кривых, характерных для линейного осциллятора с вязким трением. Фокусы спиралей для соседних полупетель поочередно располагаются в точках, соответствующих левой и правой границам мертвой зоны.

Чтобы сравнить относительную роль вязкого и сухого трения в процессе затухания колебаний, ниже мы рассматриваем уменьшение амплитуды колебаний под действием каждого из этих факторов на протяжении одного цикла.

Как было установлено ранее, из-за сухого трения на любой стадии процесса это уменьшение составляет удвоенную ширину мертвой зоны, т. е.  $4\varphi_m$ . В свою очередь, вязкое трение уменьшает амплитуду за один цикл на величину, пропорциональную текущему значению амплитуды колебаний. При  $\gamma T_0 \ll 1$ , т. е. при сравнительно больших значениях добротности  $Q$  осциллятора, выражение для уменьшения амплитуды за один период  $\Delta a$  из-за вязкого трения можно разложить в ряд:

$$\Delta a = a(1 - e^{-\gamma T_0}) \approx a\gamma T_0 = a\gamma \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi a}{Q}. \quad (2.8)$$

Приравнивая  $\Delta a$  удвоенной ширине  $4\varphi_m$  мертвой зоны, находим значение амплитуды  $\tilde{a}$ , которое разделяет случаи преобладания одного вида трения над другим:

$$\tilde{a} = \frac{4\varphi_m}{\gamma T_0} = \frac{4}{\pi} \varphi_m Q \approx \varphi_m Q. \quad (2.9)$$

Если текущее значение амплитуды превышает  $\tilde{a}$ , доминирует роль вязкого трения. И наоборот, когда амплитуда меньше, чем  $\tilde{a}$ , преобладает влияние сухого трения.

Когда начальное возбуждение осциллятора достаточно сильное, амплитуда колебаний может превышать значение  $\tilde{a} \approx Q\varphi_m$ . В таком случае затухание колебаний на начальном этапе определяется преимущественно вязким трением. На фазовой диаграмме уменьшение горизонтального размера (сжатие) нескольких первых витков из-за вязкого трения превышает ширину мертвой зоны. Для затухания колебаний это сжатие первых витков значительно превышает эффект чередования положений фокусов соседних полувитков от одной границы мертвой зоны к другой из-за сухого трения.

После того, как амплитуда станет меньше значения  $\tilde{a}$  (т. е. при  $a < \tilde{a} = Q\varphi_m$ ), эффект сухого трения становится преобладающим. На фазовой траектории это преобладание проявляется в том, чередование фокусов соседних полувитков между точками  $-\varphi_m$  и  $\varphi_m$  играет большую роль в скручивании кривой, нежели сжатие ее витков из-за вязкого трения. В конце концов фазовая траектория упирается в отрезок оси абсцисс, соответствующий зоне застоя, чему соответствует полное прекращение колебаний.

При очень сильном вязком трении, когда добротность осциллятора  $Q$  меньше критического значения 0.5 (когда  $\gamma > \omega_0$ ), после начального отклонения за пределы зоны застоя (на угол, превышающий  $\varphi_m$ ) отпущенный без начального толчка ротор будет асимптотически приближаться к ближайшей границе зоны застоя, не совершая колебаний. Полная остановка ротора произойдет на границе зоны застоя.

## 2.2 Контрольные вопросы и задачи

Приведенный выше теоретический анализ поведения осциллятора, подверженного действию сухого трения, основан на поэтапном интегрировании линейных дифференциальных уравнений, описывающих движение осциллятора. Нелинейный характер физической системы проявляется здесь в переходе от одного уравнения к другому (с другим положением средней точки, относительно которой происходят колебания). Решения этих уравнений для соседних интервалов времени между последовательными точками поворота «сшиваются» («припасовываются» по терминологии Л.И. Мандельштама) в моменты времени, соответствующие изменению направления движения.

Компьютерное моделирование поведения осциллятора с сухим трением в данном пакете основано на численном интегрировании дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутты 4-го порядка. Аналитическое решение при этом не используется. При выполнении заданий полученные Вами теоретические результаты следует сравнить с результатами компьютерного моделирования.

### 2.2.1 Затухание колебаний под действием сухого трения

Величина момента силы сухого трения в системе характеризуется шириной зоны застоя (или «мертвой» зоны). В программе этот интервал задается указанием максимального угла отклонения  $\varphi_m$  (в градусах) в какую-либо одну сторону от положения равновесия, так что полная ширина зоны застоя равна  $2\varphi_m$  (т. е.  $\varphi_m$  — полуширина зоны застоя).

**1.1 Колебания в отсутствии сухого трения.** Задайте сначала значение  $\varphi_m = 0$ , соответствующее отсутствию сухого трения. Убедитесь, что в этом случае система демонстрирует знакомое Вам по предыдущей программе поведение линейного осциллятора, т. е. гармонические колебания неизменной амплитуды в отсутствие вязкого трения, и экспоненциально затухающие колебания при наличии вязкого трения. Интенсивность вязкого трения, как и в предыдущей программе, характеризуется добротностью осциллятора  $Q$ .

**1.2 Затухание под действием сухого трения при возбуждении колебаний начальным отклонением ротора из среднего положения.** Чтобы отчетливее выявить роль сухого трения в затухании колебаний, выберите сравнительно большое значение угла  $\varphi_m$ , определяющего границы зоны застоя (скажем, от 15 до 20 градусов), и полное отсутствие вязкого трения. Такие условия сильно отличаются от ситуации, характерной для стрелочных измерительных приборов, которые конструируются так, чтобы зона застоя была бы по возможности более узкой, и в которых преднамеренно вносится вязкое трение, обеспечивающее сильное (близкое к критическому) затухание. В таком случае подвижная система прибора успокаивается за минимальное время, и почти не совершая колебаний, останавливается очень близко к положению, в котором стрелка указывала бы на деление шкалы, соответствующее точному значению измеряемой величины. Здесь же мы намеренно выбираем условия так, чтобы в наибольшей мере выявить роль сухого трения.

(а) Что можно сказать о последовательности максимальных отклонений, если затухание вызвано исключительно сухим трением с идеализированной  $z$ -характеристикой? По какому закону происходит убывание максимальных отклонений? Как связаны между собой полуширина зоны застоя и разность последовательных максимальных отклонений в одну сторону?

(б) Пусть угол  $\varphi_m$ , определяющий полуширину зоны застоя, равен, скажем,  $15^\circ$ , а начальное отклонение  $\varphi_0$  составляет  $160^\circ$  при равной нулю начальной угловой скорости. Рассчитайте теоретически, в какой точке шкалы остановится стрелка после прекращения колебаний. Сколько полуэллипсов образуют фазовую траекторию этого движения, считая от начальной точки до точки полной остановки? Проверьте свои предсказания в моделирующем эксперименте на компьютере.

(в) Где на графике зависимости угловой скорости от времени расположены средние значения отрезков синусоид, описывающих колебания осциллятора на протяжении отдельных полуциклов между точками поворота? Обратите внимание на то, как эти отрезки синусоид переходят друг в друга и образуют непрерывный график затухающих колебаний.

(г) Обратите внимание на изломы графика зависимости угловой скорости от времени (эти изломы соответствуют моментам времени, в которые происходит изменение направления движения осциллятора). Какова причина этих изломов? Чем определяется разность углов наклона касательных к графику скорости справа и слева от этих точек?

**1.3\* Затухание колебаний под действием сухого трения после возбуждения осциллятора начальным толчком.** Выберите начальные условия следующим образом: пусть начальное отклонение равно нулю, а начальная угловая скорость равна, скажем,  $2\omega_0$  (где  $\omega_0$  — собственная частота осциллятора). Для полуширины зоны застоя примите, как и прежде, значение  $\varphi_m = 15^\circ$ .

(а) Рассчитайте теоретически максимальный отброс стрелки осциллятора.

(б) На какую точку шкалы укажет стрелка после полного прекращения колебаний? Сколько витков будет на полной фазовой траектории этих колебаний? Проверьте свой ответ в моделирующем эксперименте на компьютере.

**1.4\* Затухание колебаний под действием сухого трения при разных начальных условиях.** Приняв прежнее значение  $\varphi_m = 15^\circ$  для полуширины зоны застоя, рассчитайте угол, соответствующий максимальному отбросу стрелки, и окончательное ее положение на шкале после прекращения колебаний при более сложных начальных условиях:

(а) Начальный угол отклонения  $\varphi(0) = 135^\circ$ , начальная угловая скорость  $\dot{\varphi}(0) = 1.5\omega_0$  (где  $\omega_0$  — собственная частота колебаний осциллятора).

(б) Начальный угол отклонения  $\varphi(0) = -135^\circ$ , начальная угловая скорость  $\dot{\varphi}(0) = 1.5\omega_0$ .

Проверьте полученные Вами теоретические значения в моделирующем эксперименте на компьютере.

**1.5\* Рассеяние механической энергии осциллятора в случае сухого трения.**

(а) График зависимости полной механической энергии осциллятора от угла отклонения состоит из прямолинейных отрезков, соединяющих склоны параболической потенциальной ямы (этот график можно получить в разделе компьютерной программы «Энергетические превращения»). Объясните, почему.

(б) Рассчитайте полный угловой путь (в градусах), который пройдет маховик осциллятора до полной остановки (до прекращения колебаний) после возбуждения колебаний осциллятора начальным толчком  $\dot{\varphi}(0) = 2\omega_0$  из средней точки мертвой зоны, где  $\omega_0$  — собственная частота осциллятора). Полуширина мертвой зоны  $\varphi_m = 10^\circ$ .

**1.6 Колебания в случае узкой зоны застоя.** Выберите малое значение угла  $\varphi_m$ , характеризующего полуширину зоны застоя (менее  $5^\circ$ ), и задайте начальное угловое отклонение  $\varphi(0)$ , во много раз превосходящее ширину  $2\varphi_m$  зоны застоя.



(а) Сколько циклов колебаний совершит маятник до полной остановки?

(б) Когда совершается большое число колебаний, графики отчетливо показывают линейную закономерность убывания амплитуды колебаний и эквидистантный характер витков фазовой диаграммы. Что можно сказать в этом случае о закономерности убывания со временем полной механической энергии осциллятора, усредненной по периоду колебаний?

## 2.2.2 Влияние вязкого трения

**2.1\* Переход главной роли в затухании от вязкого к сухому трению.** Когда затухание колебаний обусловлено одновременно как сухим, так и вязким трением, представляет интерес выяснить изменение характера затухания, когда основной вклад в затухание переходит от вязкого трения к сухому. Пусть угол  $\varphi_m$ , определяющий полуширину зоны застоя, составляет около 1 градуса, и пусть добротность  $Q$ , определяющая интенсивность вязкого трения, составляет около 30. Пусть начальный угол отклонения равен  $120^\circ$ , а начальная угловая скорость равна нулю.

(а) Сухое или вязкое трение играет определяющую роль в затухании на начальной стадии колебаний?

(б) При каком значении амплитуды происходит изменение характера колебаний? Каким образом это изменение проявляется на графиках зависимости угла отклонения и угловой скорости от времени? На фазовой траектории?

**2.2\* Совместное действие сухого и вязкого трения.** Пусть границы зоны застоя находятся при  $\varphi_m = 10^\circ$ , и пусть добротность  $Q = 5$ . Пусть начальная угловая скорость  $\dot{\varphi}(0) = 2\omega_0$ , и пусть начальное отклонение равно нулю.

(а) Рассчитайте максимальный угол отклонения стрелки осциллятора для приведенных параметров и начальных условий. Проверьте свой ответ в эксперименте.

(б) Какой вид трения (сухое или вязкое) преобладает на начальном этапе затухания колебаний?

(в)\*\* Пусть границы зоны застоя определяются углами  $\varphi_m = 10^\circ$ . Пусть добротность  $Q$  равна 3, начальное отклонение составляет  $65^\circ$ , начальная угловая скорость  $-2\omega_0$ . Рассчитайте максимальный угол отклонения стрелки с сторону, противоположную начальному отклонению. Проверьте свой ответ в эксперименте.

## 2.3 Сухое трение и критическое вязкое трение.

(а) Выберите значение добротности  $Q$  близкое к критическому значению 0.5, и исследуйте экспериментально характер затухания. Где в пределах зоны застоя наиболее вероятна остановка стрелки после прекращения колебаний, если добротность  $Q$  слегка превосходит критическое значение? Приведите физическое объяснение результатам своих наблюдений.

(б) Пусть вязкое трение характеризуется добротностью немного превышающей критическое значение, скажем,  $Q = 0.51$ . Осциллятор возбуждается начальным отклонением из положения равновесия. Оцените время (в единицах периода колебаний в отсутствие трения), которое пройдет до полного прекращения движения. Где произойдет полная остановка ротора? Проверьте результат своего расчета в моделирующем эксперименте.

(в) Где произойдет остановка стрелки, если добротность  $Q$  меньше, чем 0.5 (т. е. если система передемпфирована)? Зависит ли ответ от начальных условий?

## 2.2.3 Приложение: Сводка основных формул

Дифференциальное уравнение движения осциллятора с сухим трением:

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi + \varphi_m) \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} > 0,$$

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi - \varphi_m) \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} < 0,$$

где  $\varphi_m$  — угол, соответствующий границам мертвой зоны. Если наряду сухим трением в системе имеется вязкое трение, в уравнении добавляется член, пропорциональный угловой скорости:

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2(\varphi + \varphi_m) - 2\gamma\dot{\varphi} \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} > 0,$$

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2(\varphi - \varphi_m) - 2\gamma\dot{\varphi} \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} < 0,$$

где  $\omega_0$  — частота собственных колебаний в отсутствие трения:

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}.$$

Постоянная затухания  $\gamma$ , характеризующая величину вязкого трения, связана с добротностью осциллятора соотношением:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$

Граничное значение амплитуды, разделяющее случаи преобладания сухого либо вязкого трения:

$$a = \frac{4\varphi_m}{\gamma T} = \frac{4}{\pi}\varphi_m Q \approx \varphi_m Q.$$

## Глава 3

# Колебания и перевороты жесткого маятника

### 3.1 Теоретические сведения

#### 3.1.1 Физическая система

Если задаться вопросом, какой физический прибор оставил наиболее глубокий след в истории физики, скорее всего первая мысль будет о маятнике. Начиная с опытов Галилея в XVI веке и вплоть до наших дней простой маятник используется в разнообразных приборах для измерения времени и напряженности гравитационного поля, и, что не менее важно, служит пробным камнем для многих физических теорий. Эта знаменитая механическая система интересна и полезна не только сама по себе как наиболее знакомый пример нелинейного механического осциллятора, но главным образом потому, что многие задачи в разных областях современной физики приводятся к дифференциальному уравнению, описывающему движение маятника. Механические аналоги физических систем допускают прямую визуализацию движения и этим очень полезны для формирования интуитивных представлений о сложных явлениях. Детально разобравшись с поведением механической системы и используя аналогию между колебательными системами разной физической природы, можно значительно продвинуться в понимании разнообразных электромагнитных и оптических нелинейных явлений, где все далеко не так наглядно, хотя системы описываются такими же дифференциальными уравнениями.

Одна из программ пакета «Физика колебаний» моделирует движение математического маятника в виде точечной массы в однородном поле тяготения, закрепленной на конце невесомого стержня, который может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси. Мы рассматриваем именно стержень, а не гибкую нить, чтобы можно было изучать полные перевороты и колебания с амплитудой, приближающейся к  $180^\circ$ . Та же модель в равной мере применима и к поведению физического маятника, т. е. закрепленного на горизонтальной оси произвольного твердого тела (а не только точечной массы), так как обе системы описываются одним и тем же нелинейным дифференциальным уравнением.

В положении устойчивого равновесия центр масс маятника расположен ниже точки подвеса на одной вертикали с ней. При отклонении маятника из этого положения на угол  $\varphi$  сила тяжести создает возвращающий момент, пропорциональный  $\sin \varphi$ . При малых углах отклонения  $\varphi$  (т. е. при малых колебаниях маятника) значения синуса угла и самого угла практически совпадают ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ), и маятник ведет себя подобно линейному осциллятору. В частности, в отсутствие трения маятник совершает простое гармоническое колебание. При больших амплитудах консервативный маятник совершает периодические колебания, которые, однако, уже не будут гар-

моническими. Графики таких колебаний заметно отличаются от синусоиды, а период колебаний существенно зависит от амплитуды.

На рис. 3.1 слева сверху показано схематическое изображение маятника на экране компьютера. Ниже приведены графики угла отклонения и угловой скорости при колебаниях с амплитудой  $179^\circ$ .

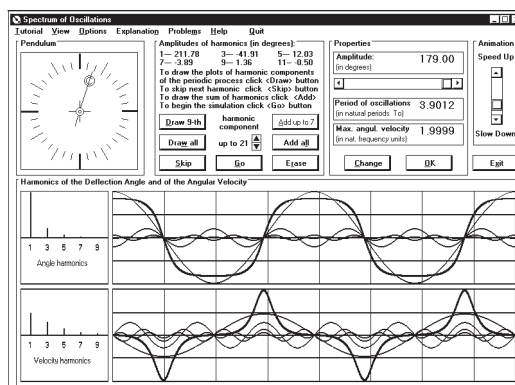


Рис. 3.1: Графики угла отклонения и угловой скорости при колебаниях маятника с амплитудой  $179^\circ$  вместе с гармониками этих колебаний.

Метки на шкале времени (т. е. вертикальные деления) проведены в соответствии с естественной для маятника единицей времени, равной периоду колебаний бесконечно малой амплитуды. Обратите внимание на то, что период  $T$  несинусоидальных колебаний маятника с амплитудой  $179^\circ$  почти в четыре раза больше периода малых колебаний.

Вместе с графиками на рис. 3.1 показан также *спектр*, т. е. синусоидальные составляющие (гармоники) этих колебаний. Период основной (фундаментальной) гармоники равен периоду колебаний  $T$ . Ее круговая частота обратно пропорциональна периоду:  $\omega = 2\pi/T$ . Частоты высших гармоник  $3\omega, 5\omega \dots$  кратны основной частоте. Спектр колебаний маятника образован только нечетными гармониками.

Если при начальном возбуждении маятник получит достаточно большую энергию, сначала он будет совершать полные перевороты. Из-за трения маятник постепенно теряет энергию, и с некоторого момента вращательное движение сменяется колебательным.

### 3.1.2 Дифференциальное уравнение маятника

Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси применительно к физическому маятнику в однородном поле тяжести в отсутствие трения принимает вид:

$$J\ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi. \quad (3.1)$$

Здесь  $J$  — момент инерции маятника относительно оси вращения,  $a$  — расстояние от оси до центра масс,  $g$  — ускорение свободного падения. Левая часть уравнения (3.1) представляет собой скорость изменения момента импульса маятника, правая — момент силы тяжести. Этот момент равен произведению силы  $mg$  (приложенной в центре масс) на плечо этой силы  $a \sin \varphi$ . После деления обеих частей уравнения (3.1) на  $J$  получаем:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (3.2)$$

где введено обозначение  $\omega_0^2 = mga/J$ . Для простого маятника  $a = l$ ,  $J = ml^2$ , и поэтому  $\omega_0^2 = g/l$ . Для физического маятника  $\omega_0^2$  можно представить в таком же виде, если ввести по определению величину  $l = J/(ma)$ . Эта величина имеет размерность длины и называется *приведенной длиной* физического маятника. Поскольку физический маятник с приведенной длиной  $l$  описывается тем же дифференциальным уравнением, что и математический маятник такой же длины  $l$ , эти две системы динамически эквивалентны.

### 3.1.3 Физические параметры маятника

При малых углах отклонения от положения устойчивого равновесия можно заменить в уравнении (3.2)  $\sin \varphi$  на  $\varphi$ , и тогда уравнение (3.2) совпадает с дифференциальным уравнением колебаний гармонического осциллятора (см. уравнение (1.4) гл. 1). Поэтому величина  $\omega_0$  в уравнении (3.2) для маятника имеет физический смысл угловой частоты предельно малых колебаний маятника в отсутствие трения.

При наличии вязкого трения в правую часть уравнения (3.2) следует добавить член, пропорциональный угловой скорости  $\dot{\varphi}$ . Поэтому уравнение маятника с трением принимает следующий вид:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (3.3)$$

Таким образом, маятник как динамическая система характеризуется всего двумя независимыми параметрами: *угловой частотой малых колебаний*  $\omega_0$  и *постоянной затухания*  $\gamma$ , которая также имеет размерность частоты (или угловой скорости). Как и в случае линейного осциллятора, вместо постоянной затухания удобно использовать эквивалентный безразмерный параметр — *добротность*  $Q = \omega_0/(2\gamma)$  (см. уравнение (1.11) гл. 1). В случае малых колебаний величина  $Q/\pi$  равна числу полных циклов, на протяжении которых амплитуда уменьшается в  $e \approx 2.72$  раза.

Принципиальное различие между уравнением (3.3) для маятника и соответствующим дифференциальным уравнением для пружинного осциллятора (который рассматривался в гл. 1) заключается в том, что уравнение (3.3) *нелинейно*. Трудности нахождения аналитического решения этого уравнения как раз и обусловлены его нелинейностью. В общем случае решение уравнения (3.3) в элементарных функциях не выражается. В частном случае отсутствия трения решение уравнения (3.2) можно выразить через специальные функции (эллиптические интегралы).

### 3.1.4 Фазовый портрет маятника

Общее представление о возможных движениях маятника при разных значениях сообщенной ему энергии дают фазовые траектории, т. е. кривые зависимости угловой скорости от угла отклонения. Особенно важно, что фазовые траектории могут рассказать многое о возможном поведении нелинейной физической системы в тех случаях, когда аналитического решения не существует.

Для консервативной системы можно построить семейство фазовых траекторий, не решая дифференциального уравнения, описывающего ее поведение. Уравнения фазовых траекторий непосредственно следуют из закона сохранения энергии. Потенциальная энергия маятника в поле тяготения  $E_{\text{pot}}(\varphi)$  зависит от угла отклонения маятника  $\varphi$  из положения равновесия:

$$E_{\text{pot}}(\varphi) = mga(1 - \cos \varphi). \quad (3.4)$$

График  $E_{\text{pot}}(\varphi)$  показан в верхней части рис. 3.2. Потенциальная энергия имеет минимальное (нулевое) значение в положении устойчивого равновесия, расположенном при  $\varphi = 0$  (дно

потенциальной ямы). Потенциальная энергия маятника имеет максимальное значение  $2mga$  в перевернутом положении (при  $\varphi = \pm\pi$ ), которое соответствует неустойчивому равновесию. Это вершина потенциального барьера. Потенциальная энергия маятника периодически зависит от угла  $\varphi$  (с периодом  $2\pi$ ).

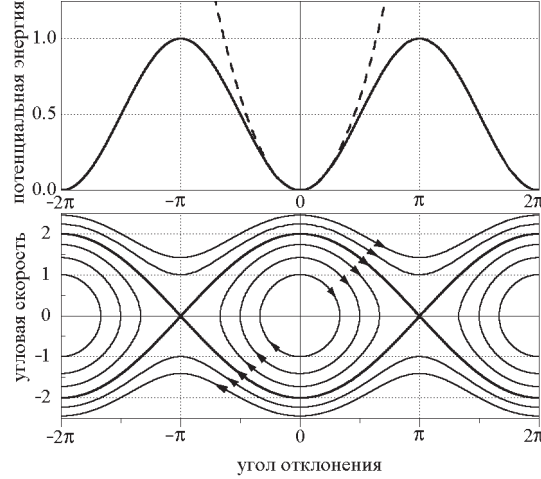


Рис. 3.2: Потенциальная яма и фазовый портрет консервативного маятника.

Штриховой линией на рис. 3.2 для сравнения показана параболическая потенциальная яма линейного (гармонического) осциллятора, период колебаний которого не зависит от амплитуды. Так как вблизи минимума обе потенциальные ямы имеют одинаковую кривизну, малые колебания маятника имеют такой же период, как и колебания соответствующего линейного осциллятора.

В отсутствие трения полная энергия маятника  $E$ , т. е. сумма его кинетической энергии  $\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$  и потенциальной энергии (3.4), остается постоянной во время движения:

$$\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + mga(1 - \cos \varphi) = E. \quad (3.5)$$

Это уравнение связывает между собой угол отклонения  $\varphi$  и угловую скорость  $\dot{\varphi}$ . Поэтому (3.5) представляет собой уравнение фазовой траектории, соответствующей определенному значению полной энергии маятника  $E$ . Для дальнейшего удобно представить уравнение (3.5) в несколько иной форме. Вспоминая, что  $mga/J = \omega_0^2$ , и вводя по определению величину  $E_0 = J\omega_0^2/2$  (которая имеет физический смысл кинетической энергии тела с моментом инерции  $J$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega_0$ ), уравнение (3.5) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{\omega_0^2} + 2(1 - \cos \varphi) = \frac{E}{E_0}. \quad (3.6)$$

Когда полная энергия маятника  $E$  меньше, чем максимально возможное значение его потенциальной энергии (когда  $E < 2mga = 4E_0$ ), т. е. когда полная энергия меньше высоты потенциального барьера, показанного на рис. 3.2, маятник совершает колебания, качаясь туда и обратно между симметричными положениями максимального отклонения  $\varphi_m$  и  $-\varphi_m$ . В этих крайних положениях (точках поворота) потенциальная энергия маятника  $E_{\text{pot}}(\varphi)$  сравнивается с его полной энергией  $E$ , а значит кинетическая энергия и угловая скорость обращаются в нуль. Если амплитуда мала ( $\varphi_m \ll \pi/2$ ), колебания почти синусоидальны, а соответствующая им фазовая траектория имеет почти эллиптическую форму. Эллиптическая форма фазовой траектории ма-

лых колебаний получается из уравнения (3.6), если подставить в него приближенное значение косинуса:  $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$ , справедливое для малых углов  $\varphi$ :

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{E\omega_0^2/E_0} + \frac{\varphi^2}{E/E_0} = 1. \quad (3.7)$$

Это уравнение определяет эллипс в фазовой плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$ . Его горизонтальная полуось равна максимальному угловому отклонению маятника  $\varphi_m = \sqrt{E/E_0}$ . Если угловую скорость  $\dot{\varphi}$  откладывать на оси ординат в единицах угловой частоты малых колебаний  $\omega_0$ , задаваемый уравнением (3.7) эллипс вырождается в окружность.

Чем больше полная энергия  $E$  (т. е. чем больше амплитуда колебаний  $\varphi_m$ ), тем значительно движение маятника отличается от простого гармонического колебания, и тем сильнее фазовая траектория отличается от эллипса. При увеличении полной энергии  $E$  и приближении ее к значению  $2mga$  фазовая траектория вытягивается в горизонтальном направлении (вдоль оси  $\varphi$ ) сильнее, чем в вертикальном (вдоль оси  $\dot{\varphi}$ ). Так происходит потому, что склоны потенциальной ямы маятника с увеличением амплитуды колебаний поднимаются не столь круто, как склоны параболической ямы линейного осциллятора (см. рис. 3.2). Так как возвращающий момент силы тяжести у маятника растет с углом отклонения медленнее, чем у осциллятора, маятник называют системой с «мягкой» возвращающей силой. Поэтому в отличие от осциллятора, период колебаний которого не зависит от амплитуды, период колебаний маятника растет по мере увеличения амплитуды.

Когда маятник отклонен из равновесия на угол, близкий к  $90^\circ$ , возвращающий момент силы тяжести почти постоянен (слабо зависит от угла  $\varphi$  в окрестности  $90^\circ$ ). Это можно увидеть и из графика зависимости потенциальной энергии от  $\varphi$  (см. рис. 3.2), наклон которого почти неизменен вблизи точек перегиба  $\varphi = \pm 90^\circ$ . Поэтому маятник движется здесь с почти постоянным угловым ускорением, а угловая скорость линейно зависит от времени, что отчетливо проявляется на графиках угловой скорости. Для колебаний с большими амплитудами ( $110 - 140^\circ$ ) эти графики принимают пилообразную форму с почти прямолинейными зубцами. Прямолинейным участкам графиков скорости на графиках угла отклонения соответствуют зубцы параболической формы. Весь график угла отклонения  $\varphi(t)$  состоит из таких почти параболических сегментов, выпуклости которых поочередно обращены в противоположные стороны.

При больших амплитудах маятник большую часть периода колебаний проводит в окрестности точек максимального отклонения (точек поворота), где направление его движения изменяется на противоположное. С увеличением размаха колебаний на графике угла отклонения  $\varphi(t)$  вершины становятся более плоскими, а на графике угловой скорости  $\dot{\varphi}(t)$  — более острыми. Такие изменения формы графиков ясно видны на рис. 3.3.

В нижней части рис. 3.3 показаны графики потенциальной, кинетической и полной энергий маятника. При больших колебаниях маятник проводит на пологих склонах потенциальной ямы в среднем больше времени, нежели вблизи ее дна. Поэтому с увеличением амплитуды колебаний вершины графика потенциальной энергии  $E_{\text{pot}}(t)$  растягиваются и становятся шире, чем долины между ними, в противоположность гармоническому осциллятору, для которого максимумы и минимумы графика имеют одинаковую ширину. Противоположные изменения происходят на графике кинетической энергии  $E_{\text{kin}}(t)$ . Это значит, что при колебаниях большого размаха среднее по времени значение потенциальной энергии маятника больше среднего значения кинетической энергии. Напомним, что при малых колебаниях маятника средние значения двух видов энергии одинаковы (как и у гармонического осциллятора).

Если полная энергия маятника превышает потенциальную энергию в перевернутом положении, т. е. если  $E > 2mga$ , то угловая скорость маятника не обращается в нуль даже при  $\varphi = \pm\pi$ . В противоположность режиму колебаний знак угловой скорости теперь остается неизменным.

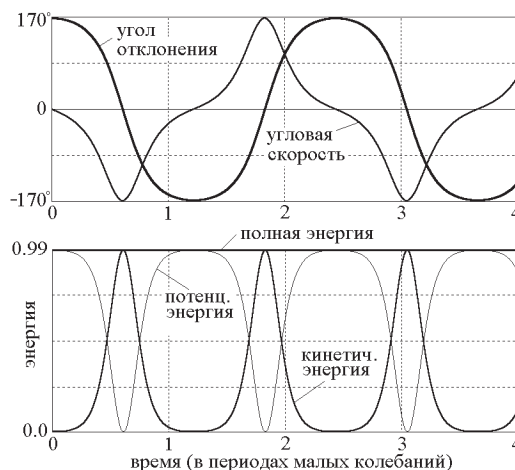


Рис. 3.3: Графики больших колебаний маятника в отсутствие трения ( $\varphi_{\max} = 170^\circ$ ).

Маятник совершает полные обороты, т. е. *вращается* в определенном направлении. Это вращение происходит неравномерно: когда он проходит через низшую точку своего кругового пути, т. е. через положение устойчивого равновесия, угловая скорость максимальна. В моменты прохождения через верхнюю точку (через положение неустойчивого равновесия) угловая скорость маятника минимальна.

В фазовой плоскости вращение маятника представлено траекторией, которая выходит за пределы вертикальных линий  $\varphi = \pm\pi$ , продолжаясь периодически с каждым новым оборотом, как показано на рис. 3.2. Для верхних кривых, лежащих выше оси  $\varphi$ , значения угловой скорости  $\dot{\varphi}$  положительны и угол  $\varphi$  возрастает со временем. Это значит, что они соответствуют вращению маятника в положительном направлении (против часовой стрелки). Изображающая точка движется вдоль этих кривых слева направо.

Для любой консервативной системы уравнение фазовой траектории (в частности, уравнение (3.6) в случае маятника) всегда выражается четной функцией аргумента  $\dot{\varphi}$ , так как кинетическая энергия зависит только от  $\dot{\varphi}^2$ . Отсюда следует, что фазовая траектория симметрична относительно горизонтальной оси  $\varphi$ . Эта симметрия означает, что движение системы в одном направлении (скажем, по часовой стрелке) механически эквивалентно движению в обратном направлении (против часовой стрелки). Другими словами, движение консервативной системы *обратимо во времени*: если в произвольный момент времени знак скорости мгновенно изменить на противоположный, изображающая точка в фазовой плоскости перескакивает на ту же самую фазовую траекторию в новое положение, расположенное симметрично по другую сторону горизонтальной оси  $\varphi$ . Двигаясь в обратном направлении, система проходит через те же пространственные точки с той же самой скоростью (по модулю), что и в прямом движении. Поскольку обращение знака скорости ( $\dot{\varphi} \rightarrow -\dot{\varphi}$ ) эквивалентно изменению направления времени ( $t \rightarrow -t$ ), отмеченное свойство консервативных систем называют также симметрией по отношению к *обращению времени*.

Дополнительная симметрия фазовых траекторий консервативного маятника относительно вертикальной оси  $\dot{\varphi}$  (симметрия по отношению к замене  $\varphi \rightarrow -\varphi$ ) следует из симметрии потенциальной ямы:  $E_{\text{pot}}(-\varphi) = E_{\text{pot}}(\varphi)$ .

При включении трения в модель маятника движение системы становится необратимым во времени. Поэтому отмеченная выше симметрия фазовых траекторий системы относительно координатных осей фазовой плоскости исчезает. Влияние трения на фазовый портрет маятника



рассматривается в разделе 3.1.10.

Углы  $\varphi$  и  $\varphi \pm 2\pi$ ,  $\varphi \pm 4\pi$ , ... эквивалентны, так как соответствуют одному и тому же положению маятника. Поэтому достаточно рассматривать только часть фазовой плоскости, например, полосу, заключенную между вертикальными прямыми  $\varphi = -\pi$  и  $\varphi = \pi$  (см рис. 3.2). Эти прямые можно отождествить и считать, что когда изображающая точка покидает выделенную область, пересекая правую ее границу  $\varphi = \pi$ , эта точка одновременно входит с противоположной стороны через левую границу  $\varphi = -\pi$  (если маятник совершает переворот против часовой стрелки).

Двумерное фазовое пространство жесткого маятника можно представлять себе не только как часть плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$ , заключенную между вертикальными прямыми  $\varphi = +\pi$  и  $\varphi = -\pi$ , но и как некоторую поверхность, не имеющую границ. Это возможно потому, что противоположные точки вертикальных прямых, соответствующие одинаковым значениям  $\dot{\varphi}$ , описывают физически эквивалентные состояния маятника. Принимая во внимание также периодичность зависимости потенциальной энергии маятника и возвращающего момента силы тяжести от угла  $\varphi$ , можно вырезать эту часть плоскости и свернуть ее в цилиндр, соединив граничные прямые  $\varphi = +\pi$  и  $\varphi = -\pi$ . Образованную таким образом цилиндрическую поверхность можно рассматривать как фазовое пространство маятника. Фазовые траектории, охватывающие этот цилиндр, соответствуют полным переворотам (неравномерному вращению) маятника. Такое вращение, как уже отмечалось, происходит при значениях полной энергии, превосходящих высоту потенциального барьера  $2mga$ , разделяющего соседние минимумы потенциальной энергии.

Период вращения быстро уменьшается при увеличении энергии. Асимптотическое поведение периода при  $E \gg 2mga$  можно найти следующим образом.

Когда полная энергия маятника  $E$  значительно превосходит высоту потенциального барьера  $2mga$ , можно приближенно считать, что вся энергия маятника — это кинетическая энергия его вращения. Иными словами, в этом случае можно пренебречь влиянием поля тяжести на поведение маятника и в первом приближении считать, что он совершает равномерное вращение. Если возбуждение маятника совершалось сообщением ему в положении устойчивого равновесия некоторой угловой скорости  $\Omega$ , то дальнейшее вращение и происходит приблизительно с этой угловой скоростью. Поэтому при  $E = J\Omega^2/2 \gg 2mga$  период вращения обратно пропорционален угловой скорости  $\Omega$ , сообщенной маятнику при возбуждении:  $T = 2\pi/\Omega$ .

Чтобы улучшить полученную оценку зависимости периода от начальной угловой скорости  $T(\Omega)$ , нужно принять во внимание вариации угловой скорости вращения маятника из-за действия силы тяжести. Угловая скорость осциллирует между максимальным значением  $\Omega$  в нижней точке и некоторым минимальным значением  $\Omega_{\min}$  в верхней точке траектории. Минимальную угловую скорость можно найти с помощью закона сохранения энергии:

$$\Omega_{\min} = \sqrt{\Omega^2 - 4\omega_0^2} \approx \Omega \left( 1 - 2\frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \right).$$

При сравнительно быстром вращении маятника осцилляции угловой скорости почти синусоидальны. Это можно увидеть из графиков угловой скорости, которые строит моделирующая программа. Поэтому в следующем приближении среднее значение угловой скорости можно получить как полусумму максимального и минимального значений:

$$\Omega_{\text{av}} \approx (\Omega + \Omega_{\min})/2 = \Omega(1 - \omega_0^2/\Omega^2),$$

что для периода вращения маятника дает следующую оценку:

$$T(\Omega) = \frac{2\pi}{\Omega_{\text{av}}} \approx T_0 \frac{\omega_0}{\Omega} \left( 1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \right).$$

\* \* \*

В окне компьютерной программы «Фазовый портрет маятника» можно построить целое семейство фазовых траекторий маятника. Фазовый портрет дает общее представление о возможных движениях маятника в отсутствие трения. Отдельные кривые семейства соответствуют различным значениям полной энергии маятника. При выполнении эксперимента с получением фазового портрета можно, одновременно с построением каждой из фазовых траекторий, измерить период соответствующих колебаний или переворотов. Выполняя такие измерения для разных значений полной энергии, сообщаемой маятнику при начальном возбуждении, можно получить зависимость  $T(E)$  периода от полной энергии  $E$ .

В данном разделе программы можно либо самостоятельно задавать желаемое значение полной энергии маятника (выражая  $E$  в единицах потенциальной энергии перевернутого маятника  $2mga$ ), либо выбрать автоматическое получение фазового портрета, поставив «галочку» в окошке «демонстрация». В последнем случае для каждой последующей кривой фазового портрета полная энергия автоматически увеличивается на одну и ту же величину.

Над фазовой плоскостью на экране показан график потенциальной энергии маятника (потенциальная яма). Одновременно с отображением движения изображающей точки в фазовой плоскости, в потенциальной яме строятся графики кинетической и полной энергии в зависимости от угла отклонения. При достижении точек поворота, в которых кинетическая энергия обращается в нуль и полная энергия совпадает с потенциальной (берега потенциальной ямы), а фазовая траектория пересекает ось  $\varphi$ , проводятся вертикальные штриховые линии, соединяющие соответствующие точки на фазовой траектории и на берегах потенциальной ямы.

Одновременно с фазовой траекторией моделирующая программа строит графики кинетической и полной энергий как функций времени (верхняя правая часть экрана). Для консервативной системы график полной энергии — это просто горизонтальная прямая, проходящая над осью времени на высоте, соответствующей заданному значению начальной энергии. Построение кривых на экране автоматически останавливается в тот момент, когда маятник завершает один цикл своего движения. Поэтому длина каждого горизонтального отрезка на графике полной энергии как раз равна одному периоду движения маятника с заданной энергией. Совокупность таких отрезков дает представление о зависимости периода  $T$  колебаний и переворотов от полной энергии  $T(E)$ . Если соединить концы этих отрезков (что можно сделать, поставив «галочку» в окошке «Период»), получим график  $T(E)$ . Обратите внимание на резкий неограниченный рост периода колебаний, когда полная энергия приближается к  $2mga$  (к максимально возможному значению потенциальной энергии маятника), и на резкое уменьшение периода переворотов, когда полная энергия превосходит  $2mga$ .

В правом нижнем углу экрана расположена таблица, в которую заносятся значения периода  $T$ , полученные в компьютерном моделировании движения при разных значениях полной энергии  $E$ . По этой таблице можно составить количественное представление о зависимости периода от полной энергии.

### 3.1.5 Период малых колебаний маятника

Отличие маятника от линейного осциллятора проявляется прежде всего в зависимости периода колебаний от амплитуды. Чтобы получить приближенную теоретическую формулу для этой зависимости, нужно удерживать следующий член в разложении  $\sin \varphi$  в дифференциальном уравнении (3.2):

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3, \quad (3.8)$$

и в результате получаем следующее приближенное нелинейное дифференциальное уравнение для консервативного маятника с  $\gamma = 0$ :

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi - \frac{1}{6}\omega_0^2 \varphi^3 = 0, \quad (3.9)$$

Приближенное решение уравнения (3.9) можно искать в виде суперпозиции синусоидального колебания  $\varphi(t) = \varphi_m \cos \omega t$  и его третьей гармоники  $\epsilon \varphi_m \cos 3\omega t$ , частота которой равна  $3\omega$  (мы принимаем, что момент  $t = 0$  соответствует максимальному отклонению маятника). Такое решение приведено во многих учебниках, см., например, Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман, Механика (Берклиевский курс физики, т. I), стр. 224 – 227, Москва, «Наука», 1971. Относительный вклад третьей гармоники  $\epsilon$  оказывается равным  $\varphi_m^2/192$ , где  $\varphi_m$  – амплитуда основной гармоники, частота которой получается меньшей, чем частота  $\omega_0$  предельно малых колебаний на величину, пропорциональную квадрату амплитуды  $\varphi_m^2$ :

$$\omega \approx \omega_0(1 - \varphi_m^2/16), \quad T = 2\pi/\omega \approx T_0(1 + \varphi_m^2/16). \quad (3.10)$$

Рекомендуется получить это решение самостоятельно, либо по крайней мере проследить за всеми деталями вывода, приведенного в учебниках, чтобы составить представление о приближенных методах, используемых в теории колебаний. Ту же самую приближенную формулу (3.10) для зависимости периода колебаний маятника от амплитуды можно получить из точного решения, выраженного через эллиптические интегралы, разлагая точное решение в ряд по степеням амплитуды  $\varphi_m$ .

Уравнение (3.10) показывает, что, например, при амплитуде  $\varphi_m = 30^\circ$  (0.52 рад) относительное увеличение периода колебаний (по сравнению с периодом колебаний бесконечно малой амплитуды) составляет 0.017 (1.7%). Относительный вклад третьей гармоники в это несинусоидальное колебание составляет 0.14%, т. е. ее амплитуда равна лишь  $0.043^\circ$ .

Моделирующая программа позволяет проверить качество приближенной теоретической формулы (3.10) для периода колебаний. В следующей таблице приведены значения периода  $T$  (для нескольких значений амплитуды), рассчитанные по формуле (3.10) и измеренные в вычислительном эксперименте. Сравнивая эти значения, приходим к заключению, что приближенная формула (3.10) для амплитуды  $45^\circ$  дает значение периода с относительной ошибкой лишь  $(1.0400 - 1.0386)/1.04 = 0.0013 = 0.13\%$ . Однако при  $90^\circ$  ошибка составляет уже 2.24%. Ошибка не превышает 1% для амплитуд вплоть до  $70^\circ$ .

Амплитуда $\varphi_m$		$T/T_0$ (теория)	$T/T_0$ (эксперимент)
$30^\circ$	$(\pi/6)$	1.0171	1.0175
$45^\circ$	$(\pi/4)$	1.0386	1.0400
$60^\circ$	$(\pi/3)$	1.0685	1.0732
$90^\circ$	$(\pi/2)$	1.1539	1.1803
$120^\circ$	$(2\pi/3)$	1.2742	1.3730
$135^\circ$	$(3\pi/4)$	1.3470	1.5279
$150^\circ$	$(5\pi/6)$	1.4284	1.7622

### 3.1.6 Лимитационное движение маятника

Фазовая траектория, соответствующая движению консервативного маятника с полной энергией  $E$ , равной максимально возможному значению потенциальной энергии маятника, а именно,  $E_{\text{pot}}(\pi) = 2mga = E_{\text{max}}$ , представляет особый интерес. Она отделяет центральную область фазовой плоскости, занятую замкнутыми траекториями колебательных движений, от внешних областей, занятых фазовыми траекториями вращательных движений. Эта граница называется *сепаратрисой*. На рис. 3.2 она выделена жирной линией. Сепаратриса разделяет фазовую плоскость маятника на области, соответствующие разным типам движения. Уравнение сепаратрисы следует из уравнения (3.5) или (3.6), если подставить туда  $E = 4E_0 = 2J\omega_0^2$ :

$$\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi/2). \quad (3.11)$$

Лимитационное движение консервативного маятника (т.е. движение, происходящее при полной энергии маятника  $E = 2mga$ ) заслуживает детального обсуждения. В этом случае изображающая точка в фазовой плоскости движется вдоль сепаратрисы. Когда маятник с энергией  $E = 2mga$  приближается к перевернутому положению  $\varphi = \pi$  или  $\varphi = -\pi$ , его угловая скорость стремится к нулю, обращаясь в нуль при  $\varphi = \pm\pi$ . В фазовой плоскости это состояние представлено седловыми точками  $\varphi = \pm\pi$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ , в которых встречаются верхняя и нижняя ветви сепаратрисы (3.11). Обе эти точки соответствуют одному и тому же механическому состоянию, в котором перевернутый маятник находится в покое в неустойчивом положении равновесия. Малейшее смещение маятника из этого положения в ту или другую сторону приведет к колебаниям с амплитудой, приближающейся к  $\pi$ , а малейший толчок приведет к вращательному движению (к полным переворотам). При таких колебаниях (как и при переворотах) маятник надолго задерживается в окрестности перевернутого положения.

Замечательно, что для лимитационного движения маятника, т.е. движения с полной энергией  $E = 4E_0 = 2mga$ , существует аналитическое решение, в котором зависимость от времени для угла отклонения  $\varphi(t)$  и для угловой скорости  $\dot{\varphi}(t)$  выражается через элементарные функции. Интегрирование дифференциального уравнения (3.11) с начальным условием  $\varphi(0) = 0$  (при положительном знаке квадратного корня) дает:

$$-\omega_0 t = \ln \tan[(\pi - \varphi)/4], \quad (3.12)$$

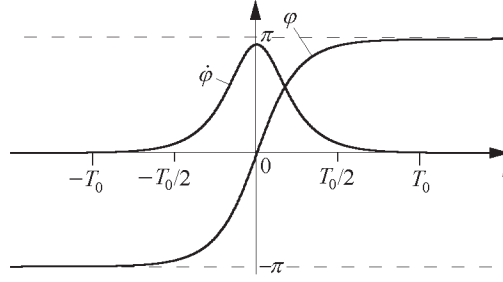
и мы приходим к следующему выражению для  $\varphi(t)$ :

$$\varphi(t) = \pi - 4 \arctan(e^{-\omega_0 t}). \quad (3.13)$$

Это решение описывает движение маятника в направлении против часовой стрелки, начинающееся при  $t = -\infty$  из положения  $\varphi = -\pi$ . При  $t = 0$  груз маятника проходит через нижнюю точку своей круговой траектории, и затем продолжает движение, асимптотически приближаясь к перевернутому положению  $\varphi = +\pi$ . График  $\varphi(t)$  для этого движения показан на рис. 3.4.

Второе решение, соответствующее вращению маятника по часовой стрелке (т.е. движению вдоль второй ветви сепаратрисы в фазовой плоскости), можно получить из уравнения (3.13) преобразованием обращения времени, т.е. заменой  $t \rightarrow -t$ . Решения, соответствующие другим начальным условиям, можно получить из уравнения (3.13) простым сдвигом начала отсчета времени (т.е. заменой  $t$  на  $t - t_0$ ).

Чтобы получить зависимость угловой скорости от времени  $\dot{\varphi}(t)$  для лимитационного движения маятника в отсутствие трения, можно выразить  $\cos(\varphi/2)$  в уравнении (3.13) следующим образом:

Рис. 3.4: Графики движения маятника с энергией  $E = 2mga = E_{\max} = 4E_0$ .

$$\cos(\varphi/2) = \frac{1}{\cosh(\omega_0 t)}.$$

После подстановки этого значения в (3.11) получаем:

$$\dot{\varphi}(t) = \pm \frac{2\omega_0}{\cosh(\omega_0 t)} = \pm \frac{4\omega_0}{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}. \quad (3.14)$$

Эта зависимость угловой скорости от времени  $\dot{\varphi}(t)$  для лимитационного движения также показана на рис. 3.4. График  $\dot{\varphi}(t)$  имеет вид уединенного импульса. Характеристическая ширина его профиля, т. е. продолжительность импульса скорости, по порядку величины равна  $1/\omega_0$ . Это значит, что время, необходимое маятнику для прохождения почти полного кругового пути в лимитационном движении, из окрестности перевернутого положения через нижнее положение равновесия вновь почти до перевернутого положения, по порядку величины равно периоду малых колебаний  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . В самом деле, для моментов времени  $t = T_0/2$  по обе стороны от пика значение угловой скорости, как следует из (3.14), составляет лишь  $0.17\omega_0$ . Используя аналитическое выражение (3.13) для  $\varphi(t)$ , можно точно рассчитать промежуток времени  $\tau$ , в течение которого маятник проходит через нижнее положение равновесия от одного горизонтального положения ( $\varphi = -\pi/2$ ) до другого ( $\varphi = \pi/2$ ):  $\tau = 0.28 T_0$ . На протяжении этого промежутка времени кинетическая энергия маятника больше потенциальной. Поэтому время  $\tau$  равно полуширине (ширине на половине высоты) одиночного импульса на графике кинетической энергии для лимитационного движения.

На крыльях графика  $\dot{\varphi}(t)$ , т. е. при  $t \rightarrow \pm\infty$ , угловая скорость падает экспоненциально. В самом деле, при больших положительных значениях  $t$  в знаменателе выражения (3.14) можно пренебречь вторым слагаемым  $\exp(-\omega_0 t)$ , что дает

$$\dot{\varphi}(t) \approx \pm 4\omega_0 e^{-\omega_0 t}. \quad (3.15)$$

Таким образом, в случае лимитационного движения, когда полная энергия маятника в точности равна высоте потенциального барьера  $2mga$ , скорость маятника неограниченно уменьшается по мере его приближения к перевернутому положению. Маятник асимптотически движется к неустойчивому равновесию, затрачивая на это движение бесконечно большое время. Значит, при  $E = 2mga$  движение консервативного маятника не будет периодическим.

Если энергия маятника близка к значению  $2mga$ , его движение почти всюду будет очень мало отличаться от лимитационного. Графики  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  для движений маятника с энергией, немного меньшей и немного большей  $2mga$ , показаны на рис. 3.5.

Заметные отличия в характере движения проявляются лишь в непосредственной близости к перевернутому положению, для достижения которого при  $E = 2mga$  потребовалось бы беско-

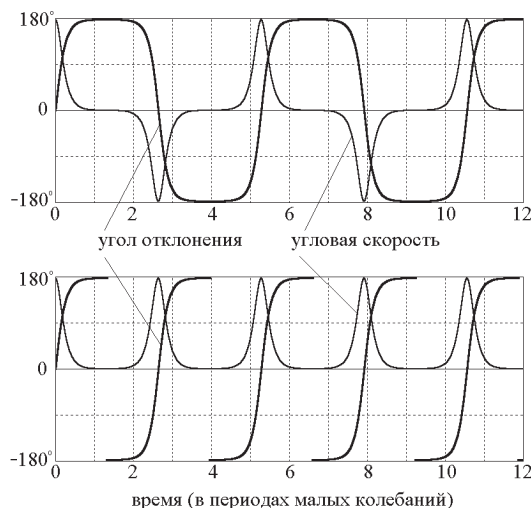


Рис. 3.5: Графики  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  при колебаниях и переворотах консервативного маятника с энергией, близкой к значению  $2mga$ .

нечно большое время. Если энергия превышает  $2mga$  на сколь угодно малую величину, маятник достигнет перевернутого положения за конечное время и будет продолжать движение далее в прежнем направлении, набирая скорость по мере приближения к нижнему положению. Если же энергия меньше, чем  $2mga$ , маятник за конечное время достигнет точки своего максимального отклонения, и затем начнет двигаться обратно. И в том, и в другом случае движение маятника периодическое, причем его период неограниченно возрастает при  $E \rightarrow 2mga$ . Рис. 3.6 показывает зависимость периода от полной энергии  $T(E)$ , полученную с помощью моделирующего эксперимента.

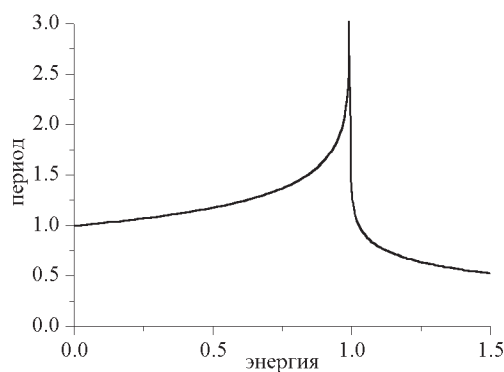


Рис. 3.6: Период как функция полной энергии  $E$  для колебаний и переворотов маятника в отсутствие трения.

Начальный участок графика показывает почти линейный рост периода с энергией, что соответствует приближенной формуле 3.10, так как при малых колебаниях полная энергия маятника приблизительно пропорциональна квадрату амплитуды:  $E \propto \varphi_m^2$ . Такую закономерность, справедливую для колебаний со сравнительно небольшими амплитудами, можно проверить, экспериментируя с настоящим маятником, не прибегая к компьютерному моделированию. Но совсем иное дело, если нас интересуют колебания с амплитудами, приближающимися к  $180^\circ$ , т. е. дви-

жение, близкое к лимитационному. При  $E \approx 2mga$  тонкие детали зависимости периода от амплитуды в натурном эксперименте установить невозможно. Напротив, моделирование позволяет выполнить точные измерения периода и в то же время увидеть возможный путь для теоретического расчета периода (см. следующий раздел).

Рассмотренные выше математические соотношения, относящиеся к лимитационному движению маятника, играют важную роль в современной физике, в частности, в теории солитонов (уединенных волновых импульсов, распространяющихся в нелинейной среде с дисперсией).

### 3.1.7 Колебания маятника с большими амплитудами

Предшествующий анализ лимитационного движения (т. е. движения вдоль сепаратрисы в фазовой плоскости) дает ключ к пониманию характера колебаний маятника с амплитудами, приближающимися к  $180^\circ$ , когда энергия маятника лишь чуть меньше высоты  $2mga$  потенциального барьера. Этот анализ позволяет также понять характер переворотов маятника при полной энергии, чуть большей, чем потенциальная энергия  $2mga$  маятника в перевернутом положении. Именно при таких энергиях обнаруживаются наиболее интересные особенности зависимости периода от энергии.

Выполняя моделирование колебаний маятника с амплитудами  $\varphi_m$ , приближающимися к  $180^\circ$ , например, равными  $179.900^\circ$ ,  $179.990^\circ$  и  $179.999^\circ$ , при сравнении графиков скорости можно увидеть, что длительность импульсов в этих случаях практически одинакова, но интервалы между пиками (т. е. периоды колебаний) возрастают по мере приближения амплитуды к  $180^\circ$ . Экспериментальные значения периодов таких необычных колебаний составляют соответственно  $5.5 T_0$ ,  $6.8 T_0$  и  $8.3 T_0$ . Из графиков хорошо видно, что все это различие в периодах накапливается при очень медленном движении маятника в непосредственной близости перевернутого положения, в то время как большая часть кругового пути через нижнее положение равновесия описывается практически неотличимыми графиками, почти совпадающими с графиком лимитационного движения. Это значит, что весь путь маятника от нижнего положения равновесия до точки наибольшего отклонения можно мысленно разделить на две характерные части: одна часть (одинаковая для всех трех рассматриваемых случаев) простирается от нижней точки  $\varphi = 0$  до некоторого произвольно выбранного угла  $\varphi_c$  (например,  $\varphi_c = 175^\circ$ ), а вторая часть — от  $\varphi_c$  до максимального отклонения  $\varphi_m$  разного в трех случаях). С хорошей точностью время движения маятника от  $\varphi = 0$  до  $\varphi_c$  (обозначим это время через  $t_0$ ) можно найти, считая, что рассматриваемое движение совпадает с лимитационным. Для этого воспользуемся известным аналитическим решением (3.13), подставляя в него  $\varphi(t) = \varphi_c$  при  $t = t_0$ :

$$\omega_0 t_0 = -\ln \tan \frac{\pi - \varphi_c}{4} = -\ln \tan \frac{\alpha_c}{4}, \quad (3.16)$$

где введено обозначение  $\alpha_c = \pi - \varphi_c$  для угла, на который стержень маятника при  $\varphi = \varphi_c$  отклонен от верхнего (неустойчивого) положения равновесия. Когда угол  $\varphi_c$  близок к  $\pi$ , угол  $\alpha_c$  мал, так что в уравнении (3.16) можно положить  $\tan(\alpha_c/4) \approx \alpha_c/4$ , и  $\omega_0 t_0 \approx \ln(4/\alpha_c)$ .

Время  $t_0$  зависит, конечно, от  $\alpha_c = \pi - \varphi_c$ , т. е. от положения точки, которую мы выбрали для деления всего пути на две части. Дальнейшее движение маятника от  $\varphi = \varphi_c$  до максимального отклонения  $\varphi = \varphi_m$ , происходящее в малой окрестности перевернутого положения в течение некоторого времени  $t_1$ , можно рассматривать с помощью *линеаризованного* уравнения движения. Для этого в точном уравнении (3.2) перейдем к новой переменной  $\alpha = \pi - \varphi$ . Другими словами, мгновенное положение маятника будем отсчитывать не от нижнего, а от верхнего положения равновесия. Тогда в уравнении (3.2) можно положить  $\sin \alpha \approx \alpha$ , и уравнение для  $\alpha(t)$  принимает вид:

$$\ddot{\alpha} - \omega_0^2 \alpha = 0, \quad (3.17)$$

Общее решение этого линейного уравнения имеет вид суперпозиции двух экспонент:

$$\alpha(t) = C_1 e^{\omega_0 t} + C_2 e^{-\omega_0 t}. \quad (3.18)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находятся из начальных условий. Здесь удобно, пользуясь обратимостью движения маятника, выбрать начало отсчета времени в точке поворота  $\alpha_m$ , т. е. вместо движения вверх от  $\alpha_c$  до  $\alpha_m$ , происходящего в течение искомого времени  $t_1$ , рассмотреть обратное движение от точки поворота  $\alpha_m$  до  $\alpha_c$ . Ясно, что оно потребует точно такого же времени  $t_1$ . Тогда в начальный момент  $\dot{\alpha}(0) = 0$ , откуда  $C_1 = C_2$ . Из второго начального условия  $\alpha(0) = \alpha_m$  находим  $C_1 = \alpha_m/2$ . Далее подставляем в (3.18)  $\alpha(t_1) = \alpha_c$  и учитываем, что  $\exp(-\omega_0 t_1) \ll \exp(\omega_0 t_1)$ . Последнее неравенство справедливо при условии, что выбранный нами угол  $\alpha_c$  удовлетворяет неравенству  $\alpha_c \gg \alpha_m$  (время движения  $t_1$  на втором участке составляет несколько периодов малых колебаний  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ ). Окончательно для времени движения  $t_1$  на участке от  $\alpha_c$  до  $\alpha_m$  получаем следующее приближенное выражение:

$$\omega_0 t_1 = \ln \frac{2\alpha_c}{\alpha_m}. \quad (3.19)$$

Полное время движения  $t_0 + t_1$  от нижнего положения до точки поворота  $\varphi_m$  находим, складывая правые части (3.16) и (3.19). При сложении из выражения для  $t_0 + t_1$  произвольно выбранный нами угол  $\alpha_c = \pi - \varphi_c$  выпадает. Это значит, что результат не зависит от выбора точки деления  $\varphi_c$ ; важно лишь, чтобы для произвольно выбранного угла  $\varphi_c$  выполнялись неравенства  $\alpha_m \ll \alpha_c \ll 1$ . Так как время  $t_0 + t_1$  составляет четверть периода колебаний маятника с амплитудой  $\varphi_m$ , для периода колебаний с амплитудами  $\varphi_m$ , близкими к  $180^\circ$ , получаем следующую теоретическую оценку:

$$T = 4(t_0 + t_1) \approx \frac{4}{\omega_0} \ln \frac{8}{\alpha_m} = \frac{2}{\pi} T_0 \ln \frac{8}{\pi - \varphi_m}. \quad (3.20)$$

Для амплитуд  $179.900^\circ$ ,  $179.990^\circ$  и  $179.999^\circ$  расчет по формуле (3.20) дает значения периодов  $5.37 T_0$ ,  $6.83 T_0$  и  $8.30 T_0$  соответственно, хорошо согласующиеся с измеренными в моделирующем эксперименте значениями ( $5.5 T_0$ ,  $6.8 T_0$  и  $8.3 T_0$ ). Приближенная формула (3.20) тем точнее, чем ближе амплитуда  $\varphi_m$  к  $180^\circ$ .

### 3.1.8 Колебания с большими амплитудами и перевороты маятника

Интересно сравнить между собой движения маятника для двух значений полной энергии  $E$ , которые слегка отличаются от максимального значения потенциальной энергии  $E_{\max} = 2mga$  в сторону меньших и больших значений на одну и ту же величину, например, для  $E/E_{\max} = 0.9999$  и  $E/E_{\max} = 1.0001$ . Фазовые траектории этих движений проходят вплотную к сепаратрисе, причем первая лежит внутри, а вторая — вне сепаратрисы. Внутренняя замкнутая кривая соответствует колебаниям с большой амплитудой  $178.9^\circ$ , внешняя кривая — переворотам с медленным прохождением через верхнюю точку. Измеряя в моделирующем эксперименте периоды этих движений, мы получаем значения  $3.814 T_0$  и  $1.907 T_0$  соответственно. Замечательно, что период колебаний с энергией  $E/E_{\max} = 0.9999$  ровно вдвое больше периода переворотов, происходящих при энергии  $E/E_{\max} = 1.0001$ . Графики  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  для этих движений показаны на рис. 3.5

Из моделирующих экспериментов можно сделать вывод о том, что на большей части кругового пути маятника графики рассматриваемых колебаний и переворотов (см. рис. 3.5) почти



совпадают: в случае колебаний маятник, двигаясь от нижней точки, через конечное время останавливается в точке своего максимального отклонения, а затем движется в обратном направлении; в случае переворотов маятник достигает вершины барьера также за конечное время и затем продолжает движение в прежнем направлении. При колебаниях маятник движется туда и обратно, т. е. проходит почти весь круговой путь дважды за период. В фазовой плоскости изображающая точка при этом проходит вдоль верхней и нижней ветвей сепаратрисы, прижимаясь к ней изнутри. При переворотах маятник проходит круговой путь один раз за период, а точка в фазовой плоскости проходит вдоль одной из ветвей сепаратрисы, прижимаясь к ней снаружи. Чтобы объяснить, почему период колебаний вдвое больше периода переворотов, достаточно доказать, что маятник с энергией  $E = 2mga - \Delta E$  затрачивает на движение от  $\varphi = 0$  до точки наивысшего подъема ровно столько же времени, сколько маятник с энергией  $E = 2mga + \Delta E$  затрачивает на движение до перевернутого положения.

Приближенный теоретический расчет времени движения маятника до точки поворота при колебаниях с амплитудой, приближающейся к  $180^\circ$ , приведен в предыдущем разделе. Аналогичный подход можно использовать и для расчета времени движения до перевернутого положения при переворотах.

Мы видим, что графики рассматриваемых колебаний и переворотов (см. рис. 3.5) почти совпадают с графиками лимитационного движения (см. рис. 3.4). Отличия от лимитационного движения обнаруживаются только в непосредственной окрестности перевернутого положения маятника. Поэтому весь путь маятника от нижнего положения равновесия до точки наибольшего отклонения в случае колебаний и до перевернутого положения в случае переворотов можно мысленно разделить на две характерные части: одна часть (одинаковая для двух рассматриваемых случаев) простирается от нижней точки  $\varphi = 0$  до некоторого произвольно выбранного угла  $\varphi_c$ , а вторая часть — от  $\varphi_c$  до максимального отклонения  $\varphi_m$  в первом случае и до  $\varphi = \pi$  во втором случае).

Время  $t_0$  движения маятника от  $\varphi = 0$  до  $\varphi_c$  (одинаковое для двух рассматриваемых случаев) можно найти, считая, что рассматриваемое движение совпадает с лимитационным. Это было сделано в предыдущем разделе: см. уравнение (3.16). Теперь мы рассмотрим дальнейшее движение от  $\varphi_c$  и докажем, что время  $t_1$ , необходимое маятнику с энергией  $2mga - \Delta E$  (колебательное движение) для достижения точки поворота  $\varphi_m$  равно времени  $t_2$ , в течение которого маятник с энергией  $2mga + \Delta E$  (вращательное движение) достигает перевернутого положения  $\varphi = \pi$ .

Движение маятника в малой окрестности перевернутого положения можно, как и в предыдущем разделе, рассматривать с помощью линеаризованного уравнения движения. Для этого в точном уравнении (3.2) переходим к новой переменной  $\alpha = \pi - \varphi$ , задавая мгновенное положение маятника относительно верхнего положения равновесия. Потенциальная энергия маятника зависит от  $\alpha$  следующим образом:

$$E_{\text{pot}}(\alpha) = mga(1 + \cos \alpha) \approx 2mga(1 - \frac{1}{4}\alpha^2). \quad (3.21)$$

Последнее выражение справедливо только для сравнительно малых  $\alpha$ , когда маятник находится вблизи перевернутого положения. При  $\alpha \ll 1$  момент силы тяжести приблизительно пропорционален углу  $\alpha$ , но в отличие от случая устойчивого равновесия этот момент  $N = -dE_{\text{pot}}(\alpha)/d\alpha = mga\alpha$  стремится увести маятник в сторону от положения неустойчивого равновесия  $\alpha = 0$ .

Фазовые траектории движений с энергиями  $E = 2mga \pm \Delta E$  вблизи седловой точки  $\varphi = \pi$ ,  $\dot{\varphi} = 0$  (в новых переменных  $\alpha = 0$ ,  $\dot{\alpha} = 0$ ) можно найти из закона сохранения энергии, используя приближенное выражение (3.21) для потенциальной энергии:

$$\frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2}mga\alpha^2 = \pm\Delta E, \quad \text{или} \quad \frac{\dot{\alpha}^2}{\omega_0^2} - \alpha^2 = \pm 4\varepsilon. \quad (3.22)$$

Здесь мы воспользовались обозначением  $\varepsilon = \pm\Delta E/E_{\max} = \pm\Delta E/(2mga)$  для малой безразмерной величины ( $\varepsilon \ll 1$ ), характеризующей относительное отклонение полной энергии маятника  $E$  от значения  $E_{\max}$ , соответствующего сепаратрисе. Из уравнения (3.22) следует, что фазовые траектории вблизи седловой точки представляют собой гиперболы, асимптотами которых служат две ветви сепаратрисы, встречающиеся в седловой точке ( $\varphi = \pi$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ ). Фазовый портрет в окрестности седловой точки показан на рис. 3.7. Кривая 1 соответствует вращению маятника с энергией  $E = 2mga + \Delta E$ , кривая 2 описывает колебательное движение с энергией  $E = 2mga - \Delta E$  в окрестности точки поворота  $\varphi_m$ . Эта кривая пересекает ось абсцисс на расстоянии  $\alpha_m = \pi - \varphi_m$  от седловой точки.

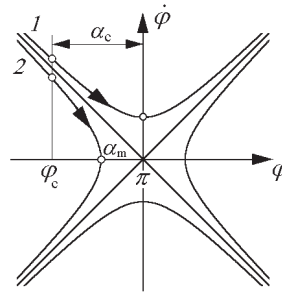


Рис. 3.7: Фазовые траектории в окрестности седловой точки.

Полагая в уравнении (3.2)  $\sin \alpha \approx \alpha$ , приходим к уравнению (3.17) для  $\alpha(t)$ , общее решение которого (3.18) имеет вид суперпозиции двух экспонент. Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  в нем находятся из начальных условий. Для колебательного движения эти постоянные были найдены в предыдущем разделе. Время  $t_1$  движения маятника от  $\alpha_c = \pi - \varphi_c$  до  $\alpha_m = \pi - \varphi_m$  дается формулой (3.19), в которой  $\alpha_m$  теперь удобно выразить через  $\varepsilon$ , пользуясь соотношением (3.22) с  $\dot{\alpha} = 0$ :  $\alpha_m = 2\sqrt{-\varepsilon}$  (здесь  $\varepsilon < 0$ ). Таким образом,

$$\omega_0 t_1 = \ln \frac{2\alpha_c}{\alpha_m} = \ln \frac{\alpha_c}{\sqrt{-\varepsilon}}. \quad (3.23)$$

Рассмотрим теперь случай вращательного движения с энергией  $2mga + \Delta E$ . Нас интересует время  $t_2$ , в течение которого маятник движется от  $\varphi_c$  до перевернутого положения  $\varphi = \pi$ . На фазовой плоскости (см. рис. 3.7) этому движению соответствует отрезок кривой 1 от  $\alpha_c$  до точки пересечения с осью ординат. В этом случае для нахождения  $t_2$  также удобнее рассмотреть обратное во времени движение, приняв за  $t = 0$  момент пересечения маятником перевернутого положения:  $\alpha(0) = 0$ . Значение угловой скорости при  $t = 0$  получается из соотношения (3.22) с  $\alpha = 0$ :  $\dot{\alpha}(0) = 2\sqrt{\varepsilon}\omega_0$ . С помощью этих начальных условий ( $\alpha(0) = 0$ ,  $\dot{\alpha}(0) = 2\sqrt{\varepsilon}\omega_0$ ) находим постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  в общем решении (3.18) линеаризованного дифференциального уравнения, справедливого в окрестности перевернутого положения:  $C_1 = \sqrt{\varepsilon}$ ,  $C_2 = -\sqrt{\varepsilon}$ . Продолжительность  $t_2$  рассматриваемого движения найдем из уравнения (3.18), подставляя в него найденные значения  $C_1$  и  $C_2$ , и полагая  $\alpha(t_1) = \alpha_c$ :

$$\alpha_c = \sqrt{\varepsilon}(e^{\omega_0 t_2} - e^{-\omega_0 t_2}) \approx \sqrt{\varepsilon}e^{\omega_0 t_2}.$$

Произвольно выбранный нами угол  $\alpha_c$  с одной стороны должен быть малым (по сравнению с  $\pi/2$ ), чтобы можно было использовать линеаризованное дифференциальное уравнение, но с другой стороны при  $\varepsilon \ll 1$  всегда можно выбрать его достаточно большим по сравнению с  $\sqrt{\varepsilon}$ , чтобы выполнялось условие  $e^{-\omega_c t_2} \ll e^{\omega_c t_2}$ . Таким образом,

$$\omega_0 t_2 = \ln \frac{\alpha_c}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (3.24)$$

Сравнивая выражения (3.24) и (3.23), мы видим, что  $t_2 = t_1$ , если абсолютная величина относительного отклонения энергии маятника  $|\varepsilon| = \Delta E/E_{\max}$  от критического значения  $E_{\max} = 2mga$ , соответствующего сепаратрисе, одинакова в двух рассматриваемых случаях. Учитывая, что и время движения  $t_0$  от положения равновесия  $\varphi = 0$  до  $\varphi_c = \pi - \alpha_c$  с высокой точностью одинаково, приходим к выводу, что период колебаний вдвое больше, чем период соответствующих переворотов.

Период переворотов  $T_{\text{rot}}$  равен удвоенному времени движения  $t_0 + t_2$  от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = \pi$ . Складывая найденное ранее время  $t_0$  (см. выражение (3.16)), из которого следует, что  $\omega_0 t_0 \approx \ln(4/\alpha_c)$  и  $t_2$  из уравнения (3.24), для  $T_{\text{rot}}$  получаем:

$$T_{\text{rot}} = 2(t_0 + t_2) = \frac{2}{\omega_0} \ln \frac{4}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{\pi} T_0 \ln \frac{4}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (3.25)$$

Малый угол  $\alpha_c = \pi - \varphi_c$ , разделяющий две стадии движения маятника (почти вдоль сепаратрисы от  $\varphi = 0$  до  $\varphi_c$  и по гиперболе в окрестности седловой точки от  $\varphi_c$  до  $\varphi = \pi$ ) выпадает из формулы (3.25) для периода переворотов. Таким образом, известный произвол в выборе  $\alpha_c$  не сказывается на теоретической оценке (3.25) периода переворотов (но при этом для  $\alpha_c$  должны выполняться неравенства  $\sqrt{\varepsilon} \ll \alpha_c \ll 1$ ). Период переворотов стремится к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , т. е. когда энергия стремится к критическому значению  $2mga$ . При  $\varepsilon = 0.0001$  (когда  $E = 1.0001 E_{\max}$ ) формула (3.25) дает  $T_{\text{rot}} = 1.907 T_0$ , что совпадает с приведенным выше значением, полученным в моделирующем эксперименте.

Чтобы сравнить приближенные аналитические выражения для периода переворотов (3.25) маятника с энергией  $E = 2mga + \Delta E$  и периода колебаний с энергией  $E = 2mga - \Delta E$ , в полученной ранее формуле (3.20) следует выразить  $\alpha_m$  через  $\varepsilon = -\Delta E/(2mga)$ :  $\alpha_m = 2\sqrt{-\varepsilon} = 2\sqrt{|\varepsilon|}$ . В результате приходим к следующей формуле для зависимости периода колебаний  $T$  от  $|\varepsilon|$ :

$$T = 4(t_0 + t_1) = \frac{4}{\omega_0} \ln \frac{4}{\alpha_m} = \frac{2}{\pi} T_0 \ln \frac{8}{\sqrt{|\varepsilon|}}.$$

Эта формула, как и следовало ожидать, отличается от выражения для периода переворотов (3.25) множителем 2.

### 3.1.9 Средние значения потенциальной и кинетической энергий

Малые колебания маятника почти синусоидальны, и средние за период значения потенциальной и кинетической энергий маятника одинаковы. При колебаниях большого размаха, как уже отмечалось, маятник больше времени проводит на пологих склонах потенциальной ямы, поэтому в среднем потенциальная энергия преобладает над кинетической. В случае движения с энергией  $E \approx 2mga$ , рассмотренного в предыдущем разделе, большую часть периода маятник медленно движется в окрестности перевернутого положения, где потенциальная энергия имеет почти максимальное значение  $2mga = 2J\omega_0^2$ , и только на сравнительно короткое время, пока маятник быстро проходит нижнюю часть своего кругового пути, потенциальная энергия превращается в кинетическую.

Для теоретической оценки отношения средних за период значений потенциальной и кинетической энергий маятника при  $E \approx 2mga$  можно принять, что большую часть времени угловая скорость маятника практически равна нулю, а на протяжении сравнительно короткого времени движения угловая скорость  $\dot{\varphi}(t)$  зависит от времени почти так же, как и при лимитационном движении, т. е. в соответствии с (3.14). Поэтому для острого импульса кинетической энергии на графике  $E_{\text{kin}}(t)$  можно взять аналитическую зависимость от времени, характерную для лимитационного движения. Так как крылья этого импульса спадают экспоненциально, среднее за период значение кинетической энергии можно вычислять, распространяя пределы интегрирования до  $\pm\infty$ :

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{J}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{\varphi}^2(t) dt \approx \frac{J}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}^2(t) dt = \frac{J}{T} \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\varphi}(\varphi) d\varphi. \quad (3.26)$$

Здесь учтено, что на период колебаний  $T$  приходятся два импульса кинетической энергии. Интегрирование по времени в (3.26) заменено интегрированием по углу отклонения. Из (3.26) следует, что средняя кинетическая энергия  $\langle E_{\text{kin}} \rangle$  в этом движении пропорциональна площади  $S$  фазовой плоскости, ограниченной сепаратрисой:  $2\langle E_{\text{kin}} \rangle = JS/T$ . Для  $\dot{\varphi}(\varphi)$  можно воспользоваться выражением (3.11), справедливым для движения по сепаратрисе:

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{J}{T} 2\omega_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{4}{\pi} J \omega_0^2 \frac{T_0}{T}. \quad (3.27)$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемом движении полная энергия  $E$  приблизительно равна  $2mga = 2J\omega_0^2$  и что  $E_{\text{pot}} = E - E_{\text{kin}}$ , для отношения средних энергий получаем:

$$\frac{\langle E_{\text{pot}} \rangle}{\langle E_{\text{kin}} \rangle} = \frac{2J\omega_0^2}{\langle E_{\text{kin}} \rangle} - 1 = \frac{\pi}{2} \frac{T}{T_0} - 1. \quad (3.28)$$

В случае  $\varphi_m = 179.99^\circ$  период колебаний равен  $6.83 T_0$ . Из (3.26) находим, что при колебаниях с такой амплитудой отношение средней потенциальной энергии маятника к средней кинетической энергии равно 9.7.

### 3.1.10 Влияние трения

При наличии вязкого трения фазовый портрет маятника претерпевает качественные изменения. Становится другой топология фазовых траекторий — сравните рисунки 3.8 и 3.2.

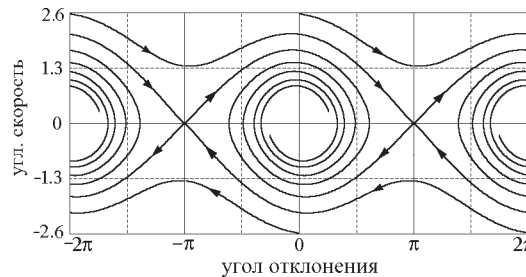


Рис. 3.8: Фазовый портрет маятника с трением.

Проходящая выше сепаратрисы фазовая траектория, соответствующая вращению маятника против часовой стрелки, с каждым проходом (с каждым оборотом маятника) снижается и приближается к сепаратрисе. Траектория, которая у консервативного маятника проходила вдоль

верхней ветви сепаратрисы, теперь не достигает седловой точки  $(\pi, 0)$ , и превращается в спираль, навивающуюся на фокус, расположенный в начале координат. Внутренняя часть этой спирали, соответствующая малым затухающим колебаниям, подобна фазовой траектории линейного осциллятора с вязким трением.

В случае достаточно слабого вязкого трения можно сделать некоторые теоретические предсказания, касающиеся фазовых траекторий, проходящих вблизи сепаратрисы. Например, возможно оценить минимальную угловую скорость, которую необходимо сообщить маятнику в нижней точке (или в любой другой точке) для того, чтобы он достиг перевернутого положения. Для расчета работы силы трения в этом случае можно принять, что движение происходит по сепаратрисе и считать, что зависимость угловой скорости от угла отклонения приближенно выражается уравнением сепаратрисы (3.11). Момент силы трения пропорционален угловой скорости:  $N_{\text{тр}} = -2\gamma J\dot{\varphi}$ . Подставляя сюда угловую скорость  $\dot{\varphi}$  из (3.11), получаем:

$$N_{\text{тр}} = \mp 4\gamma J\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2} = \mp \frac{2mga}{Q} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Этим выражением воспользуемся для вычисления работы сил трения  $W_{\text{тр}}$  при движении маятника из начального положения  $\varphi_0$  в конечное перевернутое положение  $\varphi = \pm\pi$ :

$$W_{\text{тр}} = \int_{\varphi_0}^{\pm\pi} N_{\text{тр}} d\varphi = -4 \frac{mga}{Q} \left( 1 \mp \sin \frac{\varphi_0}{2} \right). \quad (3.29)$$

Начальную скорость  $\Omega$ , необходимую для достижения перевернутого положения, можно найти с помощью закона сохранения энергии, учитывая в нем работу сил трения  $W_{\text{тр}}$ :

$$\frac{1}{2} J\Omega^2 + mga(1 - \cos \varphi_0) + W_{\text{тр}} = 2mga.$$

Подставляя сюда  $W_{\text{тр}}$  из Eq. (3.29), получаем искомое выражение для  $\Omega$ :

$$\Omega^2 = 2\omega_0 \left[ 1 + \cos \varphi_0 + \frac{4}{Q} \left( 1 \mp \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \right]. \quad (3.30)$$

При  $\varphi_0 \neq 0$  знак в выражении (3.30) зависит от направления начальной скорости. Нужно взять верхний знак, если маятник движется к перевернутому положению по кратчайшему пути, и нижний знак, если он сначала проходит через нижнее положение устойчивого равновесия. Другими словами, при  $\varphi_0 > 0$  нужно взять верхний знак для положительных значений  $\Omega$ , и нижний знак в противном случае. Когда движение маятника возбуждается из нижнего положения ( $\varphi_0 = 0$ ), уравнение (3.30) дает следующую оценку необходимой начальной скорости:

$$\Omega = \pm 2\omega_0 \sqrt{1 + 2/Q} \approx \pm 2\omega_0 (1 + 1/Q).$$

Точное значение  $\Omega$  будет немного большим, что легко понять, так как движение маятника к перевернутому положению происходит в фазовой плоскости хоть и близко к сепаратрисе, но все же вне ее, где угловая скорость чуть больше. Поэтому фактическая работа сил трения несколько больше рассчитанного значения (3.29). Например, для  $Q = 20$  вышеприведенная оценка дает  $\Omega = \pm 2.1\omega_0$ , а более точное экспериментальное значение, полученное методом проб и ошибок, равно  $\pm 2.10096\omega_0$ .

На рис. 3.9 показаны графики  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  для аналогичного случая, когда сообщаемая в нижней точке начальная скорость выбрана так, чтобы маятник достиг перевернутого положения (и надолго там задержался) после совершения полутора оборотов.

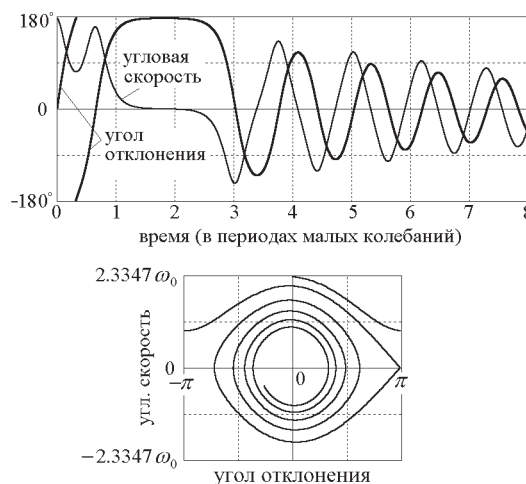


Рис. 3.9: Перевороты и последующие колебания жесткого маятника с трением ( $Q = 20$ ), которому в положении равновесия сообщена начальная скорость  $\Omega = 2.3347 \omega_0$ .

## 3.2 Контрольные вопросы и задачи

### 3.2.1 Малые колебания маятника

**1.1 Амплитуда, фазовая траектория и энергия малых колебаний.** При малых углах отклонения, когда  $\sin \varphi \approx \varphi$ , возвращающий момент силы тяжести приблизительно пропорционален углу отклонения от положения устойчивого равновесия, и маятник ведет себя подобно линейному осциллятору. В отсутствие трения он совершает простые гармонические колебания. При наличии слабого трения движение маятника можно рассматривать как почти гармоническое колебание с медленно убывающей амплитудой. Выберите полное отсутствие трения и задайте какие-либо начальные условия, обеспечивающие колебания малой амплитуды. Например, пусть начальное отклонение будет равно 30 градусам, а начальная угловая скорость равна нулю. В таком случае амплитуда колебаний составит 30 градусов.

(а) Чему равно максимальное значение скорости в этих колебаниях? Проверьте результат в моделирующем эксперименте.

(б) Какую начальную скорость нужно сообщить маятнику, находящемуся в положении равновесия ( $\varphi(0) = 0$ ), чтобы получить колебания той же амплитуды (30 градусов)? Проверьте свой результат в моделирующем эксперименте. Напоминаем, что начальная угловая скорость должна задаваться при вводе в единицах угловой частоты  $\omega_0$  собственных малых колебаний маятника. Чем отличаются такие колебания от колебаний той же амплитуды, возбуждаемых начальным отклонением?

(в) Убедитесь, что при малых амплитудах графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости имеют форму, близкую к синусоидальной. Убедитесь также, что колебания скорости опережают по фазе колебания угла отклонения на четверть периода. Сопоставьте графики угла отклонения и угловой скорости с движением изображающей точки по фазовой плоскости. Какую форму имеет фазовая траектория малых колебаний маятника? При каком масштабе по оси ординат фазовая траектория малых колебаний будет изображаться окружностью на фазовой плоскости?

(г) Что можно сказать о зависимости от времени кинетической и потенциальной энергий маятника, совершающего малые колебания? Докажите, что средние по времени значения кинети-

ческой и потенциальной энергий (за период) приближенно одинаковы. Если амплитуда равна 30 градусам, то чему равно отношение полной энергии маятника  $E$  к максимально возможному значению потенциальной энергии  $E/E_{\max}$ ?

### 1.2\* Период малых колебаний.

На графиках зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости, получаемых в моделирующей программе, деления на шкале времени (метки времени) показаны в естественных для маятника единицах, а именно, в единицах периода колебаний предельно малой амплитуды  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ . Таким образом, промежутки между метками времени на осях равны  $T_0$ .

(а) Обратите внимание, что при малых, но конечных амплитудах (скажем, около 30 градусов) период колебаний немного превышает значение  $T_0$ . Судить об этом можно либо по графикам на экране, либо по показаниям таймера. В последнем случае можно остановить моделирование (кнопкой «Пауза» или нажатием пробела) и прочитать показание таймера в момент, когда маятник совершит целое число циклов. Чтобы было удобно снимать дальнейшие показания таймера, во время паузы можно сбросить показания таймера кнопкой «Сброс таймера». Попробуйте измерить (в единицах  $T_0$ ) период колебаний маятника для нескольких умеренных значений амплитуды.

(б) Какие моменты следует выбирать для снятия показаний таймера (для остановки и пуска моделирования) при экспериментальных измерениях периода колебаний: когда маятник проходит через положение равновесия или когда он достигает положений наибольшего отклонения? Мотивируйте свой ответ. При выполнении измерений периода колебаний нужно снять показание таймера при прохождении маятником определенного положения (например, положения равновесия). Но практически невозможно зафиксировать показание таймера (остановить моделирование) точно в нужный момент. В этом заключается неизбежная причина погрешности измерений. Предложите способ измерения периода колебаний, при использовании которого можно добиться значительного уменьшения погрешности, которая обусловлена указанной причиной.

(в) Сравните экспериментально измеренные значения периода  $T$  для заданного значения амплитуды колебаний  $\varphi_0$  со значениями периода, рассчитанными по приближенной теоретической формуле

$$T = T_0(1 + \varphi_0^2/16), \quad (3.31)$$

где амплитуда  $\varphi_0$  выражена в радианах. Составьте таблицу экспериментальных и теоретических значений периода для амплитуд 30, 45, 60, 90, 120, 135 и 150 градусов. Найдите максимальное значение амплитуды  $\varphi_0$ , вплоть до которого ошибка теоретической формулы (3.31) не превышает одного процента. Какую ошибку дает эта формула при амплитуде 45 градусов? Как можно получить эту приближенную теоретическую формулу? (Приведите ее вывод в отчете.)

### 1.3 Затухание малых колебаний.

(а) Покажите теоретически, что малое трение приводит к экспоненциальному затуханию собственных колебаний маятника. При каком значении добротности  $Q$  амплитуда уменьшается вдвое за четыре полных цикла колебаний? Введите рассчитанное значение добротности и проверьте результат в моделирующем эксперименте на компьютере.

(б) Убедитесь, что в случае очень сильного вязкого трения, характеризуемого значениями добротности  $Q$  ниже критического значения 0.5, выведенный из положения равновесия маятник возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. Может ли маятник пересечь положение равновесия? В чем заключается основное качественное различие фазовых траекторий маятника в случаях слабого и очень сильного затухания?

### 3.2.2 Колебания с большими амплитудами

#### 2.1 Сравнение маятника с линейным осциллятором.

При больших углах отклонения от положения равновесия сильнее проявляется нелинейный характер зависимости возвращающего момента силы тяжести от угла отклонения  $\varphi$ . Поскольку  $\sin \varphi < \varphi$ , увеличение возвращающего момента с ростом угла отклонения у маятника происходит в меньшей степени, чем у линейного осциллятора. Поэтому маятник относится к нелинейным колебательным системам с «мягкой» возвращающей силой.

(а) Каким образом упомянутое различие между маятником и линейным осциллятором проявляется в графиках зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости? Как эти различия проявляются на фазовой траектории? Приведите качественное физическое объяснение этих различий.

(б) Какие различия между маятником и линейным осциллятором можно наблюдать в характере превращений энергии при колебаниях? Сопоставьте фазовую траекторию маятника с графиком потенциальной энергии от угла отклонения (с потенциальной ямой маятника). Для такого сопоставления особенно удобно использовать взаимное расположение фазовой плоскости и потенциальной ямы на экране компьютера в окне «Превращения энергии» (это окно можно открыть, выбирая соответствующий пункт из меню «Экран»). Обратите внимание на взаимное расположение точек поворота (точек максимальных отклонений) на фазовой плоскости и в потенциальной яме маятника. При заданных начальных условиях ( $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = \Omega$ ), чему равны значения потенциальной и кинетической энергий маятника в крайних точках и в положении равновесия (в отсутствие трения)?

#### 2.2\* Колебания маятника с большими амплитудами.

(а) Исследуйте экспериментально большие колебания маятника в отсутствие трения. Обратите внимание на строго периодический характер графиков динамических переменных при этих отчетливо несинусоидальных колебаниях в консервативной нелинейной системе. Когда амплитуда колебаний несколько превышает 90 градусов, график зависимости угловой скорости от времени имеет пилообразную форму с почти прямолинейными равносторонними треугольными зубцами. Объясните, почему. В этом случае соответствующий график зависимости угла отклонения от времени состоит из зубцов почти параболической формы, в противоположность синусоидальной форме при колебаниях с малой амплитудой. Объясните параболическую форму зубцов в этом случае. Обратите внимание на возрастание периода колебаний при увеличении амплитуды (соседние деления на шкале времени разделены интервалом  $T_0$ , равным периоду предельно малых колебаний маятника).

(б) Обратите внимание на то, как замкнутые фазовые траектории колебаний консервативного маятника вытягиваются в горизонтальном направлении по мере увеличения энергии маятника. Объясните, почему наблюдается (возрастающее с энергией) отличие этих фазовых траекторий от эллиптических (или круговых) фазовых траекторий линейного осциллятора. Для такого объяснения воспользуйтесь сравнением параболической потенциальной ямы линейного осциллятора с синусоидальной потенциальной ямой маятника. Примите, что вблизи дна обе потенциальные ямы имеют одинаковую кривизну, т. е. что период  $T_0$  малых колебаний маятника равен периоду колебаний соответствующего линейного осциллятора. Напомним, что период колебаний линейного осциллятора не зависит от амплитуды (и энергии).

(в) При больших амплитудах колебаний маятник сравнительно быстро проходит окрестность положения равновесия (дно потенциальной ямы), затем медленно взбирается на пологий, почти горизонтальный склон верхней части синусоидального барьера, разделяющего соседние потенциальные ямы, а затем также медленно сползает с него. Таким образом, маятник проводит при больших отклонениях гораздо больше времени, чем линейный осциллятор, параболические бе-



рега потенциальной ямы которого имеют неуклонно возрастающую крутизну. Основываясь на сравнении формы эти потенциальных ям, объясните, почему средние за период колебаний значения потенциальной и кинетической энергии маятника не равны друг другу (в то время как у линейного осциллятора средние за период колебаний значения кинетической и потенциальной энергии одинаковы).

(г)\* Тщательно изучите экспериментально интересный случай колебаний с амплитудой, близкой к  $180^\circ$ . Задайте начальное отклонение  $179.999^\circ$  при нулевой начальной скорости. Маятник довольно долго находится с одной стороны перевернутого неустойчивого положения равновесия, затем постепенно ускоряется и сравнительно быстро проходит через дно потенциальной ямы (через устойчивое положение равновесия), затем медленно подходит к перевернутому положению с другой стороны, и надолго застревает в таком положении. Сравните время, в течение которого маятник проходит почти весь круговой путь (за исключением малой окрестности перевернутого положения) от одной стороны перевернутого положения до другой, с периодом малых колебаний маятника. Другими словами, оцените длительность уединенного импульса на графике зависимости угловой скорости от времени. Или, что то же самое, оцените длительность крутого почти вертикального участка (размытие ступеньки) на почти прямоугольном графике зависимости угла отклонения от времени.

(д)\* Попробуйте определить, каким фактором определяется ширина (длительность) этих почти прямоугольных зубцов графика временной зависимости угла отклонения. Или, что то же самое, каким фактором определяется интервал времени между двумя последовательными импульсами на графике зависимости угловой скорости от времени. Иначе говоря, попробуйте определить физическую причину, определяющую полный период таких необычных колебаний консервативного маятника. (Подсказка: измерьте период колебаний последовательно для значений начального отклонения  $179.999^\circ$ ,  $179.990^\circ$ , и  $179.900^\circ$  градусов, каждый раз при нулевой начальной скорости.

(е)\*\* Попробуйте оценить теоретически промежуток времени, в течение которого маятник достигает положения крайнего отклонения  $179.99^\circ$  при возбуждении из положения равновесия сообщением начальной угловой скорости, необходимой для достижения такого максимального отклонения. Полученный результат используйте для оценки периода колебаний маятника с амплитудой  $179.99^\circ$ . Сравните Вашу теоретическую оценку с периодом колебаний, измеренным в моделирующем эксперименте.

(ж)\*\* Обратите внимание на характер превращений энергии в рассмотренном выше движении. Полная энергия маятника  $E$  в этом движении почти равна высоте  $2mga$  потенциального барьера, т. е. значению потенциальной энергии маятника в перевернутом положении ( $\varphi = \pm\pi$ ). Большую часть периода таких колебаний маятник проводит в окрестности перевернутого положения, так как он очень медленно движется и медленно ускоряется вблизи перевернутого положения. Поэтому среднее за полный период таких колебаний значение потенциальной энергии маятника много больше среднего значения его кинетической энергии. В таких колебаниях потенциальная энергия маятника превращается в кинетическую энергию лишь на короткое время, пока маятник быстро проходит через нижнее положение равновесия (через минимум потенциальной энергии). Попробуйте сделать теоретическую оценку отношения средних (за период колебаний) значений потенциальной и кинетической энергии для амплитуды  $179.99$  градусов.

### 2.3\* Движение вдоль сепаратрисы.

(а) Когда маятнику задают начальное отклонение, близкое к  $180$  градусам, при нулевой начальной скорости, фазовая траектория результирующего движения почти совпадает с сепаратрисой  $\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi/2)$ . Точка, изображающая механическое состояние маятника в фазовой плоскости, быстро проходит вдоль нижней ветви сепаратрисы, надолго застревает около левой

седловой точки  $(-\pi, 0)$ , а затем возвращается вдоль верхней ветви сепаратрисы. Как нужно задать начальные условия, чтобы изображающая точка сначала проходила бы вдоль верхней ветви сепаратрисы, а затем вдоль нижней ветви? Только вдоль верхней ветви?

(б) Какую начальную скорость  $\Omega$  (в единицах  $\omega_0$ ) нужно сообщить маятнику в нижнем положении равновесия для того, чтобы изображающая точка двигалась вдоль сепаратрисы фазовой плоскости? Какую начальную скорость нужно для этого сообщить маятнику, отклоненному из положения равновесия на угол  $60^\circ$ ?  $90^\circ$ ?  $-90^\circ$ ?  $120^\circ$ ? Проверьте свои результаты в моделирующем эксперименте.

(в) Для лимитационного движения (движения по сепаратрисе) рассчитайте интервал времени  $\tau$ , на протяжении которого кинетическая энергия маятника превосходит его потенциальную энергию. Или, что то же самое, найдите время, в течение которого маятник проходит от одного горизонтального положения до другого, совершая круговой путь от одной стороны перевернутого положения до другой через нижнее положение равновесия. Выразите этот интервал времени в единицах  $T_0$  периода малых колебаний маятника. Проверьте свой теоретический результат в моделирующем эксперименте на компьютере.

#### 2.4 Колебания с большими амплитудами при наличии трения.

(а) Исследуйте влияние вязкого трения на колебания с большими амплитудами. Начните со случая сравнительно слабого трения (скажем,  $Q \approx 20$ ). Обратите внимание на изменение формы графиков по мере того, как механическая энергия маятника и амплитуда постепенно уменьшаются из-за трения. В частности, обратите внимание на то, как первоначально пилообразная кривая графика угловой скорости (с ее острыми почти прямолинейными треугольными зубцами) и первоначальная кривая графика угла отклонения (с почти параболическими зубцами) постепенно эволюционируют, приближаясь по форме к синусоидальным кривым, характерным для гармонического осциллятора.

(б) Под влиянием вязкого трения изменяется топология фазовых траекторий маятника. Вместо замкнутых кривых, соответствующих строго периодическим колебаниям консервативного маятника, мы видим скручивающиеся спирали, совершающие бесконечное число постепенно сжимающихся витков вокруг фокуса, расположенного в начале координат фазовой плоскости. Обратите внимание на то, как постепенно изменяется форма витков фазовой траектории по мере того, как они отдаляются от сепаратрисы. Приведите качественное объяснение наблюдаемым изменениям. Напомним, что в случае линейного осциллятора вязкое трение приводит к сжатию витков фазовой траектории, при котором сохраняется геометрическое подобие витков в процессе приближения фазовой кривой к началу координат.

(в) Работая в окне программы «Превращения энергии», обратите внимание на то, как скорость диссипации механической энергии зависит от положения изображающей точки в потенциальной яме маятника. В какой момент на протяжении цикла колебаний скорость диссипации механической энергии максимальна? Мотивируйте свой ответ.

(г)\*\* С помощью закона сохранения энергии рассчитайте минимальное значение начальной угловой скорости, которую нужно сообщить маятнику в нижнем положении равновесия для того, чтобы он достиг перевернутого положения (неустойчивого равновесия) в случае полного отсутствия трения, и при слабом трении, когда добротность  $Q$  равна 20. Какую начальную скорость нужно сообщить маятнику для достижения перевернутого положения, если первоначально он был отклонен из положения устойчивого равновесия на угол  $60^\circ$ ? На угол  $90^\circ$ ?

### 3.2.3 Перевороты и вращения маятника

Маятник вращается (совершает полные обороты), если его полная энергия превышает  $2mga$ , т. е. превышает максимальное значение потенциальной энергии, соответствующее перевернутому положению. Влияние поля тяжести сказывается в том, что вращение маятника в вертикальной плоскости происходит неравномерно: угловая скорость максимальна (при полном отсутствии трения) в те моменты, когда маятник проходит через нижнее положение устойчивого равновесия, и минимальна, когда он проходит через верхнее положение неустойчивого равновесия.

#### 3.1 Угловая скорость при переворотах маятника.

(а) Выберите полное отсутствие трения. Рассчитайте минимальное значение начальной угловой скорости, которую нужно сообщить маятнику в нижнем положении равновесия, чтобы маятник совершил полный переворот. Обратите внимание на характер графика зависимости угловой скорости от времени при движении с начальной скоростью, превышающей это минимальное значение: когда маятник совершает перевороты, его угловая скорость изменяется периодически (т. е. угловая скорость осциллирует со временем), но знак угловой скорости (направление вращения) не изменяется, и график не пересекает ось времени.

(б)\* Как изменится период этих колебаний угловой скорости, если увеличить начальную скорость, сообщаемую маятнику при возбуждении? Рассчитайте минимальное значение угловой скорости при переворотах маятника для заданного значения  $\Omega$  начальной угловой скорости. Найдите асимптотическое поведение периода вращения от начальной угловой скорости  $T(\Omega)$  для значений полной энергии  $E$ , значительно превышающих потенциальную энергию перевернутого маятника ( $E \gg 2mga$ ). Сделайте теоретическую оценку периода вращения маятника, которому в нижней точке сообщена угловая скорость, равная 3 единицам угловой частоты малых колебаний. Проверьте результат расчета в моделирующем эксперименте.

(в) Какие начальные условия нужно ввести в моделирующем эксперименте для того чтобы получить фазовую траекторию, проходящую над сепаратрисой? Расположенную ниже сепаратрисы? Совпадающую с верхней или с нижней ветвью сепаратрисы?

#### 3.2\* Периоды переворотов и больших колебаний.

(а) Особенно интересно сравнить период переворотов маятника в отсутствие трения с периодом колебаний того же консервативного маятника в случае, когда полная энергия  $E$  близка к максимально возможному значению потенциальной энергии  $E_{\max} = 2mga$ . В этом случае фазовые траектории переворотов и колебаний проходят в окрестности сепаратрисы. Используя моделирующий эксперимент, выполните измерение периода для двух значений полной энергии  $E$ , которые слегка отличаются от  $E_{\max}$  на одну и ту же величину в большую и меньшую сторону. Например, возьмите сначала  $E/E_{\max} = 0.9999$  а затем  $E/E_{\max} = 1.0001$ .

Для выполнения подобных измерений удобно воспользоваться окном программы «Фазовый портрет маятника». В этом окне моделирование движения маятника (при заданном значении полной энергии) и построение графиков останавливается автоматически по завершении одного цикла движения маятника. Поэтому окончательное показание таймера дает интересующее нас значение периода данного движения (в единицах периода  $T_0$  предельно малых колебаний), и не возникает дополнительных ошибок, связанных с трудностями ручной остановки таймера в нужный момент. В правом нижнем углу окна находится таблица, в которую автоматически заносятся значения амплитуд и периодов  $T$ , получаемые при выполнении моделирующих экспериментов при заданных Вами значениях полной энергии  $E$ . С помощью этой таблицы можно получить количественную зависимость периода от энергии  $T(E)$ .

(б)\* Чему равно отношение измеренных Вами периодов движения маятника для этих двух случаев? Как можно объяснить наблюдаемое отношение периодов?

(в)\*\* Попытайтесь получить теоретическую оценку периода колебаний маятника с полной энергией  $E/E_{\max} = 0.9999$ , и периода вращения маятника с полной энергией  $E/E_{\max} = 1.0001$ .

(г)\*\* Когда полная энергия маятника  $E$  превышает высоту потенциального барьера  $E_{\max} = 2mga$ , период вращения  $T$  быстро убывает при увеличении полной энергии маятника. Найдите асимптотическое поведение периода  $T(E)$  при стремлении энергии  $E$  к бесконечности.

### 3.3\* Перевороты маятника при наличии трения.

(а) Изучите экспериментально вращение маятника при наличии слабого вязкого трения. Обратите внимание на то, как фазовая траектория постепенно приближается к сепаратрисе. Какое значение имеет полная энергия маятника в тот момент, когда фазовая траектория пересекает сепаратрису? Обратите внимание на то, что до пересечения сепаратрисы, пока маятник совершает полные перевороты, кинетическая энергия и угловая скорость нигде не обращаются в нуль.

(б)\*\* Используя закон сохранения энергии, оцените минимальную начальную угловую скорость, которую необходимо сообщить маятнику в нижнем положении равновесия для того чтобы он совершил полный оборот. Добротность маятника  $Q = 15$ . Какая начальная угловая скорость нужна для того чтобы маятник совершил два оборота? Проверьте свои расчеты в моделирующем эксперименте. Методом проб и ошибок уточните полученную оценку необходимой минимальной скорости. Объясните наблюдаемое небольшое различие теоретического и экспериментального значений минимальной начальной скорости.

## 3.2.4 Приложение: Сводка основных формул

Дифференциальное уравнение движения маятника:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0,$$

где  $\omega_0$  — частота колебаний предельно малой амплитуды:

$$\omega_0^2 = \frac{mga}{J} = \frac{g}{l}; \quad l = \frac{J}{ma}.$$

Здесь  $m$  — масса маятника,  $a$  — расстояние между горизонтальной осью (точкой подвеса) и центром масс,  $J$  — момент инерции относительно оси вращения,  $l = J/ma$  — приведенная длина физического маятника и  $g$  — ускорение свободного падения.

Уравнение фазовой траектории в отсутствие трения:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{\omega_0^2} + 2(1 - \cos \varphi) = \frac{E}{E_0},$$

где  $E$  — полная энергия маятника, а

$$E_0 = \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}mga = \frac{1}{4}(E_{\text{pot}})_{\max}.$$

Здесь  $(E_{\text{pot}})_{\max} = 2mga$  — максимально возможное значение потенциальной энергии, которое маятник имеет в перевернутом вертикальном положении.

Уравнение сепаратрисы в фазовой плоскости имеет вид:

$$\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi/2).$$

Зависимость угла отклонения и угловой скорости маятника для лимитационного движения (движения по сепаратрисе):

$$\varphi(t) = \pi - 4 \arctan(e^{-\omega_0 t}), \quad \dot{\varphi}(t) = \pm \frac{2\omega_0}{\cosh(\omega_0 t)} = \pm \frac{4\omega_0}{(e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t})}.$$

## Глава 4

# Вынужденные колебания линейного осциллятора

В этой главе изучается движение линейного механического осциллятора под действием синусоидальной вынуждающей силы. Используется такая же модель торсионного осциллятора, что и при изучении собственных колебаний — уравновешенный маховик со спиральной пружиной. Рассматривается кинематический способ возбуждения колебаний, когда одна из частей системы совершает заданное периодическое движение. Изучаются установившиеся вынужденные колебания и переходные процессы установления колебаний. Выполняется разложение переходного процесса на сумму синусоидальных колебаний на частоте внешнего воздействия и затухающих колебаний на собственной частоте осциллятора.

### 4.1 Теоретические сведения

#### 4.1.1 Общие положения

В соответствии с принятой классификацией колебаний по способу их возбуждения, колебания называют *вынужденными*, когда осциллятор подвергается внешнему периодическому воздействию, которое приводит к появлению в дифференциальном уравнении системы дополнительного члена в виде заданной периодической функции времени. Нас будет интересовать реакция осциллятора на это периодическое внешнее воздействие.

Поведение колебательной системы под действием периодических внешних сил представляет собой один из наиболее важных вопросов в теории колебаний. Самая замечательная особенность вынужденных колебаний заключается в явлении *резонанса*, когда сравнительно слабое периодическое внешнее воздействие может вызвать чрезвычайно сильную реакцию осциллятора. Резонанс очень часто встречается в физике и находит множество различных интересных применений.

Резонанс определяется не значением внешней силы в какой-то момент, а всем видом функциональной зависимости внешнего воздействия от времени на большом интервале. В случае собственных колебаний в замкнутой системе внешнее воздействие, необходимое для выведения системы из равновесия и возбуждения колебаний, вообще не оставляет никаких следов в дифференциальном уравнении колебаний. Это воздействие лишь обеспечивает определенные начальные условия и заканчивается к некоторому моменту времени, рассматриваемому как начальный момент для дальнейших собственных колебаний. Этим начальным состоянием определяется амплитуда и фаза последующих собственных затухающих колебаний, а их частота (и быстрота за-

тухания) определяются исключительно свойствами самого осциллятора, т. е. совершенно не зависят от характеристик возбуждающего внешнего воздействия. Напротив, вынужденные колебания, происходящие при постоянном действии периодической внешней силы, зависят не только и не столько от начальных условий, сколько от характеристик внешнего воздействия, а именно от амплитуды и (главным образом) от частоты внешней силы.

### 4.1.2 Модель физической системы

Для изучения закономерностей вынужденных колебаний мы используем такой же механический осциллятор, что и при изучении собственных колебаний — уравновешенный инертный маховик (стержень с грузами) на упругой спиральной пружине, обеспечивающей ему устойчивое положение равновесия. Такое устройство напоминает балансовый механизм механических наручных часов. Но теперь второй конец пружины не закреплен неподвижно, а соединен с шатуном, который можно поворачивать в одну и в другую сторону вокруг общей с маховиком оси. Рисунок 4.1 дает представление о схематическом изображении осциллятора с возбуждающим шатуном на экране компьютера в моделирующей программе.

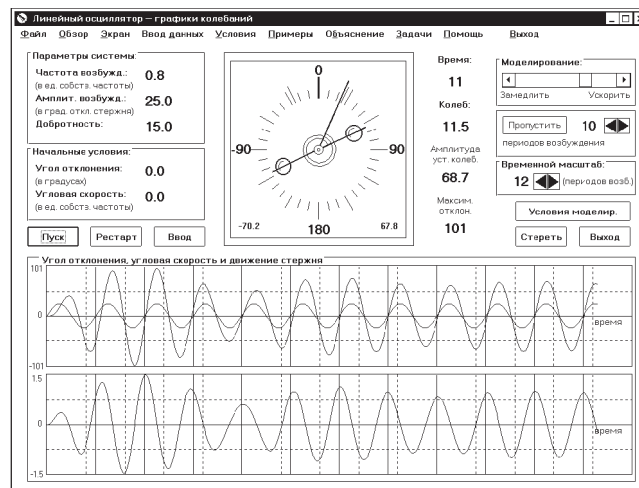


Рис. 4.1: Торсионный пружинный осциллятор, возбуждаемый заданным периодическим движением шатуна, к которому прикреплена спиральная пружина.

Такая механическая система идеально подходит для изучения вынужденных колебаний и явления резонанса, потому что на этом примере можно непосредственно видеть все, что происходит. При повороте шатуна положение равновесия ротора (маховика) смещается вместе с шатуном на такой же угол. Около нового положения равновесия ротор может совершать затухающие колебания на собственной частоте. При слабом и умеренном трении частота этих колебаний близка к частоте  $\omega_0$  собственных колебаний маховика в отсутствие трения. Эта частота определяется жесткостью  $D$  пружины и моментом инерции  $J$  маховика:  $\omega_0 = \sqrt{D/J}$ .

Если шатуну принудительно сообщить периодическое колебательное движение, то на осциллятор будет действовать периодическая внешняя сила. Такое воздействие дает пример *кинематического возбуждения* колебаний, для которого характерно заданное движение какой-либо части колебательной системы. Кинематический способ возбуждения колебаний выбран здесь из-за своей наглядности: движение возбуждающего шатуна непосредственно наблюдается на экране. Компьютерное моделирование позволяет отчетливо видеть, скажем, сдвиг фаз между возбуждающим шатуном и ротором, соотношение их амплитуд, и многое другое.

В отличие от кинематического возбуждения, при *динамическом*, т. е. прямом силовом возбуждении, задается действующая на осциллятор внешняя сила, явно зависящая от времени и не зависящая от положения и скорости осциллятора. Прямой силовой способ возбуждения менее нагляден и труднее поддается визуализации, так как мы не в состоянии наблюдать силу непосредственно, а можем судить о ней лишь косвенно по ее влиянию на механическое движение. Но это влияние в данном случае далеко не очевидно: именно оно и составляет предмет нашего исследования. К тому же динамическое возбуждение труднее реализовать в чистом виде в натурном эксперименте. Тем не менее следует иметь в виду, что в большинстве учебников рассматривается именно силовое возбуждение вынужденных колебаний. Дифференциальные уравнения для силового и кинематического способов возбуждения колебаний одинаковы, но некоторые физические различия проявляются в характере энергетических превращений: при движении возбуждающего шатуна потенциальная яма осциллятора смещается вместе с шатуном, тогда как при силовом возбуждении эта яма неподвижна. Об этих различиях подробнее будет сказано ниже.

### 4.1.3 Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Пусть возбуждающий шатун принудительно совершает гармонические колебания около среднего положения (вертикального на рис. 4.1) с некоторой амплитудой  $\phi_0$  и угловой частотой  $\omega$ , так что угол его отклонения  $\phi(t)$  синусоидально зависит от времени:

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t. \quad (4.1)$$

Если в некоторый момент времени  $t$  маховик осциллятора отклонен от среднего положения (принятого за начало отсчета углов на шкале на рис. 4.1) на угол  $\phi$ , а стержень в этот момент смещен на угол  $\phi$ , то со стороны пружины на маховик действует момент сил  $-D(\varphi - \phi) = -D\varphi + D\phi_0 \sin \omega t$ . В самом деле, пружина в этот момент времени деформирована (закручена от равновесного состояния) на угол  $\varphi - \phi$ , а не на угол  $\varphi$ , как в случае свободных колебаний. Поэтому уравнение основного закона динамики для вращательного движения маховика с моментом инерции  $J$  в отсутствие трения имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi + D\phi_0 \sin \omega t. \quad (4.2)$$

Это уравнение можно рассматривать и как дифференциальное уравнение вынужденных колебаний торсионного пружинного осциллятора под действием приложенного к нему заданного внешнего момента  $D\phi_0 \sin \omega t$ , изменяющегося синусоидально с частотой  $\omega$  и неизменной амплитудой  $D\phi_0$ . Таким образом, кинематический и силовой способы возбуждения действительно описываются одним и тем же дифференциальным уравнением.

Разделив обе части уравнения (4.1a) на момент инерции маховика  $J$  и вводя обозначение  $\omega_0 = \sqrt{D/J}$  для частоты собственных колебаний ( $\omega_0^2 = D/J$ ), переписываем уравнение в канонической форме:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \omega_0^2 \phi_0 \sin \omega t. \quad (4.3)$$

При наличии вязкого трения, пропорционального скорости, мы должны добавить в уравнение движения тормозящий момент силы трения, пропорциональный  $\dot{\varphi}$ . Тогда вместо уравнения (4.2) будем иметь:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \omega_0^2 \phi_0 \sin \omega t. \quad (4.4)$$

Постоянная затухания  $\gamma$  характеризует интенсивность вязкого трения. Как и в случае собственных колебаний, вместо нее можно использовать эквивалентную безразмерную величину — добротность  $Q$ , определяемую соотношением  $Q = \omega_0/2\gamma$ . Таким образом, вынужденные колебания осциллятора описываются *неоднородным* линейным дифференциальным уравнением второго порядка, в отличие от собственных колебаний, для которых дифференциальное уравнение однородно, т. е. не содержит происходящей от внешней силы правой части в виде заданной функции времени. Положение рассматриваемой системы в любой момент времени определяется двумя угловыми координатами — углами  $\varphi$  и  $\phi$ . Но координата  $\phi$  — положение возбуждающего стержня — задана внешними условиями, она не свободна, так что в сущности второй степени свободы система не обладает. «Свободной» координатой, т. е. неизвестной функцией времени, является только угол  $\varphi$  отклонения ротора от среднего положения. Для нахождения этой функции достаточно одного дифференциального уравнения (4.4). Дифференциальное уравнение, соответствующее второй координате  $\phi$ , можно использовать для нахождения момента внешней силы, необходимой для обеспечения заданного движения шатуна. Источник такой силы всегда испытывает реакцию (обратное воздействие) со стороны шатуна.

#### 4.1.4 Принцип суперпозиции

Изучение вынужденных колебаний в *линейных* системах облегчается благодаря возможности использования *принципа суперпозиции*. В соответствии с этим принципом, при одновременном воздействии нескольких вынуждающих внешних сил вызываемые ими вынужденные колебания просто складываются. Иначе говоря, в линейных системах отсутствует взаимодействие (влияние друг на друга) колебаний, возбуждаемых несколькими одновременно действующими внешними источниками. Из принципа суперпозиции также следует, что линейный осциллятор может наряду с вынужденными колебаниями под действием внешней силы совершать одновременно и затухающие собственные колебания. Последним соответствует равное нулю слагаемое в правой части уравнения (4.3), которое всегда можно предполагать присутствующим там вместе с членом, обусловленным внешней силой. Эти затухающие собственные колебания возникают всякий раз при включении (и любом другом изменении) амплитуды или фазы внешней силы. Наложение затухающих собственных колебаний на вынужденные колебания постоянной амплитуды происходит в течение *переходного процесса* — процесса установления вынужденных колебаний после включения (или изменения) возбуждающей силы, пока вынужденные колебания обретают частоту внешней силы и постоянную амплитуду. Длительность этого переходного процесса в общем случае определяется временем затухания собственных колебаний, которые происходили бы в этой системе после начального возбуждения в отсутствие внешнего воздействия:  $\tau \approx 1/\gamma$ .

#### 4.1.5 Установившиеся вынужденные колебания

В течение некоторого времени после включения синусоидальной внешней силы (на протяжении переходного процесса) осциллятор успевает «забыть» свое начальное состояние, его колебания приобретают стационарный характер, и осциллятор в конце концов совершает незатухающие синусоидальные колебания на частоте внешнего воздействия — *установившиеся* вынужденные колебания. Эти установившиеся колебания описываются *периодическим* частным решением неоднородного дифференциального уравнения (4.4):

$$\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta). \quad (4.5)$$



Установившиеся колебания характеризуются определенными постоянными значениями амплитуды  $a$  и сдвига фаз  $\delta$  между колебаниями ротора осциллятора и возбуждающего шатуна. Величины  $a$  и  $\delta$  зависят от близости частоты внешнего воздействия  $\omega$  к собственной частоте осциллятора  $\omega_0$ . Зависимости  $a(\omega)$  и  $\delta(\omega)$  от частоты внешнего воздействия называют соответственно *амплитудно-частотной* и *фазо-частотной характеристиками* осциллятора. При относительно слабом трении (при  $\gamma \ll \omega_0$ , т. е.  $Q \gg 1$ ) зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты имеет ярко выраженный *резонансный характер* — амплитуда резко возрастает при приближении  $\omega$  к собственной частоте  $\omega_0$ . График зависимости амплитуды установившихся колебаний от частоты  $\omega$  называют резонансной кривой. Чем выше добротность  $Q$  осциллятора, тем острее пик резонансной кривой, т. е. тем сильнее выражены резонансные свойства осциллятора.

#### 4.1.6 Колебания в отсутствии трения

Когда частота вынуждающей силы  $\omega$  заметно отличается от собственной частоты  $\omega_0$ , можно пренебречь влиянием трения на амплитуду  $a$  и фазовый сдвиг  $\delta$  установившихся вынужденных колебаний. Другими словами, в таких условиях для описания поведения реальной системы с небольшим трением можно воспользоваться идеализированной моделью системы, в которой трение полностью отсутствует. (Отметим, что применимость физической модели к реальной системе зависит не только и не столько от свойств системы, сколько от характера решаемой задачи.) Таким образом, для описания установившихся колебаний в случае, когда  $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$ , можно воспользоваться уравнением (4.3), которое строго применимо к линейному осциллятору без трения. Периодическое частное решение этого уравнения, описывающее установившиеся вынужденные колебания, можно попытаться искать в виде:

$$\varphi(t) = a \sin \omega t. \quad (4.6)$$

Подставляя это выражение в уравнение (4.3), находим, что (4.6) дает решение уравнения (4.3) если амплитуда  $a(\omega)$  как функция частоты  $\omega$  имеет вид:

$$a(\omega) = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (4.7)$$

Если частота  $\omega$  равна нулю, выражение (4.7) дает  $a = \phi_0$ : маховик покоится в смещенном положении равновесия. Когда  $\omega \ll \omega_0$ , из (4.7) получаем  $a \approx \phi_0$ : при очень медленном движении шатуна маховик квазистатически следует за ним, оставаясь все время в положении равновесия, которое смещается поочередно вправо и влево вместе с шатуном. Таким образом, при очень низкой частоте кинематически возбуждаемые вынужденные колебания осциллятора совершаются с той же амплитудой и в той же фазе, что и колебания шатуна.

Выражение (4.7) показывает, что по мере роста частоты возбуждения  $\omega$  растет амплитуда вынужденных колебаний осциллятора, и эти колебания происходят в одинаковой фазе с колебаниями шатуна. Двигаясь в одном направлении, они оба одновременно пересекают среднюю точку и одновременно достигают своих крайних положений. Однако крайнее отклонение маховика  $a$  больше, чем крайнее отклонение  $\phi_0$  шатуна. При  $\omega \rightarrow \omega_0$  амплитуда колебаний маховика  $a$  стремится к бесконечности. Это значит, что вблизи резонанса (при  $\omega \approx \omega_0$ ) трением пренебрегать нельзя (см. ниже).

При  $\omega > \omega_0$  значение  $a$ , как видно из (4.7), становится отрицательным. Это означает, что при  $\omega > \omega_0$  установившиеся вынужденные колебания происходят в противофазе с внешней силой: когда шатун движется в одну сторону, маховик поворачивается в противоположную сторону, и

оба одновременно достигают своих крайних положений. Для этого случая решение также можно записать в форме (4.5), сохраняя положительные значения  $a$  для всех частот: просто под  $a$  в (4.5) нужно понимать модуль правой части выражения (4.7), а сдвиг фаз  $\delta$  положить равным нулю при  $\omega < \omega_0$  и  $-\pi$  при  $\omega > \omega_0$ .

### 4.1.7 Резонансные кривые

Вблизи резонанса (в области частот  $\omega$  удовлетворяющих условию  $|\omega - \omega_0| \leq \gamma$ ), необходимо учитывать трение в дифференциальном уравнении вынужденных колебаний, т. е. нужно решать уравнение (4.4). Установившиеся вынужденные колебания описываются его периодическим частным решением. Это решение можно искать в виде (4.5). Амплитуду  $a$  и фазу  $\delta$  можно найти, подставляя  $\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta)$  в (4.4) и приравнявая коэффициенты при  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  в левой и правой частях уравнения. Менее громоздкий способ определения  $a$  и  $\delta$  основан на использовании векторных диаграмм. Приведем здесь без вывода окончательные результаты:

$$a(\omega) = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \tan \delta(\omega) = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (4.8)$$

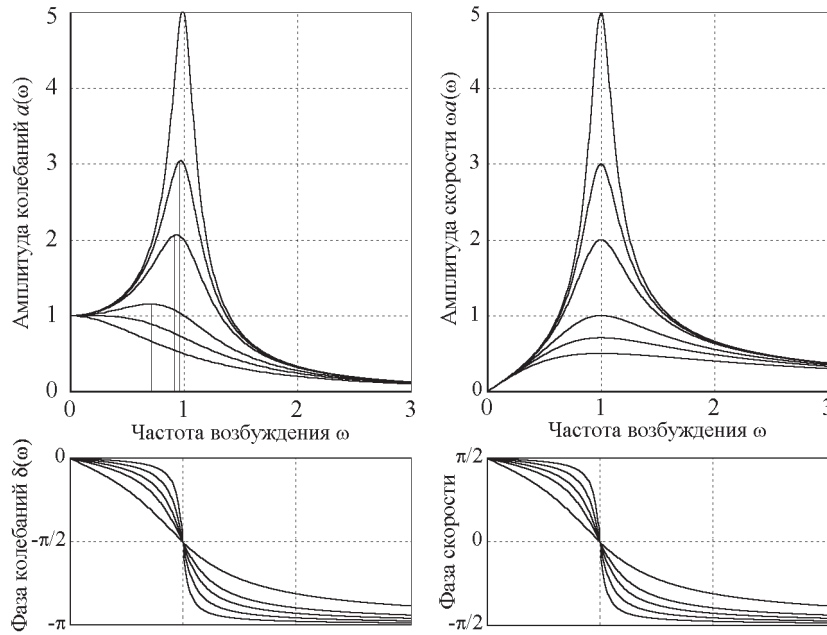


Рис. 4.2: Резонансные кривые линейного осциллятора.

Графики зависимости амплитуды от частоты  $a(\omega)$  (резонансные кривые, или амплитудно-частотные характеристики осциллятора) для нескольких значений добротности показаны в левой верхней части рис. 4.2. (По оси абсцисс отложена вынуждающая частота  $\omega$  в единицах собственной частоты  $\omega_0$ , т. е. отношение  $\omega/\omega_0$ , а по оси ординат — отношение амплитуды маховика к амплитуде вынуждающего шатуна  $a(\omega)/\phi_0$ ). Амплитуда установившихся колебаний достигает максимального значения на резонансной частоте  $\omega_{\text{res}}$ :

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (4.9)$$

Это выражение для  $\omega_{\text{res}}$  справедливо, если трение не слишком велико, а именно, если  $\omega_0 > \sqrt{2}\gamma$ . При малом трении, когда  $\gamma \ll \omega_0$  или  $Q \gg 1$ , из (4.9) находим приближенное выражение:

$$\omega_{\text{res}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right). \quad (4.10)$$

Из (4.10) видно, что при малом трении резонансная частота практически совпадает с собственной частотой осциллятора в отсутствие трения  $\omega_0$ : значение  $\omega_{\text{res}}$  отличается от  $\omega_0$  всего лишь на величину второго порядка по малому параметру  $\gamma/\omega_0$ . Например, при  $Q = 10$  (умеренное трение) резонансная частота отличается от частоты собственных колебаний только на 0.25%.

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний на резонансе определяется следующим выражением:

$$a_{\text{max}} = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \approx \frac{\omega_0 \phi_0}{2\gamma} = Q \phi_0. \quad (4.11)$$

Из (4.11) видно, что резонансная амплитуда  $a_{\text{max}}$  установившихся колебаний приблизительно в  $Q$  раз больше амплитуды  $\phi_0$  вынуждающего шатуна (при условии что добротность  $Q$  не слишком мала). Иначе об этом можно сказать так: амплитуда установившихся колебаний маховика при резонансе  $a_{\text{max}}$  в  $Q$  раз больше его амплитуды при очень низкой вынуждающей частоте  $\omega$  (при медленных колебаниях шатуна). Мы видим, что резонансный отклик осциллятора при вынужденных колебаниях характеризуется той же самой величиной — добротностью  $Q$ , — что и затухание собственных колебаний.

В отсутствие трения амплитуда  $a(\omega)$  установившихся вынужденных колебаний осциллятора превышает амплитуду возбуждающего шатуна  $\phi_0$  при всех частотах в интервале между  $\omega = 0$  и  $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ . Когда частота  $\omega = 0$  вынуждающей силы превышает собственную частоту  $\omega_0 = 0$  более чем в  $\sqrt{2}$  раз, амплитуда осциллятора становится меньше амплитуды шатуна  $\phi_0$  и стремится к нулю при дальнейшем увеличении частоты — инертный маховик не успевает следовать за быстрыми движениями шатуна. В этой области частот динамический эффект вынуждающей силы слабее, чем действие такой же, но статической силы. Все это справедливо и при наличии слабого трения, только граничная частота будет немного меньше чем  $\sqrt{2}\omega_0$ , о чем можно судить по графикам  $a(\omega)$  на рис. 4.2.

Фазо-частотные характеристики осциллятора, т. е. графики зависимости фазы вынужденных колебаний от частоты (точнее, графики сдвига фаз  $\delta(\omega)$  между вынужденными колебаниями ротора и возбуждающего шатуна), полученные из (4.8) для разных значений добротности  $Q$ , показаны в левой нижней части рис. 4.2. Из этих графиков видно, что установившиеся колебания всегда отстают по фазе от возбуждающей силы, поскольку сдвиг фаз  $\delta(\omega)$  отрицателен при всех частотах.

Вдали от резонанса при низкой частоте  $\omega \ll \omega_0$  запаздывание почти исчезает, т. е. маховик совершает колебания в фазе с шатуном. В случае  $\omega = \omega_0$  при любом трении колебания маховика отстают от колебаний возбуждающего стержня на четверть периода ( $\delta = -\pi/2$ ): когда маховик достигает крайних отклонений, стержень проходит через среднее положение, и наоборот. Когда  $\omega$  значительно превосходит  $\omega_0$ , сдвиг фаз  $\delta$  приближается к  $-\pi$ : запаздывание маховика по фазе составляет почти  $180^\circ$ . В этом случае маховик и шатун в любой момент движутся в противоположных направлениях. Они почти одновременно пересекают нулевое деление шкалы, и почти одновременно достигают своих противоположных крайних точек.

Как следует из (4.8), в отсутствие трения сдвиг фаз либо равен нулю (при  $\omega < \omega_0$ ), либо  $180^\circ$  (при  $\omega > \omega_0$ ). Таким образом, при  $\omega = \omega_0$  происходит скачкообразный переход от режима колебаний маховика в фазе с шатуном к режиму колебаний в противофазе. (В отсутствие трения

амплитуда маховика в точке этого перехода обращается в бесконечность.) При наличии трения, как можно видеть из рис. 4.2, переход от одного режима к другому происходит постепенно в некотором интервале частот в окрестности  $\omega_0$ . Ширина этого интервала частот пропорциональна постоянной затухания  $\gamma$ .

#### 4.1.8 Резонанс угловой скорости

При установившихся колебаниях под действием синусоидальной внешней силы угловая скорость маховика  $\dot{\varphi} = a\omega \cos(\omega t + \delta)$  изменяется со временем также по гармоническому закону с частотой  $\omega$  вынуждающей силы. Выражение для амплитуды угловой скорости  $\Omega = \dot{\varphi}$  отличается от  $a(\omega)$  (4.8) дополнительным множителем  $\omega$ :

$$\Omega(\omega) = \omega a(\omega) = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2/\omega - \omega)^2 + 4\gamma^2}}. \quad (4.12)$$

Как видно из (4.12), максимум резонансной кривой для скорости расположен точно при  $\omega = \omega_0$  для любых значений постоянной затухания  $\gamma$ . Поэтому резонанс угловой скорости всегда (при любом трении) происходит при совпадении частоты вынуждающей силы  $\omega$  с собственной частотой  $\omega_0$ , несмотря на то, что резонанс угла отклонения происходит при  $\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ . Резонансные кривые скорости для нескольких значений добротности приведены в правой верхней части рис. 4.2. В нижней правой части этого рисунка показаны кривые зависимости сдвига фаз между колебаниями угловой скорости маховика и колебаниями шатуна. При резонансе скорости, т. е. при  $\omega = \omega_0$ , этот сдвиг обращается в нуль — изменения скорости происходят в фазе с изменениями вынуждающей силы, что соответствует наиболее эффективной передаче энергии осциллятору от внешнего источника, приводящего в движение возбуждающий шатун.

#### 4.1.9 Энергетические превращения

Несмотря на то, что в установившихся вынужденных колебаниях амплитуда постоянна, энергия осциллятора остается постоянной только в среднем. В течение некоторой четверти периода колебаний энергия передается от возбуждающего шатуна к осциллятору, а в течение следующей четверти цикла энергия передается обратно от осциллятора источнику внешнего воздействия, обеспечивающему заданное принудительное движение шатуна. Поэтому, в отличие от случая собственных колебаний, не только кинетическая и потенциальная энергии осциллятора, но и его полная энергия испытывает колебания. Эти колебания полной энергии происходят с частотой, вдвое превышающей частоту внешнего воздействия.

В последующем обсуждении особое внимание уделено различиям энергетических превращений в случае кинематического возбуждения вынужденных колебаний (этот случай моделируется в компьютерной программе) и случае динамического возбуждения, когда внешняя сила задается в виде определенной синусоидальной функции времени.

При динамическом возбуждении внешний момент сил приложен непосредственно к маховику осциллятора. Поскольку один конец спиральной пружины закреплен неподвижно, деформация пружины, а следовательно и потенциальная энергия, полностью определяются углом  $\varphi$  отклонения маховика от среднего положения:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D \varphi^2(t) = \frac{1}{2} D a^2 \sin^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{4} J \omega_0^2 a^2 [1 - \cos 2(\omega t + \delta)]. \quad (4.13)$$

Кинетическая энергия осциллятора не зависит от способа возбуждения и дается следующим выражением:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2(t) = \frac{1}{2} J \omega^2 a^2 \cos^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{4} J \omega^2 a^2 [1 + \cos 2(\omega t + \delta)]. \quad (4.14)$$

Таким образом, потенциальная и кинетическая энергии при вынужденных колебаниях осциллятора изменяются с частотой  $2\omega$  в противофазе друг с другом. Отношение их максимальных (и средних) значений равно квадрату отношения собственной частоты к частоте вынуждающей силы:

$$\frac{\langle E_{\text{pot}} \rangle}{\langle E_{\text{kin}} \rangle} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (4.15)$$

Поэтому при  $\omega < \omega_0$  потенциальная энергия в среднем преобладает. В частности, когда  $\omega \ll \omega_0$  (медленное вращение маховика), деформация пружины имеет квазистатический характер, и почти вся энергия осциллятора — это упругая энергия деформированной пружины. Напротив, при частоте вынуждающей силы, превышающей резонансную частоту ( $\omega > \omega_0$ ), преобладает кинетическая энергия.

Особенности энергетических превращений при кинематическом возбуждении колебаний связаны с тем, что вместе с шатуном перемещается положение равновесия осциллятора и вся его потенциальная яма в целом. Деформация пружины определяется в этом случае разностью углов  $\varphi(t)$  и  $\phi(t)$ . Выражение для ее потенциальной энергии принимает вид:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D (\varphi - \phi)^2. \quad (4.16)$$

Когда частота шатуна много меньше резонансной частоты осциллятора, маховик безинерционно следует за медленно движущимся шатуном, оставаясь все время почти в положении равновесия, которое перемещается вместе с шатуном. Пружина при таком движении почти не деформирована, т. е. ее потенциальная энергия все время практически равна нулю. Иначе об этом можно сказать так: осциллятор все время находится вблизи самого дна потенциальной ямы, перемещающейся вместе с шатуном. Поэтому при низкой частоте внешнего воздействия кинетическая энергия преобладает, в противоположность случаю прямого силового возбуждения осциллятора.

При очень высокой частоте возбуждения инертный маховик не успевает следовать за быстрыми колебаниями шатуна, так что максимальные отклонения маховика от среднего положения много меньше размаха колебаний шатуна  $\phi_0$ . В таких условиях пружина оказывается сравнительно сильно закрученной (приблизительно на угол  $\phi_0$  то в одну, то в другую сторону), в то время как максимальная угловая скорость маховика сравнительно невелика. Поэтому теперь потенциальная энергия деформации пружины в среднем преобладает над кинетической энергией маховика, опять в противоположность случаю динамического возбуждения.

При малом трении (когда  $\gamma \ll \omega_0$ ), для отношения средних (и максимальных) значений потенциальной и кинетической энергий в случае кинематического возбуждения колебаний из формулы (4.16) для  $E_{\text{pot}}$ , а также приведенных выше выражений (4.1) для  $\phi(t)$  и (4.5) для  $\varphi(t)$  можно получить:

$$\frac{\langle E_{\text{pot}} \rangle}{\langle E_{\text{kin}} \rangle} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}. \quad (4.17)$$

Сравнивая (4.17) с (4.15), мы видим, что при кинематическом и прямом силовом возбуждении вынужденных колебаний соотношение между средними значениями кинетической и потенциальной энергии прямо противоположное, в соответствии с приведенными выше качественными соображениями.

### 4.1.10 Поглощаемая и рассеиваемая осциллятором мощность. Лоренцевский контур

Мощность, рассеиваемая (превращаемая в теплоту) осциллятором при установившихся вынужденных колебаниях, определяется работой, совершаемой моментом силы вязкого трения в единицу времени:

$$P_{\text{расс}} = N_{\text{тр}}\dot{\varphi} = -2J\gamma\dot{\varphi}^2 = -2J\gamma\omega^2 a^2 \cos^2(\omega t + \delta). \quad (4.18)$$

Здесь амплитуда  $a$  и сдвиг фаз  $\delta$  определяются выражениями (4.8). Как видно из (4.18), рассеяние энергии происходит неравномерно в течение периода: скорость диссипации максимальна в моменты прохождения ротора через среднее положение, и уменьшается до нуля в точках его наибольшего отклонения (в точках поворота), когда угловая скорость ротора обращается в нуль. Усредняя рассеиваемую мощность по периоду колебаний, получаем:

$$\langle P_{\text{расс}} \rangle = -J\gamma\omega^2 a^2 = -J\gamma\omega^2 \frac{\omega_0^4 \phi_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (4.19)$$

Поглощаемая осциллятором мощность, т. е. мощность, передаваемая осциллятору внешним источником, обеспечивающим принудительное движение шатуна, определяется совершаемой в единицу времени работой приложенного к шатуну момента внешней силы. Если не принимать во внимание момент инерции шатуна (считая его малым по сравнению с моментом инерции маховика), то внешний момент равен упругому моменту деформированной пружины:  $N_{\text{внеш}} = D(\varphi - \phi) = J\omega_0^2(\varphi - \phi)$ . Для нахождения мгновенного значения передаваемой осциллятору мощности нужно умножить этот момент, предварительно подставив в него  $\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta)$  и  $\phi(t) = \phi_0 \sin(\omega t)$ , на угловую скорость шатуна  $\dot{\phi} = \omega\phi_0 \cos \omega t$ . Усредняя полученное выражение по периоду колебаний, получим:

$$\langle P_{\text{полг}} \rangle = -\frac{1}{2} J\omega_0^2 a \omega \sin \delta. \quad (4.20)$$

После подстановки в (4.20) значений  $a$  и  $\delta$  получим для среднего значения поглощаемой мощности выражение, совпадающее с (4.19) для средней рассеиваемой осциллятором мощности: при установившихся колебаниях осциллятор рассеивает в среднем за период столько же энергии, сколько получает от внешнего источника. При этом мгновенные значения рассеиваемой и получаемой мощности не совпадают — кроме систематической подпитки осциллятора энергией, идущей на компенсацию потерь из-за трения, в течение периода происходит и двунаправленный обмен энергией.

В случае сравнительно слабого трения полученное выражение для средней рассеиваемой (и поглощаемой) осциллятором мощности можно упростить. При  $\gamma \ll \omega_0$  (или  $Q \gg 1$ ) пик резонансной кривой резкий и узкий: осциллятор избирательно реагирует на синусоидальное внешнее воздействие только в узкой полосе частот в окрестности частоты собственных колебаний. Когда нас интересует поглощаемая мощность на частотах  $\omega$ , близких к  $\omega_0$ , разность квадратов этих частот в знаменателе (4.19) можно записать следующим образом:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega_0 \Delta\omega, \quad (4.21)$$

где  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  — расстройка частоты возбуждения относительно резонанса, т. е. частота, отсчитанная от резонансного значения  $\omega_0$ . После подстановки (4.21) в (4.19), получаем следующее приближенное выражение для средней поглощаемой мощности:

$$\langle P_{\text{полг}} \rangle = \frac{\gamma J \omega_0^4 \phi_0^2 / 4}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}. \quad (4.22)$$

Эту зависимость средней поглощаемой мощности от частоты удобно представить в нормализованной форме  $F(\Delta\omega)$ , разделив  $\langle P_{\text{полг}}(\Delta\omega) \rangle$  на ее максимальное значение, достигаемое при  $\Delta\omega = 0$ :

$$F(\Delta\omega) = \frac{1}{1 + (\Delta\omega)^2 \tau^2} = \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2}, \quad (4.23)$$

где  $\tau = 1/\gamma$  — характерное время (время затухания) осциллятора. Описываемая выражением (4.23) спектральная зависимость часто встречается в различных физических проблемах и называется *лоренцевским контуром*. (Происхождение названия связано с тем, что такая спектральная зависимость поглощения энергии предсказывается развитой Г.Лоренцем электронной теорией.) В частности, спектры поглощения и испускания света атомами в определенных физических условиях описываются лоренцевским контуром. График этой функции показан на рис. 4.3. Он имеет вид симметричного пика, центр которого расположен при  $\Delta\omega = 0$ , т. е. при  $\omega = \omega_0$ . При смещении от этого положения (от максимума) в любую сторону на  $\Delta\omega = 1/\tau = \gamma$  поглощаемая мощность уменьшается до половины своего максимального значения. Таким образом, ширина лоренцевского контура на половине высоты (полуширина) составляет  $2\gamma = 2/\tau$ .

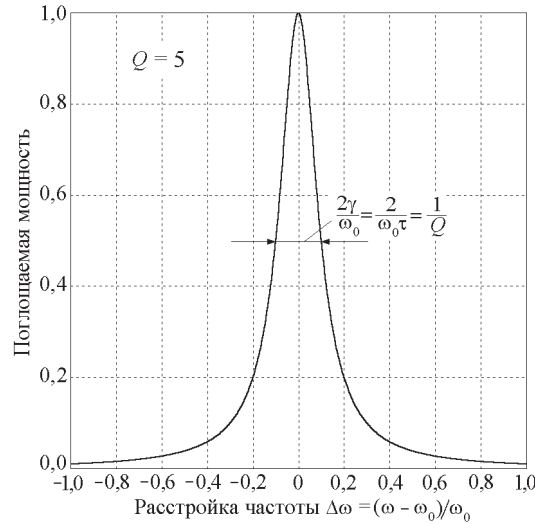


Рис. 4.3: Спектральная зависимость мощности, поглощаемой осциллятором в установившихся колебаниях (лоренцевский контур).

#### 4.1.11 Переходные процессы

Амплитуда и фаза установившихся вынужденных колебаний не зависят от начальных условий: за время установления колебаний осциллятор их полностью «забывает». Напомним, что установившиеся колебания описываются периодическим частным решением (4.5) неоднородного дифференциального уравнения (4.4). Характеризующие это решение амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики — резонансные кривые на рис. 4.2, как и лоренцевский спектральный контур поглощаемой мощности на рис. 4.3, — относятся только к режиму установившихся колебаний.

Начальные условия, т. е. угол отклонения  $\varphi(0)$  и угловая скорость  $\dot{\varphi}(0)$  в момент  $t = 0$  включения внешнего воздействия, сказываются только во время *переходного процесса* установления колебаний. В течение переходного процесса затухающие собственные колебания накладываются на установившиеся вынужденные колебания. Математически этот процесс описывается суммой частного решения (4.5) неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения, т. е. уравнения (4.4) с равной нулю правой частью. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (4.4) можно записать в виде:

$$\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta) + C e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta), \quad (4.24)$$

содержащем произвольные постоянные  $C$  и  $\theta$ . Их значения определяются из начальных условий.

Мы видим, что переходный процесс описывается суперпозицией синусоидальных колебаний неизменной амплитуды  $a$  на частоте внешнего воздействия  $\omega$ , и затухающих колебаний на частоте  $\omega_1$  с экспоненциально убывающей амплитудой. Теоретически переходный процесс продолжается бесконечно долго, но практически его можно считать закончившимся к тому времени, когда вклад собственных колебаний с частотой  $\omega_1$  в 4.14а «вымирает», т. е. их амплитуда  $C e^{-\gamma t}$  становится пренебрежимо малой по сравнению с амплитудой  $a$  установившихся колебаний. При нулевых начальных условиях  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$  (осциллятор покоился в положении равновесия до включения периодической внешней силы) это происходит приблизительно через  $Q$  периодов собственных колебаний, где  $Q = \omega_0/2\gamma$  — добротность осциллятора, обратно пропорциональная постоянной затухания собственных колебаний. Вообще говоря, переходный процесс тем продолжительнее, чем меньше трение в системе. Однако возможны такие начальные условия, при которых переходного процесса не будет совсем (см ниже).

Частота  $\omega_1$  при слабом и умеренном трении очень близка к собственной частоте  $\omega_0 = \sqrt{D/J}$  (т. е. к частоте, с которой происходят собственные колебания осциллятора в отсутствие трения):

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2}\right) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right). \quad (4.25)$$

В большинстве практически важных случаев относительное различие этих частот  $(\omega_0 - \omega_1)/\omega_0$  столь мало, что им можно пренебречь и положить  $\omega_1 = \omega_0$ . В самом деле, если  $Q = 5$ , эта относительная разность составляет всего лишь 0.5%:  $(\omega_0 - \omega_1)/\omega_0 = 0.005$ .

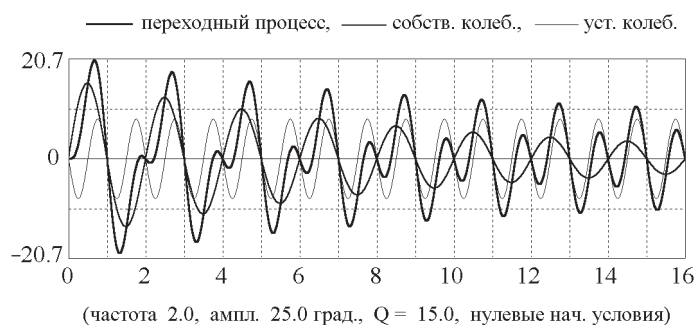


Рис. 4.4: Разложение переходного процесса на сумму установившихся вынужденных колебаний и затухающих собственных колебаний.

При работе с моделирующей компьютерной программой можно открыть панель «Условия моделирования» и выбрать опцию «Разложение переходного процесса». Тогда при моделировании на экран будут одновременно выводиться также графики простых составляющих (синусо-



идальных установившихся колебаний и затухающих собственных колебаний), из которых складывается изучаемый переходный процесс. Пример такого разложения переходного процесса на составляющие показан на рис. 4.4.

#### 4.1.12 Условия отсутствия переходного процесса

Как уже отмечалось, можно задать начальные условия так, чтобы переходного процесса не было совсем, т. е. чтобы сразу после включения периодического внешнего воздействия происходили установившиеся вынужденные колебания. Очевидно, что начальная амплитуда  $C$  вклада собственных колебаний в общее решение (4.24) будет равна нулю, если установившиеся колебания, описываемые вторым членом в (4.24), будут сами удовлетворять начальным условиям, без добавления собственных колебаний, т. е. первого члена в (4.24). Для этого начальное отклонение  $\varphi(0)$  должно быть равным  $a \sin \delta$ , а начальная скорость  $\dot{\varphi}(0)$  должна быть равна  $a\omega \cos \delta$ , где  $a$  и  $\delta$  — амплитуда и фаза установившихся колебаний, определяемые формулами (4.8). При таких начальных условиях в (4.24)  $C = 0$ , т. е. после включения внешнего воздействия колебания на собственной частоте вообще не возникают, и с самого начала происходят вынужденные колебания неизменной частоты и амплитуды.

Из-за переходных процессов явление вынужденных колебаний представляется значительно более сложным по сравнению с простыми синусоидальными установившимися колебаниями. Но во многих практически важных случаях переходные процессы представляют самостоятельный интерес. Следует уделить должное внимание их изучению при работе с моделирующей компьютерной программой.

#### 4.1.13 Резонансная раскачка осциллятора

Ограничимся рассмотрением переходных процессов при нулевых начальных условиях, т. е. при раскачке внешней периодической силой осциллятора, находившегося до ее включения в состоянии покоя в положении равновесия:

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0. \quad (4.26)$$

В момент времени  $t = 0$  шатун, раскачивающий осциллятор, начинает двигаться из своего среднего положения по закону:

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t. \quad (4.27)$$

Рассмотрим случай раскачки осциллятора с малым трением ( $\gamma \ll \omega_0$ ) синусоидальной внешней силой, настроенной в резонанс, т. е. на частоту собственных колебаний осциллятора  $\omega_1 \approx \omega_0$ . Как следует из (4.8), периодическое частное решение, описывающее установившиеся колебания, при  $\omega = \omega_0$  имеет вид:

$$\varphi(t) \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} \phi_0 \sin \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) = -Q \phi_0 \cos \omega_0 t. \quad (4.28)$$

В рассматриваемом случае амплитуда колебаний маховика превосходит амплитуду шатуна в  $Q = \omega_0/2\gamma$  раз, а запаздывание по фазе составляет  $-\pi/2$  — движение маховика отстает на четверть цикла от колебаний шатуна.

Прибавим к периодическому частному решению (4.28) общее решение однородного уравнения с  $\omega_1 = \omega_0$ :

$$\varphi(t) = -Q\phi_0 \cos \omega_0 t + Ce^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \theta). \quad (4.29)$$

Произвольные постоянные  $C$  и  $\theta$  определим так, чтобы для  $\varphi(t)$  в (4.29) удовлетворялись начальные условия (4.26). В рассматриваемом случае слабого трения ( $\gamma \ll \omega_0$ ) экспоненциальный множитель  $e^{-\gamma t}$  в (4.29) на протяжении периода колебаний почти не изменяется. Поэтому при дифференцировании (4.29) по времени этот множитель можно считать постоянным:

$$\dot{\varphi}(t) \approx Q\phi_0\omega_0 \sin \omega_0 t - Ce^{-\gamma t}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta). \quad (4.30)$$

Тогда из начального условия  $\dot{\varphi}(0) = 0$  находим  $\theta = 0$ , а из условия  $\varphi(0) = 0$  получаем  $C = Q\phi_0$ . Таким образом, при  $Q \gg 1$  и  $\omega = \omega_0$  решение дифференциального уравнения (4.5), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, имеет вид:

$$\varphi(t) = -Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) \cos \omega_0 t = -b(t) \cos \omega_0 t, \quad (4.31)$$

где

$$b(t) = Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}). \quad (4.32)$$

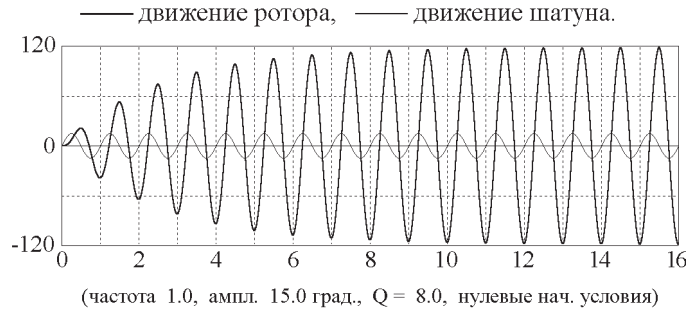


Рис. 4.5: Переходный процесс при резонансе (графики угла отклонения для возбуждающего шатуна и маховика осциллятора при нулевых начальных условиях).

Такая суперпозиция вынужденных и слабо затухающих собственных колебаний той же частоты может рассматриваться как одно «почти гармоническое» колебание с частотой  $\omega_0$ , амплитуда которого  $b(t)$  медленно нарастает со временем, монотонно приближаясь к постоянному значению  $Q\phi_0$ , соответствующему установившимся колебаниям (рис.4.5). Характерное время установления амплитуды  $\tau = 1/\gamma$  совпадает со временем жизни собственных колебаний в этой же системе.

Качественно такое поведение осциллятора легко объяснить с помощью энергетических соображений. При большой добротности  $Q$  осциллятор при резонансе раскачается до амплитуды  $Q\phi_0$ , значительно (в  $Q$  раз) превосходящей амплитуду шатуна. Чем выше добротность, тем большую энергию запасет осциллятор и, следовательно, тем больше времени (большее число колебаний шатуна) требуется для того, чтобы сообщить ему эту энергию.

При слабом трении продолжительность резонансной раскачки составляет много периодов колебаний:  $\tau \gg T_0$ . Рост амплитуды на начальном этапе раскачки происходит почти по линейному закону. Это можно увидеть из уравнения (4.32), полагая в нем  $\gamma t \ll 1$ . Разлагая экспоненту в степенной ряд и ограничиваясь линейным по  $\gamma t$  членом, получаем:

$$b(t) = Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) = \frac{\omega_0}{2\gamma}\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) \approx \frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t. \quad (4.33)$$

Независимость полученного выражения от постоянной затухания  $\gamma$  означает, что на начальном этапе резонансной раскачки осциллятора из состояния покоя рост амплитуды происходит практически с такой же скоростью, как и в отсутствие трения. В идеализированном случае полного отсутствия трения линейный рост амплитуды продолжался бы неограниченно. Уравнение (4.4) при  $\gamma = 0$  и  $\omega = \omega_0$  не имеет периодического частного решения. Его частное решение  $\varphi(t) = -\frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t \cos \omega_0 t$  соответствует неограниченному линейному росту амплитуды. Чтобы получить общее решение уравнения (4.4) с двумя произвольными постоянными, мы должны добавить еще общее решение однородного уравнения, которое описывает в данном случае незатухающие собственные колебания. Определяя произвольные постоянные из начальных условий, получаем:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\phi_0(\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t). \quad (4.34)$$

Амплитуда этого колебания частотой  $\omega_0$  равна  $\frac{1}{2}\phi_0\sqrt{(\omega_0 t)^2 + 1} \approx \frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t$ . Это значит, что при отсутствии трения такая идеализированная система «идет вразнос» и установление вынужденных колебаний при  $\omega = \omega_0$  невозможно. Фактически это означает, что принятая модель в данном случае неприменима: при описании резонанса трение необходимо учитывать, сколь бы слабым они ни было. В реальной системе при достаточно больших амплитудах либо становится недопустимым пренебрежение трением, либо зависимость восстанавливающего упругого момента становится нелинейной (при больших деформациях пружины проявляются отклонения от закона Гука). В последнем случае нелинейность системы приводит к неизохронности колебаний и связанному с этим нарушению условий резонанса при колебаниях с большими амплитудами. Это обстоятельство ограничивает рост амплитуды даже в отсутствие трения. Которая из этих причин проявляет себя раньше и в действительности ограничивает резонансный рост амплитуды в реальной физической системе, зависит от свойств конкретной системы, не учитываемых в рассматриваемой упрощенной модели осциллятора.

#### 4.1.14 Классический механический аналог вынужденного излучения

Как мы убедились, при точной настройке частоты внешнего воздействия на собственную частоту осциллятора происходит монотонный рост амплитуды вынужденных колебаний. В отсутствие трения, как видно из выражения (4.34), амплитуда растет неограниченно практически по линейному закону  $\frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t$ . Рост энергии осциллятора происходит при этом за счет работы внешнего источника, обеспечивающего заданное принудительное движение возбуждающего шатуна. Зададимся теперь вопросом: возможна ли в условиях точной настройки в резонанс обратная передача энергии от осциллятора внешнему источнику?

Рассмотренный выше процесс раскачки осциллятора из состояния покоя в положении равновесия обеспечивался определенными фазовыми соотношениями между колебаниями шатуна и осциллятора. Эти соотношения были благоприятны для передачи энергии от внешнего источника к осциллятору: как следует из (4.34), практически с самого начала колебания скорости маховика происходили по закону  $\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{2}\phi_0\omega_0^2 t \sin \omega_0 t$ , т. е. его угловая скорость изменялась в одинаковой фазе с приложенным к нему внешним крутящим моментом  $D\phi_0 \sin \omega_0 t$ , который входит в правую часть дифференциального уравнения вынужденных колебаний (4.5). При таком движении внешний момент все время действует на маховик в направлении его вращения, т. е., образно говоря,

«подталкивает его в спину», в направлении его движения. Напомним, что так происходит при нулевых начальных условиях.

Но что будет, если осциллятор в момент включения внешней силы уже находится в возбужденном состоянии, т. е. обладает энергией и совершает собственные колебания? Ясно, что дальнейший ход процесса зависит от соотношения фаз между уже существующими колебаниями маховика и колебаниями возбуждающего шатуна. Если колебания угловой скорости маховика и теперь совершаются в одинаковой фазе с колебаниями внешнего крутящего момента, то энергия опять будет передаваться от внешнего источника к осциллятору, и амплитуда существующих колебаний начнет увеличиваться сразу после включения внешнего воздействия. Но если угловая скорость маховика изменяется в противофазе с внешним моментом, т. е. по закону  $\dot{\varphi}(t) \propto -\sin \omega_0 t$ , то изменяющийся как  $\sin \omega_0 t$  внешний момент будет все время направлен навстречу скорости маховика и будет замедлять его вращение: энергия будет передаваться от осциллятора к источнику внешнего воздействия. Конечно, этот процесс будет продолжаться лишь до тех пор, пока амплитуда колебаний маховика не обратится в нуль, т. е. пока вся энергия осциллятора не будет передана внешнему источнику. Дальше все будет происходить так, как при нулевых начальных условиях, т. е. при раскачке осциллятора из состояния покоя: начнется рост амплитуды колебаний осциллятора, так как установятся фазовые соотношения, благоприятные для передачи энергии осциллятору.

Легко видеть, что при движении шатуна по закону  $\phi(t) = \phi_0 \sin \omega_0 t$  фаза собственных колебаний, благоприятная для передачи энергии от осциллятора к внешнему источнику, будет обеспечена, например, при начальном отклонении маховика в положительном направлении и нулевой начальной скорости, т. е. при начальных условиях вида  $\varphi(0) = \varphi_0$  (где  $\varphi_0 > 0$ ),  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Соответствующее таким начальным условиям решение дифференциального уравнения (4.5) имеет вид:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= (\varphi_0 - \frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t) \cos \omega_0 t + \frac{1}{2}\phi_0 \sin \omega_0 t \\ &\approx (\varphi_0 - \frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t) \cos \omega_0 t.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Последнее приближенное выражение справедливо, когда можно пренебречь вкладом собственных колебаний с синусоидальной зависимостью от времени в функцию  $\varphi(t)$ , определяемую соотношением (4.35), т. е. когда постоянная амплитуда этих колебаний  $\frac{1}{2}\phi_0$  мала по сравнению с зависящей от времени амплитудой  $|\varphi_0 - \frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t|$  первого члена в (4.35) с косинусоидальной зависимостью. Из (4.35) следует, что амплитуда колебаний сначала убывает по линейному закону почти до нуля на протяжении промежутка времени  $t = 2\varphi_0/(\omega_0\phi_0) = (\varphi_0/\pi\phi_0)T_0$ . Затем зависящий от времени амплитудный множитель в (4.35) изменяет знак. Это значит, что соотношение фаз между колебаниями маховика и возбуждающего шатуна становится таким же, как и в рассмотренном ранее случае резонансной раскачки из состояния покоя, т. е. благоприятным для передачи энергии осциллятору от внешнего источника. В результате далее происходит неограниченный рост амплитуды. График угла отклонения для такого процесса показан на рис. 4.6.

Рассмотренным выше процессам резонансного взаимодействия осциллятора с внешним периодическим источником можно сопоставить известные в оптике явления поглощения и вынужденного испускания света атомами. Осциллятор можно рассматривать как аналог атома, точнее, его оптического электрона, связанного в атоме квазиупругой силой и способного совершать собственные колебания на определенной частоте. Внешний источник, раскачивающий осциллятор, можно рассматривать как аналог электромагнитного поля световой волны, взаимодействующей с атомом. При этом энергия может передаваться либо атому от светового поля, частота которого

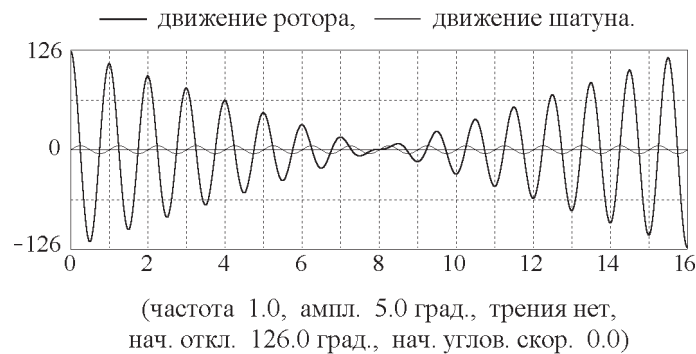


Рис. 4.6: Передача энергии возбужденного осциллятора внешнему источнику (и обратно) в условиях точной настройки в резонанс.

совпадает с собственной частотой атома (точнее, с частотой, соответствующей переходу оптического электрона в атоме между уровнями энергии стационарных состояний), что соответствует поглощению света, либо может передаваться от возбужденного атома взаимодействующей с ним электромагнитной волне, что соответствует вынужденному испусканию света. Которая из этих возможностей фактически реализуется, зависит от соотношения фаз колебаний электромагнитного поля в волне и оптического электрона в атоме.

В случае передачи энергии от атома электромагнитному полю возрастает амплитуда (и энергия) световой волны при сохранении остальных ее характеристик (в том числе фазы). Это обстоятельство позволяет понять когерентный характер вынужденного излучения света большим числом возбужденных атомов в поле одной и той же световой волны. Именно высокой когерентностью вынужденного излучения определяются такие замечательные свойства лазеров, как концентрация энергии их излучения в спектре (высокая степень монохроматичности), способность к максимальной (совместимой с волновой природой света) концентрации энергии света в пространстве и по направлению распространения (фокусировка), возможность концентрации энергии во времени (генерация сверхкоротких импульсов).

Некогерентное спонтанное излучение света возникает, когда отдельные возбужденные атомы источника испускают несогласованные по фазе элементарные световые волны. В механической модели таким процессам можно сопоставить собственные затухающие колебания осциллятора. В процессе спонтанного испускания света атомом роль трения играет сила реакции излучаемой осциллирующим электроном световой волны (радиационное трение). Вызываемое вязким трением рассеяние механической энергии при собственных колебаниях осциллятора (превращение механической энергии упорядоченного движения в теплоту) аналогично переходу энергии возбужденных атомов в энергию хаотических колебаний электромагнитного поля спонтанного излучения.

Рассмотренная аналогия безусловно полезна для понимания оптических явлений, но ее нельзя воспринимать слишком буквально. В действительности процессы поглощения и испускания света атомами подчиняются квантовым законам, которые предсказывают лишь вероятности тех или иных результатов взаимодействия света с атомом. Поэтому детерминированные процессы в механическом осцилляторе нужно сопоставлять не отдельному атому, а статистическому ансамблю атомов, взаимодействующих с излучением.

### 4.1.15 Переходные процессы вблизи резонанса

Если частота вынуждающего воздействия близка к частоте собственных затухающих колебаний осциллятора, то в переходном процессе установления колебаний, пока собственные колебания не затухли, происходит сложение колебаний с близкими частотами  $\omega$  и  $\omega_1$ . (Как уже отмечалось, частота  $\omega_1$  почти равна собственной частоте  $\omega_0$  в практически важных случаях, когда трение не слишком велико [(см. (4.25)], так что в дальнейшем мы не будем делать различия между  $\omega_0$  и  $\omega_1$ .) Такое наложение колебаний порождает *модулированное колебание*, т. е. почти синусоидальное колебание со средней частотой, амплитуда которого медленно поочередно возрастает и убывает со сравнительно низкой *частотой биений*  $|\omega - \omega_0|$ , равной модулю разности собственной и вынуждающей частот.

Сначала вынуждающая сила раскачивает осциллятор до амплитуды, превышающей установившееся значение. Затем разность фаз, накопившаяся между колебаниями маховика и шатуна, приводит к обратной передаче энергии от осциллятора к источнику внешнего воздействия, и амплитуда начинает убывать. Дальнейшее изменение разности фаз двух колебаний снова приведет к росту амплитуды, которое через некоторое время опять сменится убыванием, и так далее.

При наличии трения эти процессы модуляции, т. е. чередования медленного роста и убывания амплитуды (*переходные биения*) становятся все менее выраженными по мере затухания вклада колебаний на собственной частоте. На рисунке 4.7 приведен график переходных биений для случая, когда первоначально маховик покоился в положении равновесия, а частота вынуждающей силы  $\omega = 0.8\omega_0$ , т. е. четыре цикла ее изменения совершаются на протяжении пяти периодов собственных колебаний. (На графике время отложено в единицах периода вынуждающей силы  $T$ .) Таким образом, один период биений  $T_b = 2\pi/|\omega - \omega_0|$  равен четырем периодам внешнего воздействия  $T = 2\pi/\omega$  и пяти периодам собственных колебаний  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ .

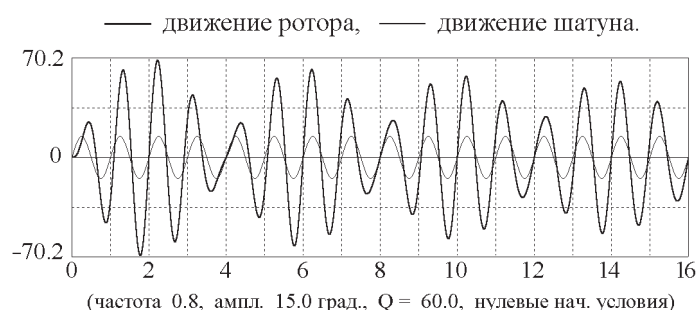


Рис. 4.7: Постепенно затухающие переходные биения в переходном процессе вблизи резонанса (при нулевых начальных условиях).

В отсутствие трения вклад колебаний на собственной частоте не затухает, и на протяжении переходного процесса происходит сложение двух близких по частоте гармонических колебаний с неизменными амплитудами. При нулевых начальных условиях их амплитуды относятся как  $\omega/\omega_0$ . В результате возникают незатухающие биения, т. е. почти гармонические колебания на средней частоте с амплитудой, медленно изменяющейся со временем по синусоидальному закону. В идеализированном случае полного отсутствия трения установившихся колебаний не существует, за исключением рассмотренного выше случая специфических начальных условий, при которых переходный процесс отсутствует).

### 4.1.16 Переходные процессы вдали от резонанса

Здесь мы рассмотрим случаи, когда частота внешнего воздействия значительно отличается от собственной частоты осциллятора.

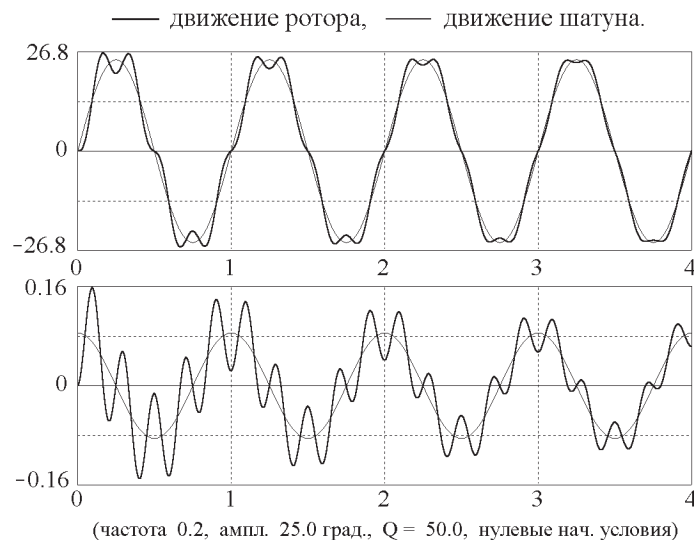


Рис. 4.8: Графики угла отклонения и угловой скорости ротора в переходном процессе при низкой частоте возбуждения ( $\omega \ll \omega_0$ ).

Если внешняя частота много меньше собственной частоты ( $\omega \ll \omega_0$ ), положение равновесия осциллятора медленно смещается вместе с шатуном поочередно вправо и влево, а ротор совершает около такого медленно движущегося положения равновесия сравнительно быстрые постепенно затухающие колебания на собственной частоте. В результате на медленные установившиеся колебания неизменной амплитуды накладываются искажающие их быстрые собственные колебания постепенно уменьшающейся амплитуды.

Пример такого переходного процесса с  $\omega = 0.8\omega_0$  показан на рис. 4.8. По мере затухания собственных колебаний высокочастотные искажения графика уменьшаются, и в конце концов медленные вынужденные колебания принимают правильную синусоидальную форму.

В противоположном случае высокой частоты принудительного движения шатуна на протяжении переходного процесса быстрые вынужденные колебания неизменной амплитуды происходят около некоторого движущегося среднего положения, которое совершает медленные затухающие колебания на собственной частоте осциллятора.

Графики угла отклонения и угловой скорости для такого переходного процесса показаны на рис. 4.9 вместе с графиками составляющих его быстрых вынужденных синусоидальных колебаний неизменной амплитуды и медленных затухающих собственных колебаний. Когда медленные собственные колебания затухают, остаются только быстрые колебания, симметричные относительно точки  $\phi = 0$  (т. е. относительно среднего положения шатуна). Эти быстрые колебания маховика происходят в противофазе с принудительными колебаниями шатуна. Амплитуда установившихся быстрых колебаний значительно меньше амплитуды вынуждающего шатуна.

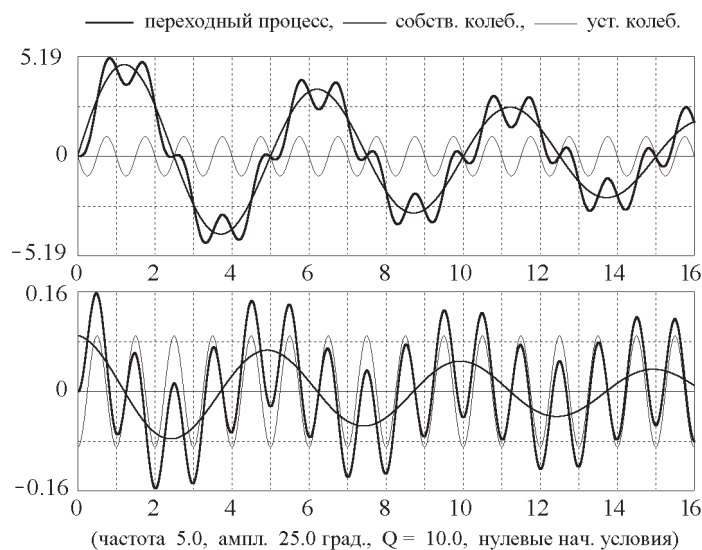


Рис. 4.9: Графики угла отклонения и угловой скорости ротора в переходном процессе при высокой частоте возбуждения ( $\omega \gg \omega_0$ ).

#### 4.1.17 Фазовая траектория переходных процессов и сечения Пуанкаре

Уравнение движения (4.4), описывающее вынужденные колебания, содержит время  $t$  явным образом: в правую часть этого уравнения входит заданная функция времени  $\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t$ , описывающая принудительное периодическое движение возбуждающего шатуна. Поэтому механическое состояние рассматриваемой физической системы определяется тремя переменными:  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  и  $t$ .

Для полной графической характеристики механического состояния такой системы двумерное фазовое пространство, т. е. плоскость  $(\varphi, \dot{\varphi})$ , целесообразно дополнить еще одним (третьим) измерением — осью времени  $t$ , направленной перпендикулярно к фазовой плоскости. В моделирующей компьютерной программе на плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$  отображается соответствующая проекция трехмерной фазовой траектории вынужденных колебаний осциллятора.

Наглядное представление о характере переходного процесса в целом можно получить, если на этой двумерной проекции фазовой траектории выделить точки, соответствующие равноотстоящим моментам времени, разделенным интервалами, равными периоду внешнего воздействия  $T = 2\pi/\omega$ , например, моментам, когда шатун, двигаясь слева направо, проходит через свое среднее положение (пересекает нулевое деление шкалы). Это так называемые *сечения Пуанкаре*. В нашем случае они показывают угловое положение маховика и его угловую скорость  $(\varphi, \dot{\varphi})$  в моменты времени  $t = T, 2T, \dots, nT$ . В компьютерной программе можно включить отображение сечений Пуанкаре на фазовой плоскости, выбрав соответствующую опцию в панели «Условия моделирования».

В установившихся вынужденных колебаниях осциллятора, период которых равен периоду внешнего воздействия, трехмерная фазовая траектория пересекает все равноотстоящие плоскости  $t = T, 2T, \dots, nT$  при одних и тех же значениях  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$ . Поэтому сечения Пуанкаре на плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$  для всех моментов времени  $t = T, 2T, \dots, nT$  совпадают. Однако для переходного процесса установления колебаний сечения Пуанкаре образуют некоторое множество точек на плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$ , постепенно сгущающееся к точке  $\varphi = a \sin \delta$ ,  $\dot{\varphi} = a\omega \cos \delta$ , соответствующей установившимся колебаниям.



На резонансной частоте ( $\omega = \omega_0$ ) колебания маховика отстают от колебаний возбуждающего шатуна по фазе на четверть периода ( $\delta = \pi/2$ ), и точка сгущения сечений Пуанкаре для резонансного переходного процесса имеет координаты  $\varphi = -a$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ . Если заданы нулевые начальные условия, т. е. движение возбуждающего шатуна начинается, когда маховик покоится в положении равновесия, все точки сечений Пуанкаре лежат на оси абсцисс фазовой плоскости, выходя из начала координат при  $t = 0$  и приближаясь постепенно к указанной выше точке сгущения  $\varphi = -a$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ . Начальный участок проекции фазовой траектории с сечениями Пуанкаре для такого процесса показан в левой части рис. 4.10. Правая часть этого рисунка соответствует процессу переходных биений при  $\omega = 0.8 \omega_0$ , график которого показан на рис. 4.7, стр. 78.

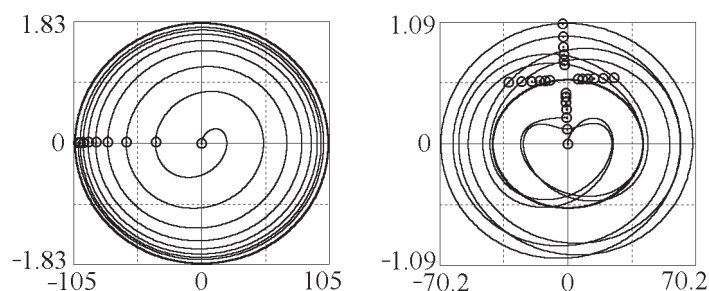


Рис. 4.10: Проекция фазовых траекторий с сечениями Пуанкаре для процесса резонансной раскачки осциллятора из состояния покоя (слева) и для переходных биений при  $\omega = 0.8 \omega_0$  (справа).

## 4.2 Контрольные вопросы и задачи

### 4.2.1 Установившиеся вынужденные колебания

При изучении установившихся колебаний с помощью моделирующей компьютерной программы нет необходимости дожидаться, пока произойдет установление колебаний. Для того, чтобы сразу происходило моделирование установившихся колебаний, достаточно выбрать опцию «Установившиеся колебания» в панели «Условия моделирования». При этом программа автоматически выбирает начальные условия  $\varphi(0) = a \sin \delta$  и  $\dot{\varphi}(0) = a\omega \cos \delta$ , обеспечивающие отсутствие переходного процесса, независимо от введенных Вами начальных условий. Необходимые значения амплитуды  $a$  и сдвига фаз  $\delta$  программа рассчитывает на основе выражений (4.8), используя введенные Вами значения вынуждающей частоты  $\omega$  и добротности осциллятора  $Q$ .

#### 1.1 Установившиеся вынужденные колебания в отсутствие трения.

(а) Строго говоря, в отсутствие трения переходный процесс продолжается бесконечно долго, так что установившиеся колебания неизменной амплитуды возможны только при указанных выше начальных условиях. Имеет ли какой-либо физический смысл аналитическое решение  $\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta)$  с  $a = \phi_0 \omega_0^2 / (\omega_0^2 - \omega^2)$ , описывающее установившиеся колебания при  $\gamma = 0$ , для каких-либо иных начальных условий? Можно ли применять это решение к реальным физическим системам? Если да, то при каких условиях возможно наблюдать описываемое этим решением движение в реальных системах?

(б) Убедитесь на опыте, что при вынуждающих частотах, меньших собственной частоты осциллятора (т. е. при  $\omega < \omega_0$ ), установившиеся вынужденные колебания происходят в одинаковой фазе с колебаниями возбуждающего шатуна. При какой частоте амплитуда колебаний махови-

ка будет в два раза превосходить амплитуду шатуна? Рассчитайте эту частоту и проверьте свой результат с помощью моделирующего эксперимента.

(в) Убедитесь, что при вынуждающих частотах, больших чем собственная частота (т. е. при  $\omega > \omega_0$ ), колебания маховика происходят в противофазе с колебаниями возбуждающего шатуна. При каком значении частоты ( $\omega > \omega_0$ ) амплитуда маховика опять будет вдвое превосходить амплитуду шатуна? При какой частоте амплитуды маховика и шатуна будут равны? При какой частоте амплитуда вынужденных колебаний маховика будет вдвое меньше амплитуды шатуна? Проверьте свои ответы в эксперименте.

### 1.2\* Превращения энергии при установившихся вынужденных колебаниях осциллятора.

(а) Используя графики потенциальной, кинетической и полной механической энергии, выясните, во время каких частей цикла вынужденных колебаний энергия передается от шатуна (точнее, от внешнего источника, обеспечивающего заданное принудительное движение шатуна) осциллятору. Приведите физическое объяснение наблюдаемому направлению переноса энергии. На протяжении каких частей цикла происходит обратная передача энергии от осциллятора к внешнему источнику?

(б) В случае кинематического возбуждения вынужденных колебаний, чему равно отношение средних значений потенциальной и кинетической энергии для тех значений частоты возбуждения, при которых амплитуда маховика вдвое превосходит амплитуду шатуна? Для значения частоты, при котором эти амплитуды равны? Для случая, когда амплитуда маховика вдвое меньше амплитуды шатуна? Сравните наблюдаемые на экспериментальных графиках значения с полученными Вами теоретическими значениями этого отношения средних энергий.

### 1.3 Амплитуда установившихся колебаний и их запаздывание по фазе. Введите некоторое значение добротности осциллятора, скажем, $Q = 5$ .

(а) Оцените, на сколько процентов резонансная частота в этом случае ниже собственной частоты осциллятора  $\omega_0$ .

(б) Чему равно отношение амплитуды маховика при резонансе к амплитуде вынуждающего шатуна?

(в) Чему равен сдвиг фаз (в радианах и в долях периода колебаний) между колебаниями маховика и шатуна на резонансной частоте и на частоте, составляющей 0.8 резонансного значения?

Дайте ответы на те же вопросы для  $Q = 20$ .

1.4\*\* Особенности кинематического возбуждения колебаний. В случае динамического возбуждения колебаний заданной периодической силой, величина которой не зависит от положения маховика, отношение средних значений потенциальной и кинетической энергий равно  $(\omega_0/\omega)^2$ , так что при низких частотах в среднем преобладает потенциальная энергия.

(а) Проанализируйте изменение со временем каждого из видов энергии и полной энергии осциллятора при кинематическом возбуждении. Почему, несмотря на совпадение дифференциальных уравнений для случаев динамического и кинематического возбуждения колебаний, в энергетических превращениях имеются определенные различия? Рассчитайте отношение средних значений потенциальной и кинетической энергии для кинематического способа возбуждения колебаний. Приведите качественные физические соображения для объяснения отличия этого отношения от случая динамического возбуждения колебаний.

(б) При какой частоте возбуждения средние значения потенциальной и кинетической энергии одинаковы?

(в) В случае динамического возбуждения установившихся колебаний при резонансе максимальные (и средние) значения двух видов энергии одинаковы, а их изменения происходят точно в противофазе, так что полная механическая энергия осциллятора остается неизменной. Внешний

источник лишь компенсирует потери энергии из-за трения. Однако при кинематическом возбуждении осциллятора его полная энергия испытывает вариации даже при резонансе. Рассчитайте, на сколько процентов максимальные и минимальные значения каждого из видов энергии при резонансе отличаются от их средних значений.

#### 1.5\*\* Установившиеся колебания при разных частотах.

(а) Пусть частота  $\omega$  принудительного движения шатуна немного ниже собственной частоты осциллятора  $\omega_0$ , скажем,  $\omega = 0.9 \omega_0$ , и пусть добротность  $Q$  равна 5. Чему равно отношение амплитуды установившихся колебаний к амплитуде при резонансе? Какую долю цикла составляет отставание по фазе колебаний маховика от колебаний шатуна?

(б) При каких значениях вынуждающей частоты (по обе стороны от резонанса) амплитуда установившихся колебаний составляет половину амплитуды при резонансе? Какую часть цикла составляет запаздывание по фазе в каждом из этих случаев? Какой из видов энергии в среднем преобладает в каждом случае?

(в) При какой частоте  $\omega$  вынуждающего шатуна амплитуды маховика и шатуна одинаковы? Какую часть периода составляет в этом случае запаздывание маховика от шатуна по фазе?

#### 1.6\*\* Полуширина резонансной кривой.

(а) Изучите аналитически и экспериментально зависимость резонансной амплитуды установившихся колебаний от значения добротности  $Q$ . Как полуширина резонансной кривой зависит от добротности осциллятора? (Полушириной резонансной кривой называют интервал частот, в пределах которого амплитуда установившихся колебаний превышает половину ее максимального значения.) Получите приближенную формулу для полуширины, справедливую в случае слабого затухания, т. е. при  $Q \gg 1$ .

(б) Как изменяется положение максимума резонансной кривой по мере увеличения затухания? При каком значении добротности  $Q$  этот максимум смещается к нулевому значению частоты? Иначе говоря, при какой добротности  $Q$  статический эффект вынуждающей силы больше динамического эффекта такой же по величине переменной силы при всех частотах?

#### 1.7\*\* Поглощаемая и рассеиваемая мощность.

(а) Докажите аналитически, что при установившихся вынужденных колебаниях энергия, получаемая осциллятором от внешнего источника за период, равна энергии, рассеиваемой осциллятором из-за трения за то же время. Воспользуйтесь выражением (4.8) для значений амплитуды  $a$  и фазы  $\delta$  установившихся колебаний.

(б) Покажите, что спектральное распределение энергии, поглощаемой осциллятором с высокой добротностью при вынужденных колебаниях, описывается лоренцевской функцией

$$F(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2},$$

где  $\tau = 1/\gamma$ . Выразите полуширину лоренцевского контура через добротность осциллятора.

## 4.2.2 Переходные процессы

### 2.1\* Начальные условия, при которых переходный процесс не возникает

(а) Для произвольных значений добротности осциллятора, амплитуды и частоты возбуждающего шатуна получите выражения для начального угла отклонения маховика  $\varphi_0 = \varphi(0)$  и его угловой скорости  $\Omega = \dot{\varphi}(0)$  при  $t = 0$ , чтобы синусоидальные вынужденные колебания неизменной амплитуды происходили сразу после включения внешнего воздействия, без переходного процесса.

(б) Приняв  $Q = 5$ ,  $\omega = \omega_0$ , и  $\phi_0 = 15^\circ$ , рассчитайте значения  $\varphi_0$  и  $\Omega$ , при которых не будет переходного процесса. Проверьте свой результат с помощью моделирующего эксперимента на компьютере. Повторите расчет и эксперимент для других значений параметров системы:  $Q = 25$ ,  $\omega = 0.5 \omega_0$ ,  $\phi_0 = 15^\circ$  и, скажем, для  $Q = 25$ ,  $\omega = 1.5 \omega_0$ ,  $\phi_0 = 15^\circ$ .

### 2.2\* Переходные процессы при резонансе.

Примите следующие значения для параметров осциллятора и вынуждающего воздействия:  $Q = 5$ ,  $\omega = \omega_0$ ,  $\phi_0 = 15^\circ$ , и рассмотрите переходный процесс при нулевых начальных условиях  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

(а) Рассчитайте промежуток времени (выразив его в единицах периода колебаний), по истечении которого амплитуда маховика достигнет 90% своего установившегося значения. Проверьте свой результат в эксперименте. Обратите внимание на экспоненциальный характер приближения амплитуды к своему значению для установившихся колебаний.

Проанализируйте энергетические превращения в этом процессе, используя графики кинетической, потенциальной и полной энергии. В какие моменты времени полная энергия осциллятора растет наиболее быстро?

(б) Внимательно изучите графики разложения переходного процесса на его простые составляющие (на гармонические установившиеся колебания и затухающие собственные колебания). Обратите особое внимание на экспоненциальное затухание вклада собственных колебаний. Почему начальная амплитуда собственных колебаний совпадает в этом случае с амплитудой установившихся колебаний? Изменится ли это соотношение амплитуд при изменении начальных условий?

(в)\* Принимая во внимание аналитическое выражение (4.31) для  $\varphi(t)$  соответствующее резонансному случаю ( $\omega = \omega_0$ ), предскажите поведение сечений Пуанкаре на фазовой плоскости. Проверьте свое предсказание в моделирующем эксперименте.

(г)\* Рассмотрите переходный процесс резонансной раскачки осциллятора в отсутствие трения. По какому закону растет амплитуда в переходном процессе, начинающемся из состояния покоя в положении равновесия? Во сколько раз амплитуда маховика превысит амплитуду шатуна после  $k = 15$  полных циклов колебания шатуна? Сколько периодов внешнего воздействия необходимо для того, чтобы амплитуда маховика в  $n = 20$  раз превысила амплитуду шатуна? Проверьте свои ответы в эксперименте. Что представляет собой проекция фазовой траектории на плоскость  $(\varphi, \dot{\varphi})$  в этом случае? Как располагаются в фазовой плоскости сечения Пуанкаре?

(д)\* Возможно ли уменьшение амплитуды колебаний маховика в отсутствие трения при точной настройке внешнего воздействия в резонанс с собственной частотой осциллятора? Приведите физическое обоснование своему ответу. Подтверждаются ли Ваши заключения в эксперименте?

### 2.3\* Переходные процессы вблизи резонанса.

Исследуйте процесс установления колебаний в окрестности резонанса. Пусть частота внешнего возбуждения равна, например,  $1.2 \omega_0$  ( $\omega_0$  — собственная частота осциллятора). Рассмотрите прежде всего поведение системы в отсутствие трения при нулевых начальных условиях.

(а)\* Рассчитайте амплитуду колебаний на собственной частоте  $\omega_0$ , входящих составной частью в переходный процесс (напомним, что в отсутствие трения их амплитуда остается неизменной, и переходный процесс продолжается бесконечно долго). Найдите также амплитуду угловой скорости этих колебаний. Чему равно отношение амплитуды колебаний на собственной частоте к амплитуде установившихся вынужденных колебаний на частоте  $\omega$ ? Проверьте свой расчет, используя опцию «Разложение переходного процесса» в панели «Условия моделирования».

(б) Объясните наблюдаемые графики угловой скорости в процессе биений, используя метод векторных диаграмм для сложения двух синусоидальных колебаний, формирующих биения.

Сколько циклов колебаний совершит шатун к моменту, когда амплитуда угловой скорости маховика достигнет максимального значения? Сколько времени проходит между последовательными обращениями амплитуды в нуль? Иными словами, чему равен период таких переходных биений?

(в)\*\* Рассчитайте максимальные значения угловой скорости и угла отклонения во время биений. Чему равно отношение максимальной амплитуды маховика к амплитуде шатуна?

(г)\*\* Обратите внимание на распределение сечений Пуанкаре фазовой траектории для рассматриваемого процесса биений в отсутствие трения. Объясните наблюдаемое распределение.

(д)\*\* Рассмотрите влияние небольшого трения на изучаемый процесс, введя умеренное значение добротности  $Q$  (20 – 25), оставив без изменения значения всех остальных параметров. Каких изменений в поведении осциллятора следует при этом ожидать? Как изменится распределение сечений Пуанкаре на фазовой плоскости? Проследите поведение сечений Пуанкаре на протяжении всего переходного процесса. Объясните наблюдаемое распределение.

(е)\*\* Слегка измените значение частоты возбуждения. Пусть, скажем,  $\omega$  будет  $1.19\omega_0$  или  $1.21\omega_0$  вместо прежнего значения  $1.20\omega_0$ . К каким изменениям это приведет в переходном процессе? Какими будут распределения сечений Пуанкаре в фазовой плоскости при таких частотах возбуждения в случае отсутствия трения и при наличии слабого трения? С чем связано изменение наблюдаемой картины по сравнению с исследованным выше случаем  $\omega = 1.2\omega_0$ ?

(ж)\* Предскажите поведение сечений Пуанкаре для вынуждающей частоты  $\omega = 1.25\omega_0$ .

#### 2.4\* Переходные процессы вдали от резонанса.

Пусть частота принудительных колебаний возбуждающего шатуна в четыре раза меньше собственной частоты осциллятора:  $\omega = 0.25\omega_0$ . Будем рассматривать поведение системы при нулевых начальных условиях.

(а) Какими будут колебания маховика в переходном процессе, если трение отсутствует? Рассчитайте для этого случая амплитуды двух налагающихся друг на друга гармонических колебаний, одного на собственной частоте осциллятора  $\omega_0$  и второго на частоте возбуждения  $\omega$ . Чему равны амплитуды соответствующих угловых скоростей?

(б) Пронаблюдайте в эксперименте, какую фазовую траекторию вычерчивает в этом процессе изображающая точка. Объясните форму наблюдаемой фазовой траектории и распределение сечений Пуанкаре.

(в) Введите небольшое трение, выбрав для  $Q$  значение около 15, сохраняя прежними значения всех остальных параметров. Используя опцию «Разложение переходного процесса» в панели «Условия моделирования», наблюдайте изменение формы графиков при постепенном затухании колебаний на собственной частоте. Проследите, как сложная фазовая траектория переходного процесса постепенно трансформируется в эллипс, соответствующий установившимся синусоидальным колебаниям.

(г)\*\* Рассмотрите противоположный случай высокочастотной возбуждающей силы. Например, пусть частота внешнего воздействия будет в четыре раза больше собственной частоты осциллятора:  $\omega = 4\omega_0$ . Выберите нулевые начальные условия и полное отсутствие трения. Чему будет равно отношение амплитуд двух складывающихся колебаний с частотами  $\omega$  и  $\omega_0$ ? Во сколько раз максимальное отклонение маховика, наблюдаемое во время этого переходного процесса, превышает амплитуду установившихся колебаний, входящих составной частью в этот переходный процесс?

(е)\*\* Сравните формы фазовых траекторий и распределения сечений Пуанкаре для последних двух случаев, а именно,  $\omega = 0.25\omega_0$  и  $\omega = 4\omega_0$  в отсутствие трения. Чем объясняется подобие фазовых траекторий для этих случаев?

(д)\* Введите небольшое трение в случае, когда  $\omega = 4\omega_0$ . Проследите, как постепенно устанавливаются высокочастотные синусоидальные вынужденные колебания по мере того, как за-

тухают колебания на собственной частоте. Как в этом случае эволюционирует форма фазовой траектории? Как ведет себя распределение сечений Пуанкаре в течение рассматриваемого переходного процесса?

(е)\*\* Повторите моделирующий эксперимент при других значениях вынуждающей частоты. Возьмите, например, значения  $\omega = 0.125\omega_0$ ,  $\omega = 0.5\omega_0$ ,  $\omega = 1.5\omega_0$ ,  $\omega = 2\omega_0$ ,  $\omega = 6\omega_0$ . Объясните наблюдаемые особенности переходных процессов в этих случаях.

### 4.2.3 Приложение: сводка основных формул

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний линейного осциллятора при кинематическом возбуждении:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \omega_0^2\phi_0 \sin \omega t.$$

Периодическое частное решение этого уравнения, описывающее установившиеся вынужденные колебания:

$$\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta).$$

Амплитуда  $a$  и сдвиг фаз  $\delta$  установившихся вынужденных колебаний:

$$a(\omega) = \frac{\omega_0^2\phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad \tan \delta = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Резонансное значение вынуждающей частоты  $\omega_{\text{res}}$ , при котором амплитуда установившихся колебаний максимальна:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right).$$

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний при резонансе (для  $\gamma < \sqrt{2}\omega_0$ ) и приближенное выражение для нее, справедливое при  $\gamma \ll \omega_0$ :

$$a_{\text{max}} = \frac{\omega_0^2\phi_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \approx \frac{\omega_0\phi_0}{2\gamma} = Q\phi_0.$$

Здесь добротность  $Q$  — та же самая безразмерная величина  $Q = \omega_0/(2\gamma)$ , которая характеризует затухание собственных колебаний.

Амплитуда  $\Omega$  угловой скорости при установившихся вынужденных колебаниях:

$$\Omega = \omega a(\omega) = \frac{\omega_0^2\phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2/\omega - \omega)^2 + 4\gamma^2}}.$$

Максимальное (резонансное) значение амплитуды угловой скорости  $\Omega_{\text{max}}$  установившихся вынужденных колебаний (при  $\omega = \omega_0$ ):

$$\Omega_{\text{max}} = \omega a(\omega_0) = \frac{\omega_0^2\phi_0}{2\gamma} = \omega_0 Q\phi_0.$$

Спектральная зависимость средней поглощаемой (рассеиваемой) мощности (лоренцевский контур):

$$F(\Delta\omega) = \frac{1}{1 + (\Delta\omega)^2\tau^2} = \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2\tau^2}.$$

Начальные условия, при которых не существует переходного процесса (т. е. сразу происходят установившиеся колебания):

$$\varphi_0 = a \sin \delta, \quad \dot{\varphi}(0) = a\omega \cos \delta,$$

где  $a$  и  $\delta$  — амплитуда и сдвиг фаз установившихся колебаний.

Переходный процесс на резонансной частоте при нулевых начальных условиях:

$$\varphi(t) \approx -Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) \cos \omega_0 t.$$

## Глава 5

# Осциллятор с несинусоидальной внешней силой

В этой главе рассматриваются вынужденные колебания торсионного пружинного осциллятора при периодических принудительных мгновенных изменениях положения равновесия. Такое воздействие на осциллятор эквивалентно приложению внешнего крутящего момента с кусочно-постоянной зависимостью от времени, имеющей вид прямоугольных импульсов. Это пример вынужденных колебаний осциллятора под действием периодической, но негармонической внешней силы.

## 5.1 Теоретические сведения

### 5.1.1 Моделируемая физическая система

Для изучения вынужденных колебаний линейного осциллятора при несинусоидальном периодическом внешнем воздействии здесь рассматривается такой же механический торсионный пружинный осциллятор, что и в предыдущих главах пособия при изучении собственных колебаний и колебаний, вынуждаемых синусоидальной силой. Упругая спиральная пружина, прикрепленная к ротору (маховику), обеспечивает ему устойчивое положение равновесия. Второй конец пружины соединен с шатуном, который можно поворачивать вокруг оси, общей с осью маховика. При повороте шатуна положение равновесия маховика смещается вместе с шатуном на такой же угол. Осциллятор может совершать около нового положения равновесия затухающие собственные колебания. При слабом и умеренном трении частота этих колебаний почти совпадает с собственной частотой в отсутствие трения  $\omega_0$ , зависящей от жесткости пружины  $D$  и момента инерции маховика:  $\omega_0 = \sqrt{D/J}$ .

Внешнее периодическое воздействие на осциллятор в виде симметричных прямоугольных импульсов можно реализовать, если через равные промежутки времени принудительно поворачивать шатун поочередно то в одну, то в другую сторону на один и тот же угол. Будем предполагать, что эти принудительные повороты шатуна, а значит и смещения положения равновесия маховика, происходят настолько быстро, что маховик за это время не успевает ни повернуться на сколько-нибудь заметный угол, ни изменить своей угловой скорости. В математической модели системы эти скачкообразные повороты возбуждающего шатуна считаются мгновенными.

Смещение положения равновесия маховика равносильно приложению к нему дополнительного постоянного внешнего момента. Поэтому периодические скачкообразные повороты шатуна можно рассматривать как действие на осциллятор кусочно-постоянного внешнего момента сил.



Вынужденные колебания линейного осциллятора, происходящие в результате такого внешнего воздействия, могут служить удобным примером для изучения поведения линейной колебательной системы под действием периодической, но *негармонической* внешней силы.

### 5.1.2 Дифференциальное уравнение колебаний осциллятора

Пусть скачкообразные повороты шатуна происходят поочередно вправо и влево через равные промежутки времени  $T/2$ , так что на протяжении интервала  $(0, T/2)$  положение равновесия маховика смещено вправо на некоторый угол  $\phi_0$ , а в течение следующего интервала  $(T/2, T)$  положение равновесия смещено влево на такой же угол. Затем все повторяется сначала. Таким образом,  $T$  — это полный период внешнего воздействия.

Будем считать, что стрелка, прикрепленная к маховику, при ненапряженной пружине ориентирована параллельно шатуну. Другими словами, шатун и стрелка показывают на одно и то же деление шкалы, если пружина, соединяющая шатун с маховиком, не деформирована. Нулевое деление шкалы соответствует среднему положению шатуна (вертикальному на условном изображении системы в моделирующей программе), из которого он поочередно смещается в точки шкалы  $\pm\phi_0$ . Когда стрелка, указывающая ориентацию маховика, показывает на деление шкалы, характеризуемое углом  $\varphi$ , деформация пружины определяется углом  $\varphi - \phi_0$ , если шатун отклонен вправо, или углом  $\varphi + \phi_0$ , если шатун отклонен влево.

Таким образом, пока шатун смещен вправо, на маховик со стороны пружины действует момент упругой силы, равный  $-D(\varphi - \phi_0)$ , и на этом интервале времени вращательное движение маховика с моментом инерции  $J$  в отсутствие трения описывается дифференциальным уравнением:

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi - \phi_0). \quad (5.1)$$

Перенесем член  $-D\varphi$  (часть момента упругой силы, пропорциональную углу  $\varphi$  отклонения маховика от нулевого деления шкалы) из правой части уравнения (5.1) в левую. Можно считать, что оставшийся в правой части дополнительный момент сил  $D\phi_0$  обусловлен смещением шатуна из среднего положения вправо на угол  $\phi_0$ . Разделим обе части уравнения на момент инерции  $J$ , и введем обозначение  $\omega_0 = \sqrt{D/J}$  для характеризующей осциллятор величины  $\omega_0$ . Физический смысл этой величины — частота собственных колебаний осциллятора в отсутствие трения. В результате уравнение вращательного движения маховика на интервале времени  $(0, T/2)$  принимает следующий вид:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \omega_0^2\phi_0. \quad (5.2)$$

Когда в момент  $T/2$  шатун скачком поворачивается влево, знак момента упругой силы в правой части уравнения (5.2) изменяется на противоположный. Поэтому вращение маховика в течение интервала времени  $(T/2, T)$  описывается аналогичным уравнением, отличающимся от (5.2) лишь знаком постоянного члена в правой части. Поэтому

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \begin{cases} \omega_0^2\phi_0, & (0, T/2), \\ -\omega_0^2\phi_0, & (T/2, T). \end{cases} \quad (5.3)$$

При наличии вязкого трения в дифференциальное уравнение (5.2) вынужденных колебаний осциллятора нужно добавить еще один член, пропорциональный угловой скорости маховика  $\dot{\varphi}$ :

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \begin{cases} \omega_0^2\phi_0, & (0, T/2), \\ -\omega_0^2\phi_0, & (T/2, T). \end{cases} \quad (5.4)$$

Здесь постоянная затухания  $\gamma$  характеризует интенсивность вязкого трения в системе. Из-за трения колебания осциллятора, происходящие на собственной частоте  $\omega_0$ , постепенно затухают, и по истечении некоторого интервала времени после начала действия внешней силы происходит установление колебаний: угол  $\varphi(t)$ , характеризующий ориентацию маятника, будет изменяться периодически с периодом  $T$  в ритме изменения внешнего воздействия. Переходный процесс установления вынужденных колебаний в системе в общем случае продолжается тем дольше, чем большее время  $\tau$  требуется для затухания собственных колебаний осциллятора:  $\tau = 1/\gamma$ .

Напомним, что в случае синусоидальной внешней силы установившиеся вынужденные колебания принимают не только период внешнего воздействия, но и повторяют его форму (т. е. тоже характеризуются синусоидальной зависимостью от времени). При любой другой периодической внешней силе установившиеся вынужденные колебания имеют такой же как у вынуждающей силы период, но иную форму временной зависимости.

### 5.1.3 Гармоники периодической внешней силы и установившихся колебаний осциллятора

Для нахождения формы установившихся колебаний можно воспользоваться двумя принципиально различными способами.

Первый способ основан на разложении периодической временной зависимости внешней силы в ряд Фурье, т. е. на представлении этой силы в виде суперпозиции синусоидальных составляющих, называемых *гармониками*. Совокупность таких синусоидальных составляющих с дискретными частотами образует *спектр* периодического колебания сложной формы. Благодаря линейности дифференциального уравнения осциллятора действие каждой из гармонических составляющих вынуждающей силы можно рассмотреть по отдельности и найти соответствующее данной гармонике синусоидальное вынужденное колебание осциллятора. Результирующее вынужденное колебание находится как наложение (как сумма) этих синусоидальных колебаний с разными частотами.

Таким образом, каждой гармонике «входного» внешнего периодического воздействия на осциллятор соответствует своя гармоническая составляющая той же частоты в «выходных» установившихся колебаниях осциллятора. Однако благодаря избирательной реакции осциллятора на гармонические воздействия разных частот отношения амплитуд гармоник в спектре выходного колебания будут иными, нежели отношения амплитуд тех же гармоник в спектре входного периодического воздействия. Поэтому и график установившихся колебаний на выходе будет отличаться по форме от графика временной зависимости входного воздействия.

В частности, может оказаться, что какая-либо  $n$ -я гармоническая составляющая вынуждающей силы с относительно небольшой амплитудой вызывает особенно сильные колебания осциллятора. Так происходит, когда частота  $\omega_n = n\omega = n \cdot 2\pi/T$  этой гармоники близка к собственной частоте осциллятора  $\omega_0$ , так как вынужденные колебания осциллятора под действием такой синусоидальной силы происходят в условиях, близких к резонансным. Напротив, относительный вклад гармонических составляющих вынуждающей силы, частоты которых лежат далеко от максимума резонансной кривой (амплитудно-частотной характеристики осциллятора), на «выходе» системы будет заметно ослаблен благодаря резонансной селективности реакции осциллятора — в спектре его результирующих колебаний далекие от резонанса гармоники оказываются в значительной мере подавленными.

Отличие формы установившихся колебаний от формы вынуждающей силы обусловлено не только изменением соотношения амплитуд гармоник на «входе» и на «выходе», но и различиями в изменении фаз разных гармоник при их передаче с «входа» на «выход». В случае высокочастот-

ротного ( $Q \gg 1$ ) осциллятора, имеющего «острую» амплитудно-частотную характеристику и почти ступенчатую фазо-частотную характеристику, гармоники с частотами ниже резонансной ( $\omega_n < \omega_0$ ) имеют на выходе практически такие же фазы, как и на входе, но высокочастотные гармоники ( $\omega_n > \omega_0$ ) имеют на выходе инвертированные фазы (в выходных колебаниях осциллятора эти гармоники представлены с противоположными по отношению к вынуждающей силе фазами).

Гармоника внешней силы, частота которой близка к  $\omega_0$ , имеет на выходе заметно увеличенный относительный вклад, и отстает по фазе почти на  $\pi/2$  от соответствующих ей синусоидальных колебаний в составе внешней силы.

Приведем аналитическое решение дифференциального уравнения (5.4), основанное на разложении входящей в его правую часть периодической кусочно-постоянной ступенчатой функции в ряд Фурье. Это разложение содержит только нечетные гармоники (при сделанном выборе начала отсчета времени — только синусы) с частотами  $\omega_k = k\omega$  ( $k = 1, 3, 5 \dots$ ), где  $\omega = 2\pi/T$  — частота внешнего воздействия:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{4\phi_0\omega_0^2}{\pi k} \sin \omega_k t. \quad (5.5)$$

Отметим, что амплитуды последовательных гармоник в разложении периодической ступенчатой функции убывают с увеличением их номера  $k$  и частоты  $\omega_k = k\omega$  сравнительно медленно — как  $1/k$ . Рассматриваемый случай дает пример действительно полигармонического внешнего воздействия на осциллятор, так как спектр ступенчатой внешней силы богат гармониками.

Периодическое частное решение уравнения (5.5) для зависимости угла отклонения маховика осциллятора от времени  $\varphi(t)$  при установившихся вынужденных колебаниях дает:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{4\phi_0}{\pi k} \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_k^2)^2 + 4\gamma^2\omega_k^2}} \sin(\omega_k t + \alpha_k). \quad (5.6)$$

где фазы  $\alpha_k$  отдельных гармонических составляющих определяются соотношениями:

$$\tan \alpha_k = \frac{2\gamma\omega_k}{\omega_k^2 - \omega_0^2}. \quad (5.7)$$

Из формул (5.6) и (5.7) можно увидеть отмеченные выше особенности реакции линейного осциллятора на периодическое внешнее воздействие с прямоугольной зависимостью от времени, а именно, каким образом амплитуды и фазы гармоник «входного» спектра внешней силы преобразуются при переходе к характеристикам спектра «выходных» установившихся колебаний осциллятора. Видно, в частности, что при совпадении частоты  $\omega_k$  одной из гармоник внешнего момента с резонансной частотой осциллятора  $\omega_{\text{res}}$  знаменатель соответствующего члена суммы в (5.6) оказывается очень малым, особенно для осциллятора с малым показателем затухания ( $\gamma \ll \omega_0$ ), т. е. с высокой добротностью ( $Q = \omega_0/2\gamma \gg 1$ ). Иными словами, реакция осциллятора в этом случае имеет характер *резонанса*. Напомним, что при слабом и умеренном трении резонансная частота очень близка к частоте  $\omega_0$  собственных колебаний в отсутствие трения:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right).$$

Поскольку относительная разность  $\omega_{\text{res}}$  и  $\omega_0$  представляет собой величину второго порядка по малому параметру  $\gamma/\omega_0 = 1/(2Q)$ , в большинстве практически важных случаев можно не делать различия между собственной и резонансной частотами и полагать  $\omega_{\text{res}} = \omega_0$ .

Преобразование спектра прямоугольного входного воздействия в спектр колебаний на выходе иллюстрирует рис. 5.1, где приведен вид экрана при работе в разделе программы «Спектр установившихся колебаний». Резонансная кривая в левом верхнем углу экрана характеризует реакцию осциллятора с данными параметрами на отдельные гармонические составляющие внешней силы.

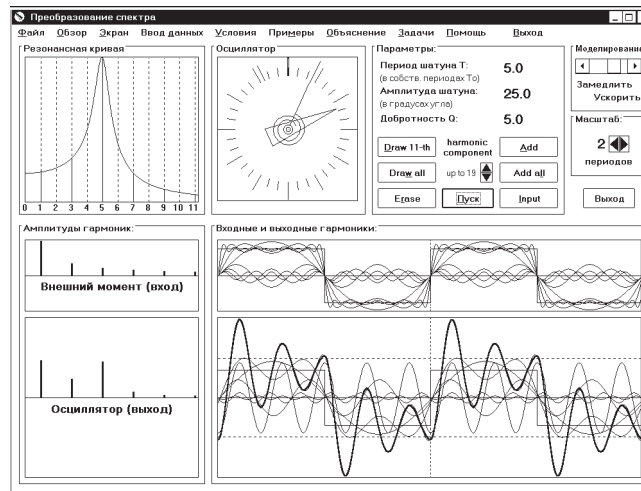


Рис. 5.1: Преобразование спектра внешнего входного момента с прямоугольной зависимостью от времени в спектр установившихся выходных вынужденных колебаний осциллятора.

При плавном изменении (сканировании) частоты  $\omega$  внешнего синусоидального воздействия резонансная реакция осциллятора возможна только при совпадении этой частоты с  $\omega_{\text{res}}$ . Другими словами, возможен только один резонанс, наступающий при совпадении периода  $T$  синусоидального воздействия с периодом  $T_0$  собственных колебаний осциллятора. Однако при сканировании периода внешнего воздействия с прямоугольной зависимостью от времени обнаруживается множество резонансов: резонанс наступает, когда период внешнего воздействия как совпадает с собственным периодом осциллятора, так и тогда, когда он втрое, впятеро и вообще в нечетное число раз больше собственного периода, т. е. при  $T = (2n + 1)T_0$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Высшие резонансы с  $n > 1$  наступают, когда собственная частота осциллятора совпадает с частотой одной из нечетных гармоник внешней силы.

Ступенчатую функцию в правой части (5.4) можно представить как сумму других функций разными способами. Возможно разложение в ряд не только по синусам и косинусам, но и по другим полным системам функций. С математической точки зрения все такие разложения одинаково допустимы. Целесообразность разложения именно в ряд Фурье, т. е. на сумму гармонических составляющих, связана с *физикой*: только при синусоидальной форме внешнего воздействия реакция осциллятора будет выражаться в результирующем движении, имеющем такую же форму временной зависимости.

Кроме того, линейный осциллятор с высокой добротностью  $Q$  (т. е. с острой резонансной кривой) будет заметным образом реагировать только на ту гармонику сложного внешнего воздействия (сигнала), частота которой близка к его собственной частоте. В этом отношении осциллятор можно рассматривать как своего рода спектральный прибор, выделяющий в сложном сигнале определенную гармоническую составляющую. Иначе говоря, высокودобротный перестраиваемый по частоте осциллятор производит фактическое разложение сложного входного воздействия в ряд Фурье на *физическом уровне*. Именно поэтому для осциллятора синусоидальные функции оказываются физически выделенными по сравнению с различными полными

системами других функций.

### 5.1.4 Вынужденные колебания осциллятора как собственные колебания около чередующихся смещенных положений равновесия

Другой способ нахождения установившихся колебаний при действии на осциллятор ступенчатой внешней силы, т. е. нахождения периодического частного решения неоднородного дифференциального уравнения (5.4), основан на представлении установившегося движения как сменяющих друг друга затухающих собственных колебаний осциллятора около чередующихся положений равновесия  $+\phi_0$  и  $-\phi_0$ . На протяжении первого полуцикла от  $t = 0$  до  $t = T/2$  положение равновесия находится при  $\varphi = +\phi_0$ . Для этого полуцикла зависимость  $\varphi(t)$  от  $t$  может быть представлена следующим образом:

$$\varphi(t) = \phi_0 + Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta), \quad (0, T/2), \quad (5.8)$$

где  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  — частота собственных затухающих колебаний, а  $A$  и  $\theta$  — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий для первого полуцикла установившихся колебаний. В течение следующего полуцикла  $(T/2, T)$  затухающие собственные колебания происходят около смещенного в противоположную сторону положения равновесия, и для этого интервала времени описывающая колебания функция  $\varphi(t)$  имеет вид:

$$\varphi(t) = -\phi_0 - Ae^{-\gamma(t-T/2)} \cos(\omega_1(t-T/2) + \theta), \quad (T/2, T), \quad (5.9)$$

где постоянные  $A$  и  $\theta$  имеют те же значения, что и в (5.8). Так будет потому, что при установившихся колебаниях график движения в течение второй половины периода, когда шатун смещен влево, будет со сдвигом по времени на  $T/2$  повторять в зеркальном отражении график движения в течение первой половины периода. Это соотношение отчетливо видно из рисунка 5.2, на котором приведены графики установившихся колебаний при  $T = 3T_0$  (период  $T$  вынуждающей силы вдвое больше собственного периода  $T_0$ ).

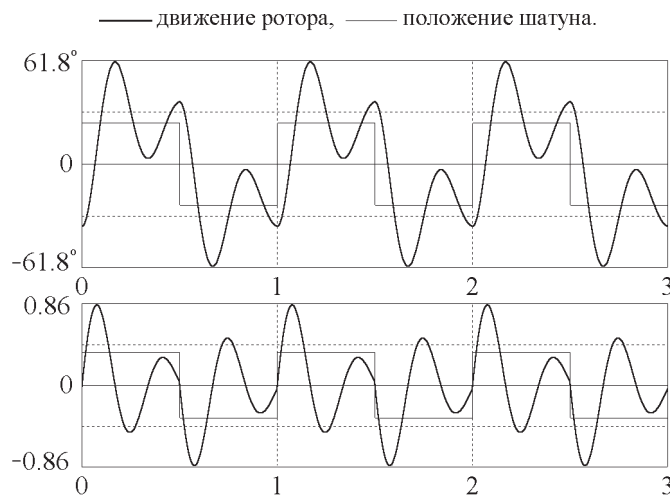


Рис. 5.2: Графики угла отклонения (вверху) и угловой скорости (внизу) для установившихся колебаний осциллятора при резонансе  $T = 3T_0$  (добротность  $Q = 3$ , амплитуда шатуна  $\phi_0 = 25^\circ$ ).

Постоянные  $A$  и  $\theta$  для любых заданных значений  $T$  и  $\gamma$  можно рассчитать, пользуясь тем, что при скачкообразном (мгновенном) повороте шатуна из одного положения в другое угол от-

клонения маятника и его угловая скорость не успевают измениться. Это требование дает два уравнения для нахождения  $A$  и  $\theta$ . Решая их, находим:

$$\tan \theta = -\frac{e^{-\gamma T/2}[\omega_1 \sin(\omega_1 T/2) + \gamma \cos(\omega_1 T/2)] + \gamma}{e^{-\gamma T/2}[\omega_1 \cos(\omega_1 T/2) - \gamma \sin(\omega_1 T/2)] + \omega_1}, \quad (5.10)$$

$$A = \frac{2\phi_0}{e^{-\gamma T/2} \cos(\omega_1 T/2 + \theta) + \cos \theta}. \quad (5.11)$$

Выражения (5.8)–(5.11) описывают установившееся движение только на промежутке времени от 0 до  $T$ , т. е. в них нельзя формально подставлять значения аргумента  $t$ , превышающие  $T$ . Тем не менее, имея график периодической функции  $\varphi(t)$  для интервала  $[0, T]$ , ее значение для произвольного момента времени  $t$  можно получить простым сдвигом на соседние промежутки времени  $[T, 2T]$ ,  $[2T, 3T]$  и т.д., учитывая, что  $\varphi(t + T) = \varphi(t)$ .

### 5.1.5 Переходные процессы при раскачке колебаний осциллятора ступенчатым внешним моментом

Рассмотренное выше представление вынужденных колебаний линейного осциллятора под действием кусочно-постоянной внешней силы как последовательности собственных колебаний около чередующихся положений равновесия позволяет понять многие особенности поведения осциллятора не только в установившихся колебаниях, но и в переходном процессе. В частности, легко понять физическую причину резонансного роста амплитуды колебаний, когда период внешнего ступенчатого воздействия совпадает с собственным периодом осциллятора, и когда он в нечетное число раз больше собственного периода.

Для определенности будем считать, что до включения внешнего воздействия ротор осциллятора покоился в положении равновесия. Когда шатун скачком смещается в отклоненное положение, осциллятор начинает совершать около него собственные колебания, причем это движение начнется из среднего положения  $\varphi = 0$  при нулевой начальной скорости  $\dot{\varphi} = 0$ . Поэтому, пока шатун смещен вправо, движение маятника происходит по закону

$$\varphi(t) = \phi_0 - \phi_0 \exp(-\gamma t) \cos \omega_1 t.$$

(При слабом трении  $\omega_1 \approx \omega_0$ ). Таким образом, начиная движение с нулевой угловой скоростью из  $\varphi = 0$  при  $t = 0$ , маятник проходит через смещенное положение равновесия  $\varphi = \phi_0$  через четверть периода (когда  $\omega_0 t = \pi/2$ ), и достигает своего крайнего отклонения вправо, равного почти  $\varphi = 2\phi_0$ , через половину периода (когда  $\omega_0 t = \pi$  и  $t = T_0/2$ ). (В отсутствие трения он бы достиг отклонения  $\varphi = 2\phi_0$ .) Если период принудительного движения шатуна  $T$  равен  $T_0$ , то маятник оказывается в этой точке  $\varphi \approx 2\phi_0$  с нулевой угловой скоростью как раз в тот момент  $t = T/2$ , когда шатун скачком поворачивается в левое отклоненное положение  $-\phi_0$ , которое становится новым положением равновесия маятника для следующего интервала времени  $(T_0/2, T)$ . Таким образом, следующий полуцикл его собственных колебаний опять начинается при нулевой угловой скорости, но уже при отклонении вправо приблизительно на угол  $3\phi_0$  от (смещенного влево) нового положения равновесия. Это начальное отклонение почти на  $2\phi_0$  больше, чем в предыдущем полуцикле собственных колебаний, т. е. в момент предыдущего скачкообразного поворота шатуна в новое положение. (Отклонение было бы точно на  $2\phi_0$  больше предыдущего при полном отсутствии трения.)

Таким образом, за каждый период внешнего воздействия размах колебаний осциллятора в отсутствие трения увеличивается на одну и ту же величину  $4\phi_0$ , если этот период совпадает с

периодом собственных колебаний или превышает его в нечетное число раз. В реальной системе такой линейный во времени неограниченный рост амплитуды невозможен из-за трения. Амплитуда растет приблизительно линейно только в начальной стадии переходного процесса раскачки осциллятора из состояния покоя. Резонансный рост постепенно замедляется, и в конце концов устанавливается стационарный режим колебаний, когда увеличение амплитуды при перескоке шатуна компенсируется ее уменьшением из-за трения.

Рассмотренный процесс раскачки осциллятора из состояния покоя с постепенным выходом в режим установившихся колебаний особенно наглядно изображается с помощью фазовой траектории, показанной (вместе с графиками угла отклонения и угловой скорости) на рис. 5.3. Если до включения внешнего воздействия осциллятор покоился в среднем положении  $\varphi = 0$ , фазовая траектория выходит из начала координат фазовой плоскости, и ее начальный участок представляет собой скручивающуюся эллиптическую спираль с фокусом в точке  $(+\phi_0, 0)$ . Этот фокус соответствует новому положению равновесия, смещенному вправо. При  $T = 3T_0$  за время  $T/2$ , пока шатун смещен вправо, спираль совершает полтора оборота вокруг фокуса. Следующий участок фазовой траектории, соответствующий колебаниям осциллятора после перескока шатуна в левое положение, изображается аналогичным отрезком спирали, скручивающейся к другому фокусу, расположенному в симметричной точке  $(-\phi_0, 0)$  фазовой плоскости.

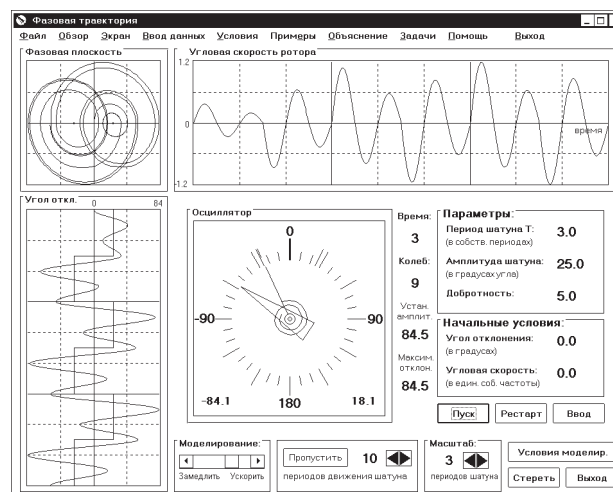


Рис. 5.3: Графики и фазовая траектория для процесса раскачки осциллятора из состояния покоя в случае резонанса  $T = 3T_0$ .

Когда на период внешнего воздействия приходится нечетное число периодов собственных колебаний осциллятора, переход фазовой траектории к новому фокусу происходит в тот момент, когда изображающая точка пересекает ось абсцисс фазовой плоскости на максимальном удалении от этого нового фокуса. В результате новый виток фазовой траектории оказывается крупнее предыдущего. Такое «раскручивание» фазовой траектории происходит до тех пор, пока приращение радиуса витков за счет перескока на новый фокус не будет компенсироваться уменьшением радиуса витков из-за трения в промежутке между перескоками. Установившимся колебаниям соответствует симметричная относительно начала координат (центральная симметрия) фазовая траектория, образованная двумя плавно переходящими друг в друга отрезками спиралей, которые описывают собственные затухающие колебания осциллятора около поочередно сменяющихся симметричных положений равновесия (см. рис. 5.3).

### 5.1.6 Оценка размаха установившихся колебаний

На основе приведенного выше описания установившихся колебаний осциллятора под действием кусочно-постоянной вынуждающей силы легко сделать количественную оценку максимальных отклонений для случаев, когда период внешнего воздействия кратен собственному периоду осциллятора.

Рассмотрим сначала основной резонанс, когда период вынуждающей силы равен периоду собственных колебаний:  $T = T_0$ . Оценку  $\varphi_m$  можно сделать следующим образом. Замкнутая фазовая траектория установившихся колебаний в этом случае состоит из одного витка, пересекающего ось  $\varphi$  в точках  $-\varphi_m$  и  $\varphi_m$ , соответствующих одинаковым максимальным отклонениям маятника вправо и влево от среднего положения. Эти точки находятся на угловых удалениях от  $\phi_0$  на  $|\varphi_m + \phi_0|$  влево и на  $\varphi_m - \phi_0$  вправо.

Верхняя половина фазовой траектории образована отрезком эллиптической спирали (полувитком) с фокусом в точке  $\phi_0$ , смещенной вправо из начала координат. При прохождении изображающей точки по этому участку траектории осциллятор совершает половину периода затухающего собственного колебания относительно смещенного вправо положения равновесия: от максимального отклонения  $|\varphi_m + \phi_0|$  влево (измеренного от  $\phi_0$ ) до максимального отклонения  $\varphi_m - \phi_0$  вправо. В момент достижения крайней правой точки положение равновесия переключается в фокус  $-\phi_0$ , и дальше изображающая точка проходит по нижнему полувитку, замыкая фазовую траекторию. (Заметим, что в случае малого трения эта составная замкнутая фазовая траектория почти не отличается от эллипса. Это значит, что установившимся откликом высокодобротного осциллятора на внешнее воздействие с прямоугольной формой зависимости от времени в условиях основного резонанса  $T = T_0$  будет почти синусоидальное колебание на частоте  $\omega_0$  — вклад высших гармоник в колебание на выходе оказывается ничтожным.)

Относительное изменение амплитуды из-за трения за половину периода  $t = T_0/2$  затухающего собственного колебания составляет  $q = \exp(-\gamma T_0/2) = \exp(-\pi/2Q)$ . (Здесь произведение постоянной затухания  $\gamma$  и периода собственных колебаний  $T_0$  выражено через добротность  $Q$ :  $\gamma T_0/2 = \gamma\pi/\omega_0 = \pi/2Q$ , поскольку по определению  $Q = \omega_0/2\gamma$ ). Другими словами, каждое крайнее отклонение от равновесия в одну сторону равно умноженному на  $q < 1$  предыдущему крайнему отклонению в противоположную сторону. Поэтому для верхнего полувитка левое и правое крайние отклонения от равновесия связаны соотношением:

$$(\varphi_m + \phi_0)q = \varphi_m - \phi_0, \quad (5.12)$$

откуда для искомого размаха колебаний получаем:

$$\varphi_m = \phi_0 \frac{1+q}{1-q} \approx \frac{4}{\pi} Q \phi_0. \quad (5.13)$$

Последнее приближенное выражение для амплитуды вынужденных колебаний справедливо в случае слабого затухания, когда  $q = \exp(-\gamma T_0/2) = \exp(-\pi/2Q) \approx 1 - \pi/2Q$ . Формула (5.13) показывает, что в условиях первого резонанса, вызываемого основной гармоникой внешнего воздействия, амплитуда установившихся колебаний осциллятора приблизительно в  $Q$  раз превосходит амплитуду  $(4/\pi)\phi_0$  этой гармоники в принудительном движении шатуна с прямоугольной зависимостью от времени [см. формулу (5.5)]. К такому же заключению можно прийти, используя спектральный подход к описанию установившихся вынужденных колебаний.

Аналогичным образом можно получить оценку размаха установившихся колебаний и для резонансов высоких порядков. Например, для резонанса при  $T = 3T_0$  (три периода собственных колебаний на протяжении одного периода шатуна) можно рассмотреть половину замкнутой фазовой траектории, состоящую из трех полувитков спирали, скручивающейся к правому фокусу



$(\phi_0, 0)$ . В начале каждого цикла, когда шатун скачком поворачивается слева направо, изображающая точка оказывается на оси абсцисс фазовой плоскости в некоторой точке  $-\varphi_0$  (левая часть рис. 5.4) слева от нового положения равновесия. Через половину цикла собственных колебаний около  $\phi_0$ , т. е. спустя  $T_0/2$ , маховик достигает максимального отклонения вправо  $\varphi_m$ , которое нам предстоит оценить. Затем на протяжении следующего периода собственных колебаний  $T_0$  изображающая точка обходит полный оборот вокруг фокуса  $(\phi_0, 0)$  и опять оказывается на оси абсцисс в точке  $\varphi_0$ , смещенной вправо от фокуса  $(\phi_0, 0)$ . В этот момент шатун скачком поворачивается влево, и оставшаяся часть фазовой траектории формируется полутора витками спирали, скручивающейся к левому фокусу  $(-\phi_0, 0)$ .

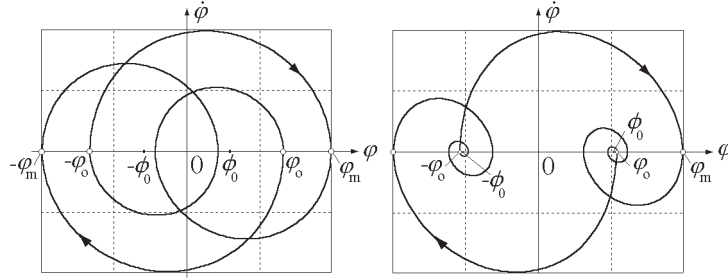


Рис. 5.4: Фазовые траектории установившихся колебаний осциллятора в случае резонанса  $T = 3T_0$  при  $Q = 5$  (слева) и резонанса  $T = 5T_0$  при сильном трении  $Q = 2$  (справа).

После каждой половины периода собственных колебаний  $T_0/2$  величина максимального отклонения от положения равновесия уменьшается на один и тот же множитель  $q = \exp(-\gamma T_0/2) = \exp(-\pi/2Q)$ . В начале цикла изображающая точка смещена от положения равновесия  $\phi_0$  влево на  $\varphi_0 + \phi_0$ . Спустя  $T_0/2$  точка достигает максимального отклонения вправо от  $\phi_0$  на угол  $\varphi_m - \phi_0$ . Поэтому

$$(\varphi_0 + \phi_0)q = \varphi_m - \phi_0. \quad (5.14)$$

На протяжении следующего периода  $T_0$  изображающая точка опишет целую петлю вокруг  $\phi_0$ , а ее максимальное отклонение от равновесия умножится на  $q^2$ . Поскольку теперь ее смещение из начала координат равно  $\varphi_0$ , из равновесия она смещена на  $\varphi_0 - \phi_0$ . Таким образом, можно написать:

$$(\varphi_m - \phi_0)q^2 = \varphi_0 - \phi_0. \quad (5.15)$$

Решая систему уравнений (5.14 – 5.15), получаем следующее выражение для  $\varphi_m$ :

$$\varphi_m = \phi_0 \left( 1 + \frac{2q}{1 - q^3} \right). \quad (5.16)$$

Например, при  $Q = 5$  (такому значению добротности соответствует фазовая диаграмма в левой части рис. 5.4) множитель  $q = \exp(-\pi/2Q) = 0.73$ , и формула (5.16) для максимального отклонения дает  $\varphi_m = 3.39 \phi_0$ .

Заметим, что в этом случае получить оценку размаха колебаний на основе спектрального подхода затруднительно, так как форма выходных колебаний определяется не только находящейся в резонансе с осциллятором третьей гармоникой: такой же по порядку величины вклад

дает и первая гармоника. Форма результирующих колебаний заметно отличается от синусоидальной, что видно как из фазовой диаграммы на рис. 5.4, так и непосредственно из графиков на рис. 5.2 (стр. 93), соответствующих параметрам  $T = 3T_0$ ,  $Q = 3$  и  $\phi_0 = 25^\circ$ .

В случае сильного трения размах установившихся колебаний ротора даже в резонансных условиях лишь ненамного превосходит размах принудительных колебаний шатуна, а форма выходных колебаний в меньшей степени отличается от входных прямоугольных импульсов. Основное искажение формы выражается в размытии крутого переднего фронта входных импульсов. Графики угла отклонения и угловой скорости для установившихся колебаний при  $T = 5T_0$  и сильном трении ( $Q = 2$ ) показаны на рис. 5.5.

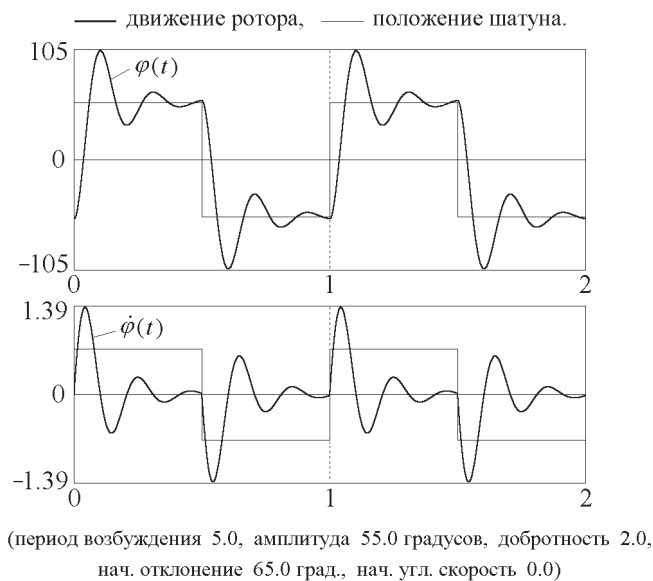


Рис. 5.5: Графики установившихся колебаний при сильном трении.

Чтобы оценить максимальный отброс стрелки в установившихся колебаниях при сильном трении (добротность  $Q$  порядка 1 – 3 единиц), заметим, что при  $T/T_0 > Q$  собственные колебания около смещенного положения равновесия успевают почти полностью затухнуть, прежде чем шатун совершит скачкообразный поворот в новое положение. В таких случаях спираль фазовой траектории, скручиваясь к фокусу  $(\phi_0, 0)$ , подходит очень близко к этой точке до момента перехода к другому фокусу (см правую часть рис. 5.4 на стр. 97). Это значит, что в начале каждого полуцикла установившихся колебаний изображающая точка стартует практически от одного из фокусов. Так происходит при  $T/T_0 > Q$  независимо от точного значения  $T/T_0$ : не имеет значения, будет ли период внешнего воздействия резонансным (т. е. равен нечетному числу собственных периодов) или нет.

Получим оценку максимального отброса в рассматриваемых условиях. При повороте шатуна слева направо изображающая точка начинает движение из левого фокуса  $(-\phi_0, 0)$  по сжимающейся спирали, закручивающейся вокруг правого фокуса  $(\phi_0, 0)$ , как показано в правой части рис. 5.4. Спираль пересекает ось абсцисс в интересующей нас точке  $\varphi_m$  после полупериода  $T_1/2 \approx T_0/2$  затухающих собственных колебаний около смещенного положения равновесия  $\phi_0$ . Величина начального угла отклонения от этого положения составляет приблизительно  $2\phi_0$ , а спустя половину периода угловое отклонение равно  $\varphi_m - \phi_0$ . Начальное и конечное отклонения отличаются множителем  $q = \exp(-\gamma T_0/2) = \exp(-\pi/2Q)$ , поэтому  $2\phi_0 q = \varphi_m - \phi_0$ . Отсюда получаем для максимального отброса стрелки выражение:

$$\varphi_m = \phi_0(1 + 2q) = \phi_0(1 + 2e^{-\pi/2Q}). \quad (5.17)$$

Например, при  $Q = 2$  максимальный отброс маховика равен  $1.91 \phi_0$ , т. е. почти вдвое превышает отклонение возбуждающего шатуна из среднего положения.

Полученный результат не зависит от периода вынуждающего воздействия, однако он справедлив лишь при условии, что за половину этого периода собственные колебания почти полностью «вымирают». Чтобы определить точность полученной оценки, можно рассмотреть возможное остаточное смещение маховика из точки  $\phi_0$ . Например, при  $T = 5T_0$  это остаточное смещение равно приблизительно  $2\phi_0 \exp(-5\pi/2Q)$ , что при  $Q = 2$  дает  $0.04 \phi_0$ . Это означает, что в начале каждого полуцикла изображающая точка стартует не точно из  $\pm\phi_0$ , как предполагалось при проведении оценки, а из некоторой точки, слегка смещенной из  $\pm\phi_0$  в ту или иную сторону в зависимости от точного значения  $T/T_0$ .

Если период колебаний шатуна в (небольшое) четное число раз больше собственного периода осциллятора, максимальное отклонение маховика в установившихся вынужденных колебаниях при слабом трении близко к удвоенному размаху колебаний шатуна  $2\phi_0$ . Это легко заключить из вида фазовой траектории (см., например, рис. 5.6 для случая  $T = 4T_0$ ): каждая из двух симметричных половин фазовой траектории состоит из целого числа витков спирали, скручивающейся к одному из фокусов  $(\phi_0, 0)$  и  $(-\phi_0, 0)$ . Каждый очередной полуцикл установившихся вынужденных колебаний длительностью  $T/2 = nT_0$  состоит из целого числа  $n$  периодов  $T_0$  собственных колебаний, происходящих около смещенного положения равновесия. Каждый такой полуцикл вынужденных колебаний начинается и заканчивается при почти нулевой угловой скорости ротора. На рис. 5.6 показана фазовая траектория таких установившихся колебаний при  $T = 4T_0$  вместе с графиками угла отклонения и угловой скорости.

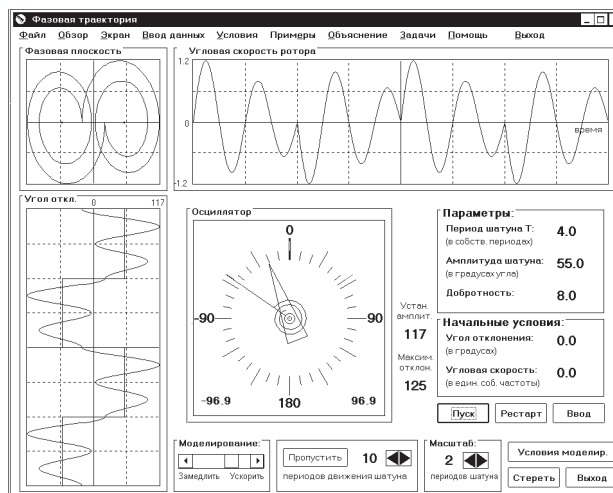


Рис. 5.6: Фазовая траектория и графики установившихся колебаний осциллятора при  $T = 4T_0$ .

### 5.1.7 Установившиеся колебания при частых поворотах шатуна

При высокой частоте перескоков возбуждающего шатуна, когда период возбуждения значительно меньше периода собственных колебаний осциллятора, в установившемся движении маховик совершает лишь небольшие вынужденные колебания около своего среднего положения  $\varphi = 0$ .

Эти колебания происходят в противофазе с принудительными поворотами шатуна. Так как амплитуда колебаний ротора мала по сравнению с размахом угловых смещений шатуна  $\phi_0$ , можно считать, что в интервале между скачкообразными поворотами шатуна деформация пружины неизменна и, следовательно, действующий на маховик со стороны пружины момент упругой силы постоянен и сообщает маховику постоянное угловое ускорение. Момент силы лишь изменяет свое направление на противоположное в моменты перескоков шатуна в новое положение.

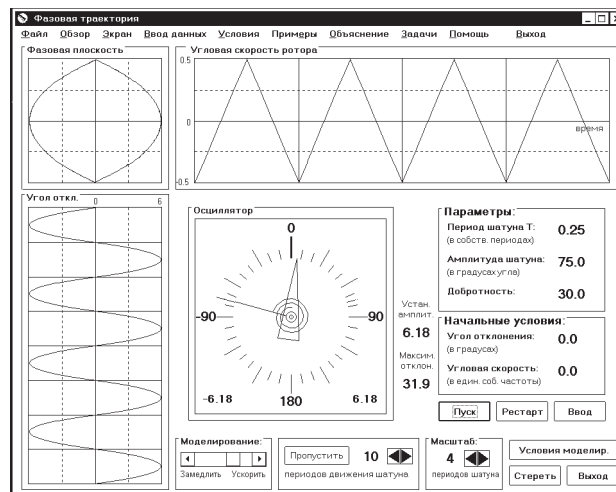


Рис. 5.7: Установившиеся колебания при  $T \ll T_0$  (прямолинейные отрезки пилообразного графика угловой скорости и параболические сегменты графика угла отклонения).

График угловой скорости маховика в установившихся колебаниях при частых перескоках шатуна состоит из отрезков почти прямых линий, соответствующих равноускоренному вращению под действием постоянного момента силы упругости деформированной пружины. Вращение продолжается в одном направлении в интервалах между перескоками шатуна. После каждого поворота шатуна угловое ускорение изменяет знак, оставаясь практически неизменным по величине. В эти моменты прямолинейные отрезки графика скорости соединяются, образуя характерный пилообразный профиль с треугольными равнобедренными «зубцами» (рис. 5.7). Изломы на непрерывном графике скорости соответствуют разрывам графика ускорения (графика внешнего момента). Пилообразному графику скорости с почти прямолинейными треугольными зубцами соответствует график угла отклонения, образованный чередующимися отрезками парабол, плавно переходящими друг в друга в моменты изломов графика скорости.

### 5.1.8 Превращения энергии

При возбуждении колебаний осциллятора внешним моментом с прямоугольной зависимостью от времени внешний источник не совершает никакой работы, пока возбуждающий шатун неподвижен в промежутках между скачкообразными поворотами. Это значит, что обмен энергией между осциллятором и источником, приводящим в движение шатун, может происходить только в моменты перескоков шатуна из одного положения в другое. В промежутках между скачками, пока осциллятор совершает затухающие собственные колебания около одного из смещенных положений равновесия, происходят лишь поочередные превращения потенциальной энергии закрученной пружины в кинетическую энергию маховика и обратно, сопровождаемые постепенной диссипацией механической энергии из-за трения.

Очевидно, что в принятой модели физической системы, когда повороты шатуна считаются мгновенными, скорость массивного маховика не изменяется за время скачка. Поэтому не изменяется и кинетическая энергия осциллятора. Скачок испытывает лишь потенциальная энергия упругой деформации пружины. Потенциальная энергия возрастает, если угол закручивания пружины относительно недеформированного состояния увеличивается, и убывает в противоположном случае.

Чтобы получить представление об этих энергетических преобразованиях, можно обратиться к разделу компьютерной программы «Превращения энергии» и рассмотреть соответствующие графики зависимости разных видов энергии от времени одновременно с движением точки, изображающей полную энергию системы, на графике зависимости потенциальной энергии от угла отклонения маховика.

Каждому из двух положений равновесия маховика соответствует своя параболическая потенциальная яма (рис. 5.8).

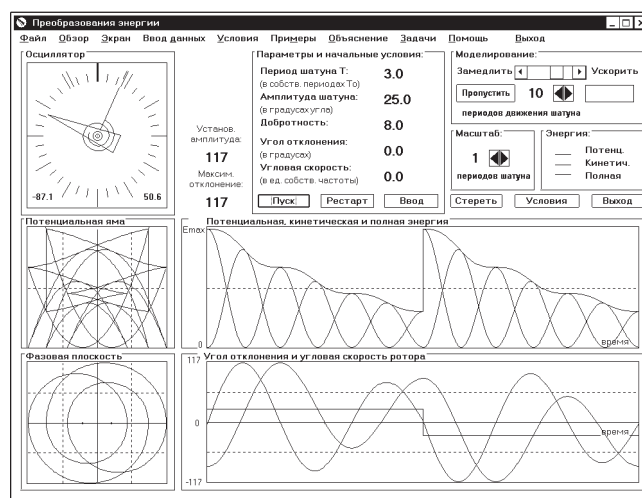


Рис. 5.8: Энергетические превращения при установившихся вынужденных колебаниях осциллятора в случае  $T = 3T_0$ .

Когда маховик расположен под углом  $\varphi$  относительно среднего положения (относительно нулевого деления шкалы), потенциальная энергия пружины  $U(\varphi)$  дается одной из квадратичных функций:

$$U(\varphi) = \frac{1}{2}k(\varphi \mp \phi_0)^2. \quad (5.18)$$

Нужно брать верхний знак в (5.18), когда положение равновесия смещено вправо (в точку  $+\phi_0$ ), и нижний знак в противоположном случае. Мгновенный перескок шатуна из одного положения в другое при неизменном значении угла  $\varphi$  приводит к вертикальному переходу изображающей точки с одной из ветвей этих потенциальных кривых на другую. До следующего перескока шатуна, пока осциллятор совершает затухающие собственные колебания около одного из смещенных положений равновесия, точка, изображающая полную энергию осциллятора, перемещается туда и обратно между берегами потенциальной ямы, соответствующей данному положению равновесия, постепенно опускаясь из-за трения на ее дно. Это поведение отчетливо видно на рис. 5.8.

Важно отметить, что в принятой модели механической системы мы полагаем, что деформация пружины имеет квазистатический характер, т. е. мы пренебрегаем возможностью ее собственных колебаний как распределенной системы, каждый элемент которой обладает как упругими, так и

инертными свойствами. При малой инертности пружины эти колебания имеют значительно более высокую частоту по сравнению с колебаниями массивного маховика, и обычно очень быстро затухают. Принятая здесь модель осциллятора применима в тех случаях, когда время затухания этих колебаний мало по сравнению с периодом собственных колебаний осциллятора.

### 5.1.9 Электромагнитный аналог осциллятора

Колебания заряда  $q$  конденсатора в последовательном резонансном  $LCR$ -контуре (рис. 5.9), на вход которого подается переменное напряжение, имеющее форму прямоугольных импульсов, описываются таким же дифференциальным уравнением, что и вынужденные колебания рассматриваемого механического пружинного осциллятора, возбуждаемые периодическими скачкообразными поворотами шатуна:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 CV(t). \quad (5.19)$$

Здесь  $\omega_0$  — частота собственных колебаний заряда в контуре в отсутствие затухания (при  $R = 0$ ), зависящая от емкости  $C$  конденсатора и индуктивности  $L$  катушки:  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Постоянная затухания  $\gamma = R/(2L)$  характеризует диссипацию электромагнитной энергии (выделение джоулевой теплоты) при протекании тока через резистор сопротивлением  $R$ .

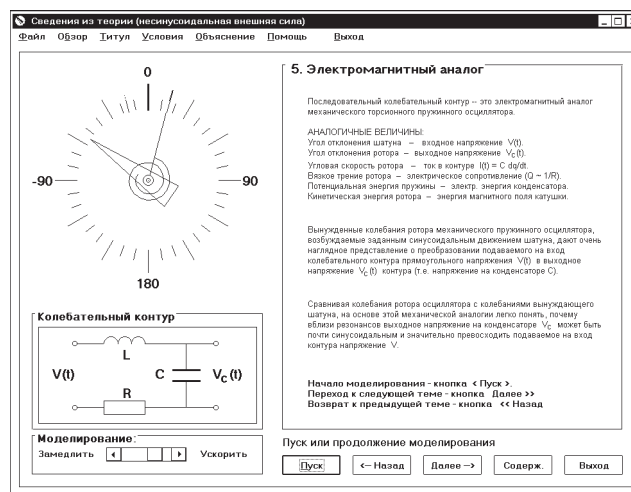


Рис. 5.9:  $LCR$ -колебательный контур с подаваемыми на вход прямоугольными импульсами, аналогичный рассматриваемому механическому осциллятору.

Благодаря этой аналогии рассмотренная модель механической колебательной системы позволяет дать очень наглядную картину закономерностей преобразования подаваемого на вход контура переменного прямоугольного напряжения  $V(t) = \pm V_0$  в выходное напряжение  $V_C(t) = q/C$  (напряжение на конденсаторе  $C$ ). Выходное напряжение  $V_C(t)$  аналогично угловому отклонению ротора от среднего положения  $\varphi(t)$ . Переменный электрический ток  $I(t) = \dot{q}(t)$  в контуре аналогичен угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}(t)$  в механической модели.

Предположение о квазистатическом характере деформации пружины в механической модели, т. е. предположение о возможности пренебречь собственными колебаниями пружины как распределенной системы, в электромагнитном контуре соответствует предположению о квазистационарности тока. Чтобы в каждый момент времени ток имел одинаковую величину во всех

участках последовательной электрической цепи, индуктивность и емкость соединительных проводов должны быть малы по сравнению с индуктивностью катушки и емкостью конденсатора. В таком случае колебательный контур можно рассматривать как систему с сосредоточенными параметрами (вся емкость сосредоточена в конденсаторе, а индуктивность — в катушке), имеющую одну степень свободы.

При использовании этой аналогии между механическим осциллятором и колебательным контуром некоторая осторожность необходима в отношении энергетических превращений. Здесь нельзя сопоставлять буквально энергию заряженного конденсатора и упругую потенциальную энергию закрученной пружины, поскольку последняя определяется углом ( $\varphi \pm \phi_0$ ), в то время как энергия конденсатора определяется непосредственно зарядом конденсатора  $q$  или соответствующим напряжением на конденсаторе  $V_C = q/C$  (а не напряжением ( $V_C \pm V_0$ )). Если в механической модели мгновенный поворот шатуна вызывает скачкообразное изменение потенциальной энергии пружины, то в электромагнитном контуре скачок входного напряжения не приводит к скачкообразному изменению заряда конденсатора и, следовательно, его энергии. Более полную аналогию электромагнитных колебаний в последовательном  $LCR$ -контуре с приложенным напряжением в виде импульсов прямоугольной формы дает механический осциллятор с прямым силовым (а не рассматриваемым здесь кинематическим) возбуждением вынужденных колебаний. В случае прямого силового возбуждения колебаний аналогия полностью распространяется и на энергетические превращения. Более подробное обсуждение различий в энергетических превращениях при силовом и кинематическом возбуждении колебаний приведено в главе, где рассматриваются вынужденные колебания линейного осциллятора под действием синусоидального внешнего возмущения.

Все, что было сказано выше в отношении преобразования спектра входного воздействия в спектр установившихся вынужденных колебаний осциллятора, полностью справедливо и в отношении преобразования спектра входного прямоугольного напряжения в спектр напряжения на конденсаторе, т. е. на выходе колебательного контура. В наибольшей мере в выходном напряжении будут представлены те гармоники входного сигнала, частота которых близка к собственной частоте колебательного контура. Контур ведет себя избирательно, пропуская на «выход» только те гармоники в спектре входного сигнала, частоты которых попадают в *полосу пропускания* колебательного контура. При увеличении добротности контура его резонансная кривая становится острее и полоса пропускания сужается, т. е. растет *спектральная селективность* (избирательность) колебательного контура.

Собственную частоту резонансного колебательного контура  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  можно варьировать, изменяя либо емкость  $C$  конденсатора, либо индуктивность  $L$  катушки. Такой перестраиваемый по частоте высокодобротный колебательный контур с высокой селективностью по сути дела представляет собой спектральный прибор, способный *на физическом уровне* выполнять фурье-разложение сложного входного сигнала.

## 5.2 Контрольные вопросы и задачи

### 5.2.1 Резонансное возбуждение осциллятора

**1.1 Основной резонанс в отсутствие трения.** Допустим, что трение полностью отсутствует, и что период  $T$  внешней силы в точности равен периоду  $T_0$  собственных колебаний осциллятора. Рассмотрите случай нулевых начальных условий, т. е. маховик покоится в среднем положении в момент включения внешнего воздействия.

(а) Какой должна быть угловая амплитуда  $\phi_0$  скачкообразных поворотов шатуна для того,



чтобы размах колебаний маховика достиг  $180^\circ$  после первых 10 циклов движения шатуна? Проверьте свой результат в моделирующем эксперименте.

(б) По какому закону происходит рост амплитуды колебаний маховика? Объясните наблюдаемую форму фазовой траектории. Как растет со временем полная энергия осциллятора?

(в) В условиях точной настройки периода внешнего воздействия в резонанс с собственным периодом осциллятора, возможно ли убывание во времени амплитуды колебаний? Приведите физическое обоснование своему ответу. Подтверждается ли Ваш ответ моделирующим экспериментом?

**1.2 Высшие резонансы в отсутствие трения.** Исследуйте резонансное возбуждение первоначально покоившегося в среднем положении осциллятора в условиях, когда период внешнего момента с прямоугольной зависимостью от времени ровно в три раза больше периода собственных колебаний осциллятора ( $T = 3T_0$ ):

(а) При какой амплитуде  $\phi_0$  принудительных прямоугольных колебаний шатуна размах колебаний маховика достигнет значения  $180^\circ$  после первых 10 циклов движения шатуна? Проверьте свой ответ в эксперименте.

(б) В чем заключаются различия фазовых траекторий в данном случае и в случае основного резонанса ( $T = T_0$ )?

**1.3\* Переходный процесс и установившиеся колебания в условиях главного резонанса.** Полагая период прямоугольного внешнего воздействия равным периоду собственных колебаний осциллятора ( $T = T_0$ ), и считая маховик покоившимся в среднем положении до включения внешней силы, исследуйте переходный процесс и установившиеся колебания при наличии трения:

(а) Рассчитайте амплитуду установившихся колебаний маховика при амплитуде шатуна  $\phi_0 = 10^\circ$  и добротности осциллятора  $Q = 10$ . Проверьте свой результат в эксперименте.

(б) По какому закону происходит рост амплитуды при раскачке осциллятора из состояния покоя? Объясните особенности фазовой траектории, наблюдаемой в этом случае.

(в) Чему равна начальная амплитуда затухающих собственных колебаний, входящих в состав переходного процесса при  $\phi_0 = 10^\circ$  и  $Q = 10$ ? По какому закону амплитуда этих колебаний убывает со временем?

(г) Какими должны быть начальные условия для того, чтобы установившиеся вынужденные колебания происходили с самого начала, т. е. сразу после включения периодической прямоугольной внешней силы, без переходного процесса? Проверьте свой результат экспериментально.

(д) Изучите спектральный состав выходных установившихся колебаний в этом случае. Почему эти выходные колебания почти гармонические, несмотря на прямоугольную форму временной зависимости входных колебаний (принудительных колебаний возбуждающего шатуна)?

**1.4\* Установившиеся колебания в случаях резонансов высоких порядков.**

(а) Рассчитайте амплитуду установившихся колебаний для  $T = 3T_0$ ,  $\phi_0 = 25^\circ$ ,  $Q = 5$ . Проверьте результат Вашего расчета в эксперименте. Объясните наблюдаемую в этом случае форму графиков и фазовой траектории.

(б) Какие превращения энергии происходят в течение установившихся колебаний? Сопоставьте экспериментально наблюдаемые графики временной зависимости кинетической, потенциальной и полной энергии с соответствующими графиками угловой скорости и угла отклонения маховика. Объясните наблюдаемую форму зависимости полной энергии осциллятора от угла отклонения. Как график полной энергии соотносится с параболическими потенциальными ямами, показанными на той же диаграмме?



(в) Какие гармоники определяют в данном случае форму установившихся колебаний? Почему, несмотря на точную настройку осциллятора на частоту третьей гармоники внешнего воздействия, его первая гармоника заметно влияет на форму выходных колебаний? Каким образом первая гармоника проявляет себя в колебаниях осциллятора?

(г) Исследуйте теоретически и экспериментально влияние трения на спектральный состав и форму установившихся колебаний осциллятора при  $T = 3T_0$ . Обратите внимание на относительное уменьшение вклада первой и пятой гармоник по мере увеличения добротности осциллятора.

(д) Изучите установившиеся колебания при резонансах пятого и седьмого порядков (т. е. при совпадении частоты пятой или седьмой гармоники вынуждающих прямоугольных импульсов с собственной частотой осциллятора). Обратите внимание на характер преобразования спектра в этих случаях и на зависимость спектра установившихся колебаний от добротности осциллятора. Какой вид имеет фазовая траектория для этих резонансов? Сделайте теоретическую оценку максимального размаха установившихся колебаний маятника при  $T = 5T_0$  для случаев высокой добротности осциллятора ( $Q$  порядка 15 – 20) и сильного трения ( $Q$  порядка 1 – 3).

## 5.2.2 Нерезонансные вынужденные колебания

**2.1\* Вынужденные колебания и условия отсутствия переходного процесса при  $T = 2T_0$ .**

(а) Предскажите теоретически формы графиков угла отклонения, угловой скорости и фазовой траектории установившихся колебаний осциллятора для  $T = 2T_0$  при отсутствии трения (и при очень слабом трении). Какими должны быть начальные условия, чтобы установившиеся колебания происходили сразу после включения внешнего воздействия, т. е. чтобы не было переходного процесса? Проверьте свои предсказания в моделирующем эксперименте.

(б) Почему в случае установившихся колебаний при  $T = 2T_0$  в отсутствие трения при принудительных скачкообразных поворотах шатуна не происходит обмена энергией между осциллятором и внешним источником (осциллятор не получает и не отдает энергию)?

(в) Изучите спектральный состав установившихся колебаний при  $T = 2T_0$ . Особое внимание обратите на вклад третьей гармоники в выходные колебания. Частота третьей гармоники в данном случае выше собственной частоты осциллятора, и поэтому на выходе она имеет обращенную фазу. Каким образом это изменение фазы третьей гармоники сказывается на форме результирующих выходных колебаний? Почему при сложении первой и третьей гармоник в выходных колебаниях вместо уплощенной кривой (соответствующей плоским прямоугольным импульсам на входе) получается кривая с «буграми» на месте плоских горизонтальных участков входных прямоугольных импульсов?

**2.2\* Установившиеся колебания при  $T = 2T_0$  и  $T = 4T_0$ .**

(а) Рассмотрите вынужденные колебания осциллятора в случае  $T = 2T_0$  при наличии умеренного трения (скажем,  $Q = 5$ ). К каким изменениям (по сравнению с рассмотренным выше случаем полного отсутствия трения) приводит это небольшое трение на графиках временной зависимости и на фазовой траектории установившихся колебаний? Обратите внимание на изменения в энергетических превращениях.

(б) Почему при  $T = 2T_0$  трение почти не сказывается на спектральном составе установившихся колебаний осциллятора, в отличие от случая  $T = 3T_0$ ?

(в) Рассчитайте размах установившихся колебаний маятника (максимальный угол отклонения от средней точки) при  $T = 2T_0$ ,  $\phi_0 = 25^\circ$ ,  $Q = 5$ . Сравните результат со случаем отсутствия трения. Проверьте свой ответ в эксперименте.

(г) Рассчитайте размах  $\varphi_m$  установившихся вынужденных колебаний маховика при  $T = 4T_0$ ,  $\phi_0 = 25^\circ$ ,  $Q = 5$ .

(д)\*\* В отсутствие трения размах установившихся вынужденных колебаний маховика при  $T = 4T_0$ , как и при  $T = 2T_0$ , равен  $2\phi_0$ , т. е. ровно вдвое больше, чем размах принудительных скачкообразных поворотов шатуна. Но если при  $T = 2T_0$  введение трения приводит только к уменьшению амплитуды установившихся колебаний, то при  $T = 4T_0$  введение небольшого трения приводит к увеличению амплитуды маховика. По мере увеличения трения амплитуда установившихся колебаний сначала растет, достигает максимума при некотором значении добротности, и затем убывает при дальнейшем увеличении трения. Объясните качественно такую необычную, на первый взгляд, зависимость амплитуды от трения. Найдите то значение добротности  $Q_m$ , при котором амплитуда установившихся колебаний максимальна, и рассчитайте эту максимальную амплитуду  $\varphi_{\max}$ . Во сколько раз эта максимальная амплитуда  $\varphi_{\max}$  превосходит размах  $\phi_0$  поворотов возбуждающего шатуна? Ответьте на те же вопросы для установившихся колебаний при  $T = 6T_0$ .

### 2.3 Установившиеся колебания при большом периоде возбуждения ( $T \gg T_0$ ).

(а) Изучите вынужденные колебания осциллятора под действием внешнего момента с прямоугольной зависимостью от времени в условиях, когда собственная частота осциллятора лежит где-нибудь в интервале между частотами двух последовательных нечетных гармоник высокого порядка (например, при  $5T_0 < T < 7T_0$ ). Какие гармоники доминируют в установившихся выходных колебаниях осциллятора? Сравните форму колебаний на выходе с формой импульсов входного воздействия. В чем заключается основное отличие формы колебаний на входе и на выходе?

(б) Исследуйте влияние трения на характер установившихся колебаний. Почему при сильном затухании наблюдаются меньшие искажения (по сравнению со случаем слабого трения), т. е. выходные импульсы имеют почти прямоугольную форму?

(в) Объясните характер превращений энергии при таких колебаниях, используя получаемый в процессе моделирования график зависимости полной энергии от угла отклонения. Какова взаимосвязь этого графика с параболическими потенциальными ямами, показанными на той же диаграмме?

(г) Оцените максимальное отклонение маховика в таких установившихся колебаниях при  $T \gg T_0$  и сильном трении (рассмотрите отдельно случаи  $Q$  порядка 1 — 3 и  $Q = 1/2$ ).

### 2.4 Установившиеся вынужденные колебания под действием импульсов малого периода.

(а) Пусть период  $T$  внешнего момента с прямоугольной зависимостью от времени составляет небольшую часть (скажем, 0.2 — 0.3) собственного периода осциллятора  $T_0$ . В таких условиях график зависимости угловой скорости маховика от времени при установившихся колебаниях представляет собой «пилу» с почти прямолинейными треугольными равнобедренными зубцами. Почему? Предложите физическое объяснение такой форме графика скорости. Чем в этом случае отличается от синусоиды график зависимости угла отклонения от времени?

(б) Оцените теоретически высоту зубцов графика зависимости угловой скорости от времени при заданных значениях периода и амплитуды принудительных скачкообразных поворотов шатуна. Оцените также максимальный угол отклонения маховика от среднего положения при таких установившихся колебаниях, приняв для  $T$  значение  $T_0/4$  и  $\phi_0 = 30^\circ$  для амплитуды шатуна. Какой спектральный состав характерен для таких колебаний?

### 5.2.3 Приложение: сводка основных формул

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний торсионного пружинного осциллятора под действием прямоугольного внешнего момента:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \begin{cases} \omega_0^2\phi_0, & (0, T/2), \\ -\omega_0^2\phi_0, & (T/2, T). \end{cases}$$

То же дифференциальное уравнение с разложением в ряд Фурье правой части, выражающей прямоугольную кусочно-постоянную зависимость от времени вынуждающего момента внешней силы:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4\phi_0\omega_0^2}{\pi k} \sin \omega_k t.$$

Периодическое частное решение этого уравнения, описывающее установившиеся вынужденные колебания:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4\phi_0}{\pi k} \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_k^2)^2 + 4\gamma^2\omega_k^2}} \sin(\omega_k t + \alpha_k),$$

где фазы  $\alpha_k$  отдельных гармоник определяются соотношением:

$$\tan \alpha_k = \frac{2\gamma\omega_k}{\omega_k^2 - \omega_0^2}.$$

Зависимость от времени  $\varphi(t)$  на протяжении интервала  $(0, T/2)$ , пока положение равновесия находится справа при  $\varphi = \phi_0$ :

$$\varphi(t) = \phi_0 + Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta), \quad (0, T/2),$$

где  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  — частота собственных затухающих колебаний,  $A$  и  $\theta$  — некоторые постоянные. Зависимость от времени  $\varphi(t)$  на протяжении интервала  $(T/2, T)$ , когда собственные колебания происходят около положения равновесия, расположенного при  $-\phi_0$ :

$$\varphi(t) = -\phi_0 - Ae^{-\gamma(t-T/2)} \cos(\omega_1(t - T/2) + \theta), \quad (T/2, T).$$

В установившихся колебаниях постоянные  $A$  и  $\theta$  имеют здесь те же значения, что и в выражении для  $(0, T/2)$ .

## Глава 6

# Параметрическое возбуждение линейного осциллятора

В этой главе изучается явление параметрического резонанса, возникающего в результате прямоугольной (кусочно-постоянной) модуляции момента инерции торсионного пружинного осциллятора. Рассматриваются режим параметрической регенерации и условия возникновения параметрического резонанса. Определяются частотные интервалы параметрической неустойчивости. Исследуются стационарные колебания на границах интервалов неустойчивости.

## 6.1 Общие положения

### 6.1.1 О классификации колебаний

В соответствии с общепринятой классификацией колебаний по способу их возбуждения колебания называют *вынужденными*, если осциллятор подвержен внешнему периодическому воздействию, влияние которого в дифференциальном уравнении осциллятора можно выразить отдельным членом, имеющим вид заданной периодической функции времени. Такие колебания рассматривались в предыдущих главах данного учебного пособия. Более сложен для изучения случай параметрического возбуждения колебаний, когда внешнее воздействие выражается в периодическом изменении (модуляции) какого-либо параметра системы. Пусть, например, при отклонении от положения равновесия возникает восстанавливающая сила  $F = -kx$ , но в отличие от стационарного случая параметр  $k$  в результате какого-либо периодического воздействия изменяется со временем:  $k = k(t)$ . В дифференциальном уравнении такой системы,

$$m\ddot{x} = -k(t)x, \quad (6.1)$$

коэффициент при  $x$  не постоянен: он явно зависит от времени. Колебания в такой системе существенно отличаются как от собственных колебаний в системе, описываемой уравнением с постоянными коэффициентами, так и от вынужденных колебаний под действием внешней силы, зависящей только от времени.

В случае периодического изменения параметра  $k$ , когда  $k(t + T) = k(t)$ , где  $T$  — период, дифференциальное уравнение (6.1) называется *уравнением Хилла*. Колебания в системе, описываемой уравнением Хилла, называются параметрически возбуждаемыми или просто *параметрическими*. Когда колебательный процесс, вызываемый периодической модуляцией какого-либо параметра, принимает нарастающий характер, говорят о *параметрическом резонансе*. В случае параметрического резонанса состояние равновесия системы становится неустойчивым и уход

из него имеет характер колебаний с прогрессивно растущей амплитудой.

По ряду признаков параметрический резонанс существенно отличается от обычного резонанса, вызываемого прямым силовым воздействием на колебательную систему. Параметрический резонанс наступает при выполнении определенных соотношений между частотой изменения параметра и собственной частотой возбуждаемой системы, отличных от характерного для обычного резонанса соотношения между частотой внешнего воздействия и собственной частотой системы. Параметрический резонанс, в отличие от обычного резонанса, представляет собой *пороговый эффект*, так как при наличии трения он возможен лишь при достаточно большой амплитуде изменения параметра, превосходящей некоторое пороговое значение.

Широко известный пример параметрического резонанса — раскачивание на качелях, когда размах колебаний нарастает при периодических приседаниях и выпрямлениях ног качающегося. Здесь по сути дела происходит периодическое изменение момента инерции (а тем самым и приведенной длины) физического маятника, каковым являются качели вместе с находящимся на них человеком.

Параметрическое возбуждение возможно в любых колебательных системах. Например, в колебательном  $LCR$ -контуре из последовательно соединенных катушки индуктивности, конденсатора и резистора можно возбудить колебания, изменяя емкость конденсатора периодическим сближением и разведением его пластин, либо изменяя индуктивность катушки периодическим вдвиганием и выдвиганием сердечника. Наиболее интенсивные колебания возбуждаются в том случае, когда цикл таких изменений повторяется два раза за один период собственных колебаний в контуре, т. е. когда частота модуляции параметра вдвое превышает собственную частоту системы.

Очевидно, что параметрическое возбуждение возможно лишь при модуляции одного из энергоемких параметров системы (емкости  $C$  или индуктивности  $L$  в случае колебательного контура, жесткости пружины или инертности ротора в случае механического осциллятора). Модуляция сопротивления  $R$  или коэффициента затухания может повлиять лишь на характер затухания колебаний, но не может привести к их нарастанию.

### 6.1.2 Моделируемая физическая система

В компьютерной программе моделируется параметрическое возбуждение крутильных колебаний механического торсионного пружинного осциллятора. Возбуждение колебаний обеспечивается периодическими изменениями (модуляцией) момента инерции ротора (маховика) пружинного осциллятора. Схематическое изображение торсионного осциллятора показано на рис. 6.1. Ротор осциллятора представляет собой стержень с двумя одинаковыми грузами, который может поворачиваться вокруг оси, проходящей через его середину. При повороте ротора прикрепленная к нему спиральная пружина создает восстанавливающий момент, пропорциональный углу закручивания. Второй конец пружины закреплен неподвижно. В положении равновесия стержень ротора одним из своих концов указывает на нулевое деление шкалы.

Грузы ротора можно одновременно сдвигать вдоль стержня в противоположных направлениях так, что центр масс системы остается на оси вращения. При таком смещении грузов изменяется момент инерции ротора: момент инерции возрастает при раздвигании грузов (при удалении от оси вращения) и убывает при их приближении к оси. Изменение момента инерции ротора приводит к изменению частоты собственных крутильных колебаний осциллятора. Принудительными периодическими перемещениями грузов вдоль стержня туда и обратно создается модуляция момента инерции, необходимая для параметрического возбуждения крутильных колебаний осциллятора. В данной модели предполагается модуляция момента инерции по прямоугольному кусочно-постоянному закону, когда перемещения грузов вдоль стержня происходят

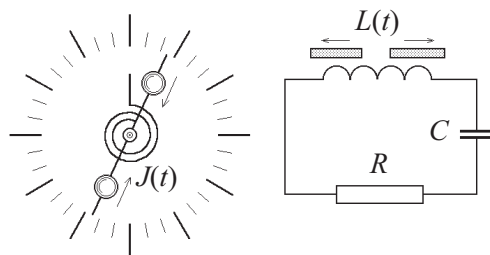


Рис. 6.1: Схематическое изображение торсионного осциллятора с модулируемым моментом инерции и его электромагнитный аналог — колебательный контур с модулируемой индуктивностью.

скачкообразно. Вызванные смещения грузов резкие, почти мгновенные увеличения и уменьшения момента инерции происходят поочередно через равные промежутки времени. Обозначим эти промежутки через  $T/2$ , так что  $T$  — это полный период изменений момента инерции (*период модуляции*).

Такие принудительные изменения параметра, описываемые прямоугольной зависимостью от времени, могут вызвать значительное раскачивание ротора при условии, что период модуляции выбран должным образом. Предположим, например, что грузы приближаются к оси ротора в момент, когда ротор проходит через положение равновесия и имеет почти максимальную угловую скорость. При скачкообразном радиальном смещении грузов момент импульса ротора остается прежним. Поэтому результирующее уменьшение момента инерции сопровождается увеличением угловой скорости ротора, и ротор получает дополнительную энергию. Чем больше была угловая скорость ротора, тем значительнее возрастание его кинетической энергии. Эта дополнительная энергия поставляется источником, вызывающим модуляцию параметра, т. е. принудительные радиальные перемещения грузов вдоль стержня.

С другой стороны, когда грузы мгновенно раздвигаются в стороны от оси вращающегося ротора, угловая скорость вращения ротора и его кинетическая энергия уменьшаются. При этом энергия передается назад от ротора источнику модуляции. Чтобы приращения энергии происходили регулярно и в целом превышали энергию, возвращаемую источнику, систематически «подпитывая» ротор энергией, период и фаза модуляции момента инерции должны удовлетворять определенным условиям.

Пусть, например, грузы сдвигаются к оси вращения и затем раздвигаются в прежние положения дважды на протяжении одного среднего периода собственных колебаний. Пусть также грузы придвигаются к оси вращения в моменты, когда угловая скорость ротора максимальна. Тогда их возвращение в прежние положения придется на момент почти максимального отклонения от равновесия, когда угловая скорость ротора близка к нулю. Такие фазовые соотношения выполняются для колебаний, графики которых показаны на рис. 6.2.

Напомним, что угловая скорость ротора возрастает при сближении грузов и убывает при их раздвижении, и эти изменения скорости пропорциональны самой скорости. Но поскольку в момент раздвижения грузов угловая скорость ротора близка к нулю, такое раздвижение не вызывает практически никакого изменения угловой скорости и кинетической энергии ротора. Таким образом, модуляция момента инерции с периодом, вдвое меньшим собственного среднего периода осциллятора, приводит к максимально возможному росту амплитуды при условии, что фаза модуляции выбрана так, как описано выше.

Очевидно, что эффективный рост энергии осциллятора возможен не только тогда, когда два полных цикла изменения параметра происходят на протяжении одного периода собственных ко-

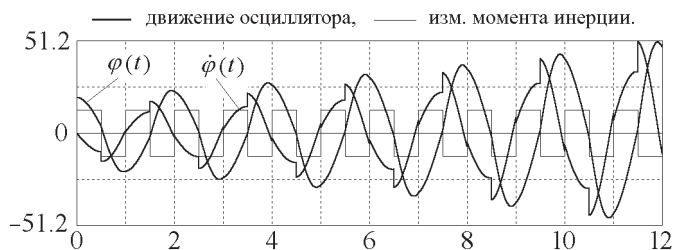


Рис. 6.2: Графики угла отклонения и угловой скорости при параметрическом возбуждении колебаний модуляцией момента инерции по кусочно-постоянному закону.

лебаний, но также когда два цикла модуляции происходят на протяжении трех, пяти или другого нечетного числа периодов собственных колебаний.

Ниже будет показано, что возрастание энергии осциллятора, хотя и менее значительное, может происходить и тогда, когда два цикла модуляции параметра происходят на протяжении четного числа периодов собственных колебаний.

Если принудительные изменения параметра совершаются с указанной выше периодичностью, но не скачкообразно, их влияние на осциллятор качественно оказывается аналогичным, хотя эффективность вложения энергии (при той же амплитуде модуляции параметра) максимальна при модуляции по прямоугольному закону, потому что именно такой закон модуляции может обеспечить наиболее оптимальные условия передачи энергии осциллятору. Случай плавной (синусоидальной) модуляции параметра важен для практических приложений. Он моделируется в другой программе комплекса.

### 6.1.3 Параметрическое возбуждение электромагнитных колебаний

Параметрическое возбуждение колебаний возможно в самых разных колебательных системах. Например, электромагнитные колебания в последовательной цепи  $LCR$ -цепи, содержащей катушку индуктивности, конденсатор и резистор (см. рис. 6.1 на стр. 110), можно возбудить периодическими изменениями емкости конденсатора, если с должной периодичностью сдвигать и раздвигать его пластины, или изменениями индуктивности катушки, если периодически вдвигать и выдвигать сердечник катушки.

Такие периодические изменения индуктивности катушки аналогичны изменениям момента инерции ротора механического осциллятора, модель которого описана выше. Наиболее сильные колебания возбуждаются при условии, что два цикла модуляции индуктивности совершаются на протяжении одного периода собственных электромагнитных колебаний в контуре. Очевидно, что параметрическое возбуждение возможно лишь тогда, когда в контуре уже происходят хотя бы слабые собственные колебания.

Параметрическое возбуждение возможно лишь при модуляции одного из энергоемких параметров,  $C$  или  $L$ . Модуляция сопротивления  $R$ , как и коэффициента затухания  $\gamma$  в механической системе, может повлиять лишь на характер затухания колебаний, но не может вызвать роста их амплитуды.

### 6.1.4 Условия параметрического резонанса

Существует несколько важных различий между параметрическим резонансом и обычным резонансом, возникающим под действием периодической внешней силы, приложенной непосредственно к осциллятору. При параметрическом резонансе рост амплитуды и, следовательно, энергии колебаний обеспечивается работой сил, которые периодически изменяют параметр возбуждаемой системы. Максимальное вложение энергии в систему обеспечивается при условии, что два цикла изменения параметра происходят на протяжении одного периода собственных колебаний. Но вложение энергии, хотя и менее эффективное, возможно, когда два цикла модуляции происходят за два, за три и вообще за целое число собственных периодов. Иными словами, параметрический резонанс возможен, когда частота  $\omega$  (или период  $T$ ) модуляции параметра удовлетворяет одному из следующих условий:

$$\omega = 2\omega_0/n, \quad T = nT_0/2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

При небольшой глубине модуляции период параметрически возбуждаемых колебаний во всех случаях (т. е. для резонанса любого порядка  $n$ ) близок к периоду собственных колебаний осциллятора.

Чем выше порядок  $n$  резонанса, тем меньшая (в общем случае) энергия сообщается колебательной системе за период параметрических колебаний при заданной глубине модуляции.

Одна из наиболее интересных особенностей параметрического резонанса заключается в том, что возбуждение нарастающих колебаний возможно не только при частотах модуляции  $\omega_n$ , выражаемых соотношениями (6.2), но также и в конечных интервалах частот, лежащих по обе стороны от значений  $\omega_n$  (в интервалах параметрической неустойчивости). Эти интервалы становятся шире по мере увеличения глубины (амплитуды) модуляции параметра.

Важное отличие параметрического резонанса от обычного резонанса при вынужденных колебаниях относится к зависимости скорости роста энергии от уже запасенной осциллятором энергии. Если при вынужденных колебаниях работа внешней силы, а тем самым и приращение энергии за период пропорциональны *амплитуде* колебаний, т. е. квадратному корню из запасенной энергии, то при параметрическом резонансе приращение энергии за период пропорционально самой *энергии*, запасенной осциллятором.

Потери энергии из-за трения, неизбежные в любой реальной системе, также пропорциональны энергии, запасенной системой. В случае вынужденных колебаний сколь угодно малая внешняя сила вызывает резонанс. Однако потери энергии из-за трения ограничивают рост амплитуды при резонансе, потому что с увеличением запасенной энергии эти потери растут быстрее, чем вложения энергии за счет работы внешней силы, раскачивающей систему. В случае параметрического резонанса как вложения энергии за счет модуляции параметра, так и потери энергии из-за трения пропорциональны запасенной энергии (квадрату амплитуды колебаний), так что их отношение не зависит от амплитуды. Поэтому параметрический резонанс возможен лишь тогда, когда превзойден некоторый *порог*, т. е. когда вложение энергии за период, вызванное модуляцией параметра, превосходит энергию, рассеиваемую из-за трения за то же время. Чтобы это условие выполнялось, глубина модуляции (амплитуда изменения параметра) должна превосходить некоторое критическое значение. Это критическое (пороговое) значение зависит от трения. Когда же порог превышен, трение не в состоянии ограничить рост амплитуды. В идеализированной линейной системе амплитуда параметрически возбуждаемых колебаний должна расти неограниченно.

В нелинейной системе период собственных колебаний зависит от амплитуды. Если условия параметрического резонанса выполнены при малых колебаниях, и амплитуда начинает возрастать, то по мере роста амплитуды условия резонанса все сильнее нарушаются: изменение соб-



ственной частоты выводит систему из резонанса. В реальных системах рост амплитуды при параметрическом резонансе ограничен нелинейными эффектами.

## 6.2 Прямоугольная кусочно-постоянная модуляция момента инерции осциллятора

Ниже мы рассмотрим более строгий математический подход к описанию явления параметрического резонанса, вызываемого кусочно-постоянной модуляцией параметра (момента инерции осциллятора) по прямоугольному закону.

### 6.2.1 Порог параметрического возбуждения при прямоугольной модуляции момента инерции

Для оценки глубины модуляции, соответствующей порогу параметрического возбуждения, можно воспользоваться соображениями, основанными на законе сохранения энергии. Прежде всего рассчитаем приращение кинетической энергии ротора, происходящее при скачкообразном смещении грузов в направлении оси вращения, когда момент инерции ротора уменьшается от значения  $J_1 = J_0(1 + m)$  до  $J_2 = J_0(1 - m)$ . Ограничимся случаем малых значений глубины модуляции  $m$  ( $m \ll 1$ ). При радиальном смещении грузов момент импульса ротора  $L = J\omega = J\dot{\varphi}$  остается неизменным:  $J_1\dot{\varphi}_1 = J_2\dot{\varphi}_2$ , откуда для отношения угловых скоростей до и после изменения момента инерции получаем  $\dot{\varphi}_2/\dot{\varphi}_1 = J_1/J_2 = (1 + m)/(1 - m)$ . Для происходящего при этом приращения  $\Delta E$  кинетической энергии ротора  $E_{\text{kin}} = J\dot{\varphi}^2/2 = L^2/2J$  можно написать:

$$\Delta E = \frac{L^2}{2J_0} \left( \frac{1}{1 - m} - \frac{1}{1 + m} \right) \approx 2mE_{\text{kin}} \quad (\text{для } m \ll 1). \quad (6.3)$$

Когда такое событие происходит вблизи положения равновесия ротора, т. е. в момент, когда полная энергия осциллятора  $E$  практически совпадает с кинетической энергией ротора  $E_{\text{kin}}$ , из выражения (6.3) следует, что относительное приращение полной энергии  $\Delta E/E$  при однократном сближении грузов примерно равно удвоенному значению глубины модуляции  $m$ :  $\Delta E/E \approx 2m$ .

Если период и фаза модуляции имеют те значения, что наиболее благоприятны для эффективной передачи энергии осциллятору, скачкообразное смещение грузов назад к концам стержня происходит в тот момент, когда ротор находится в положении наибольшего отклонения (точнее, очень близок к этому положению). В этот момент угловая скорость и кинетическая энергия ротора имеют почти нулевые значения, и поэтому обратное радиальное смещение грузов в прежние положения к концам стержня почти не приводит к уменьшению энергии осциллятора.

В случае основного параметрического резонанса (резонанса 1-го порядка  $n = 1$ ) вложение энергии происходит дважды на протяжении одного периода  $T_0$  собственных колебаний. Таким образом, относительное приращение энергии  $\Delta E/E$  за один период колебаний составляет приблизительно  $4m$ . Процесс, в котором приращение энергии  $\Delta E$  за период пропорционально запасенной энергии  $E$  ( $\Delta E \approx 4mE$ ), характеризуется экспоненциальным ростом энергии со временем:

$$E(t) = E_0 \exp(\alpha t). \quad (6.4)$$

В данном случае показатель роста  $\alpha$  пропорционален глубине модуляции  $m$  момента инерции:  $\alpha = 4m/T_0$ . В условиях точной настройки периода модуляции на основной резонанс ( $T = T_0/2$ ) уменьшение энергии осциллятора происходит главным образом из-за трения. Рассеяние энергии

при линейном (пропорциональном скорости) трении дается следующим выражением (см. главу 1):

$$E(t) = E_0 \exp(-2\gamma t). \quad (6.5)$$

Для относительного уменьшения  $\Delta E/E$  механической энергии из-за трения за промежуток времени, равный целому числу периодов колебаний, выражение (6.5) дает  $\Delta E/E \approx -2\gamma t$ . Приравнивая найденное выше относительное увеличение энергии  $4m$  за период, вызванное прямоугольной модуляцией момента инерции, относительному уменьшению энергии из-за трения  $2\gamma T_0$ , получаем следующее пороговое (минимальное) значение  $m_{\min}$  глубины модуляции, соответствующее основному ( $n = 1$ ) параметрическому резонансу:

$$m_{\min} = \gamma T_0/2 = \pi/(2Q). \quad (6.6)$$



Рис. 6.3: Графики и фазовая траектория стационарных колебаний в условиях порога  $m = \pi/2Q$  при  $T \approx T_0/2$ .

График угловой скорости и фазовая траектория колебаний, происходящих в условиях порога параметрического возбуждения, приведены на рис. (6.3). Такой режим стационарных колебаний, амплитуда которых остается неизменной несмотря на диссипацию энергии, называется *параметрической регенерацией*. Стационарный характер колебаний оказывается возможным благодаря тому, что потери энергии из-за трения в среднем компенсируются поступлением энергии от источника, который приводит в движение грузы вдоль стержня, обеспечивая периодическую модуляцию момента инерции ротора.

Для резонанса третьего порядка, когда  $T = 3T_0/2$ , пороговое значение глубины модуляции в три раза больше, чем для основного резонанса:  $m_{\min} = 3\pi/(2Q)$ . В этом случае два цикла модуляции параметра совершаются на протяжении трех полных периодов собственных колебаний. Радиальные перемещения грузов вдоль стержня ротора здесь также происходят в моменты, наиболее благоприятные для передачи энергии осциллятору, поэтому то же самое вложение энергии происходит в течение вдвое большего интервала времени, чем в случае основного резонанса.

Если глубина модуляции превосходит пороговое значение, энергия осциллятора растет со временем экспоненциально. Рост энергии и здесь описывается уравнением (6.4). Однако теперь показатель скорости роста энергии  $\alpha$  определяется превышением энергии, сообщаемой осциллятору благодаря модуляции параметра, над потерями энергии из-за трения за то же время:  $\alpha = 4m/T_0 - 2\gamma$ . Энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому амплитуда параметрически возбуждаемых колебаний тоже экспоненциально растет со временем:  $a(t) = a_0 \exp(\beta t)$ . Показатель  $\beta$  скорости роста амплитуды равен половине показателя скорости роста энергии. В условиях основного резонанса, когда вложения энергии происходят дважды на

протяжении периода собственных колебаний, для показателя скорости роста амплитуды получаем  $\beta = 2m/T_0 - \gamma = m\omega_0/\pi - \gamma$ .

Графики экспоненциального роста колебаний в условиях основного резонанса показаны на рис. 6.2 на стр. 111, а также на рис. 6.4 вместе с фазовой траекторией. Затухающим собственным колебаниям на интервалах постоянства момента инерции соответствуют участки фазовой траектории в виде отрезков спиралей, скручивающихся к фокусу. Вертикальные сегменты соответствуют скачкообразным изменениям угловой скорости в моменты радиальных смещений грузов ротора. В совокупности образуется раскручивающаяся фазовая траектория, соответствующая нарастающим колебаниям.

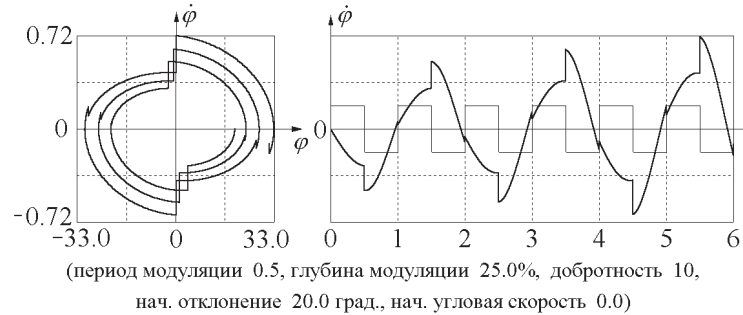


Рис. 6.4: Экспоненциальный рост амплитуды колебаний в условиях основного параметрического резонанса ( $n = 1$ ).

## 6.2.2 Дифференциальное уравнение параметрических колебаний

Допустим, что периодические изменения момента инерции ротора  $J$  происходят по прямоугольному кусочно-постоянному закону. Пусть максимальное и минимальное значения момента инерции равны соответственно  $J_1 = J_0(1 + m)$  и  $J_2 = J_0(1 - m)$ , где  $J_0$  — значение момента инерции при некотором среднем положении грузов на стержне, а  $m$  — глубина модуляции. На протяжении интервалов времени  $(0, T/2)$  и  $(T/2, T)$  значение момента инерции постоянно, и движение ротора может рассматриваться как свободное колебание, описываемое линейным дифференциальным уравнением. Однако коэффициенты в этом уравнении различны для соседних интервалов времени  $(0, T/2)$  и  $(T/2, T)$ :

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{1+m}(\omega_0^2\varphi + 2\gamma\dot{\varphi}) \quad \text{для } 0 < t < T/2, \quad (6.7)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{1-m}(\omega_0^2\varphi + 2\gamma\dot{\varphi}) \quad \text{для } T/2 < t < T. \quad (6.8)$$

Здесь  $\omega_0 = \sqrt{D/J_0}$  — собственная частота осциллятора, а  $\gamma$  — постоянная затухания, характеризующая интенсивность вязкого трения в системе. Обе эти величины относятся к среднему значению момента инерции  $J_0 = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)$ . Для малых и умеренных значений  $m$  момент инерции равен  $J_0$ , когда грузы находятся приблизительно на полпути между их крайними положениями на стержне ротора. При больших  $m$  это не так, потому что момент инерции определяется квадратом расстояния грузов от оси вращения ротора.

В моделирующей компьютерной программе в реальном масштабе времени выполняется численное интегрирование уравнений (6.7) — (6.8), описывающих движение ротора осциллятора на соседних промежутках времени  $(0, T/2)$ ,  $(T/2, T)$ ,  $(T, 3T/2)$ , и т.д.

Для интервалов постоянства момента инерции дифференциальные уравнения (6.7) – (6.8) линейны и имеют точные аналитические решения. Развиваемый ниже теоретический подход опирается на «сшивание» этих решений в моменты скачкообразных изменений параметра, когда мы должны совершить переход от одного из этих линейных уравнений к другому. Уравнения (6.7) – (6.8) сменяют друг друга в моменты времени  $t = nT/2$ , где  $n = 1, 2, \dots$

Начальные условия для каждого промежутка выбираются в соответствии с принятой физической моделью следующим образом. Каждое начальное значение угла отклонения  $\varphi$  берется равным углу  $\varphi(t)$ , достигнутому ротором к концу предшествующего промежутка времени. Начальная угловая скорость  $\dot{\varphi}$  связана с угловой скоростью в конце предыдущего интервала времени законом сохранения момента импульса:

$$(1 + m)\dot{\varphi}_1 = (1 - m)\dot{\varphi}_2. \quad (6.9)$$

В уравнении (6.9)  $\dot{\varphi}_1$  – угловая скорость в конце предшествующего интервала времени, на протяжении которого момент инерции ротора был равен  $J_1 = J_0(1 + m)$ , а  $\dot{\varphi}_2$  – начальное значение для следующего интервала, на протяжении которого момент инерции равен  $J_2 = J_0(1 - m)$ . Изменение угловой скорости при следующем скачкообразном изменении момента инерции от значения  $J_2$  до  $J_1$  можно рассчитать точно так же.

Применение закона сохранения импульса для нахождения выражаемой формулой (6.9) связи угловой скорости до и после изменения момента инерции здесь допустимо, несмотря на то, что вращение маховика, строго говоря, не является свободным: на него действует момент силы упругости пружины. Действительно, влиянием пружины можно пренебречь, если перемещение грузов вдоль стержня ротора происходит за время, значительно меньшее периода собственных колебаний. В принятой модели физической системы предполагается, что это перемещение грузов происходит мгновенно.

На протяжении каждой половины периода модуляции  $T/2$  вращение ротора осциллятора описывается линейным дифференциальным уравнением (6.7) или (6.8). Таким образом, это движение представляет собой отрезок некоторого гармонического или затухающего колебания. График такого движения на отдельном интервале постоянства момента инерции – это отрезок синусоиды (или затухающей синусоиды). Аналитическое исследование параметрического возбуждения колебаний при кусочно-постоянной модуляции параметра можно выполнять «сшиванием» («припасовкой» по выражению академика Л.И.Мандельштама) известных решений линейных уравнений для последовательных интервалов времени.

Обычно аналитическое исследование проблемы параметрического резонанса ограничивается определением интервалов частоты модуляции  $\omega$  при заданной глубине модуляции  $m$ , в пределах которых состояние покоя в положении равновесия становится неустойчивым. В таких *интервалах неустойчивости* любого сколь угодно малого отклонения от состояния покоя достаточно для того, чтобы колебания нарастали прогрессивно со временем. Задача состоит в том, чтобы для любого заданного значения глубины модуляции  $m$  определить те интервалы частоты модуляции  $\omega$  в окрестности значений  $\omega_n = 2\omega_0/n$ , в пределах которых возможен параметрический резонанс, т. е. колебания с нарастающей амплитудой. Границы этих интервалов можно находить как те частоты модуляции, при которых существуют стационарные решения уравнений (6.7) – (6.8), описывающие колебания неизменной амплитуды.

### 6.2.3 Частотные интервалы параметрического резонанса

Порог параметрического возбуждения был найден выше для условий основного резонанса, когда два цикла принудительной модуляции параметра совершаются на протяжении одного периода

собственных колебаний осциллятора. Полученная оценка (6.6) справедлива для малых значений глубины модуляции  $m$ .

При больших значениях глубины модуляции  $m$  само понятие периода собственных колебаний осциллятора требует уточнения. Пусть  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{J_0/D}$  — период колебаний ротора, когда грузы на нем закреплены в средних положениях. Соответствующий этим положениям грузов момент инерции ротора равен  $J_0 = \frac{1}{2}(J_{\max} + J_{\min})$ . Период собственных колебаний  $T_1$  будет немного больше, когда грузы смещены дальше от оси вращения:  $T_1 = T_0\sqrt{1+m} \approx T_0(1+m/2)$ . Период будет меньше, когда грузы придвинуты ближе к оси вращения:  $T_2 = T_0\sqrt{1-m} \approx T_0(1-m/2)$ . Для дальнейших применений будет удобнее определить средний период  $T_{\text{av}}$  не как арифметическое среднее  $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ , а скорее как период, соответствующий средней частоте  $\omega_{\text{av}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ , где  $\omega_1 = 2\pi/T_1$  и  $\omega_2 = 2\pi/T_2$ . Таким образом, для заданного значения глубины модуляции средним периодом будем называть следующую величину:

$$T_{\text{av}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{av}}} = \frac{2T_1T_2}{(T_1 + T_2)}. \quad (6.10)$$

Вследствие зависимости среднего периода собственных колебаний от глубины модуляции, значение периода  $T$  модуляции параметра, соответствующее точной настройке на какой-либо из параметрических резонансов, оказывается зависящим не только от порядка  $n$  резонанса, но и от глубины модуляции  $m$ . В самом деле, для выполнения условий резонанса, приращение фазы собственных колебаний на протяжении одного цикла модуляции должно быть равно  $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi, \dots$ . В течение первого полуцикла модуляции фаза получает приращение  $\omega_1 T/2$ , а в течение второго полуцикла — приращение  $\omega_2 T/2$ . Следовательно, вместо приближенного условия настройки на резонанс (6.2) мы получаем:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} T = n\pi, \quad \text{или} \quad T = n \frac{\pi}{\omega_{\text{av}}} = n \frac{T_{\text{av}}}{2}. \quad (6.11)$$

Таким образом, условие точной настройки на резонанс определенного порядка  $n$  выражается через значения двух периодов собственных колебаний  $T_1$  и  $T_2$ . Это условие имеет вид  $T = nT_{\text{av}}/2$ , где  $T_{\text{av}}$  определяется выражением (6.10).

Для малых и умеренных значений  $m$  можно пользоваться приближенными выражениями для средних значений частоты и периода:

$$\omega_{\text{av}} = \frac{\omega_0}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1+m}} + \frac{1}{\sqrt{1-m}} \right) \approx \omega_0 \left( 1 + \frac{3}{8}m^2 \right),$$

$$T_{\text{av}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{av}}} \approx T_0 \left( 1 - \frac{3}{8}m^2 \right).$$

Различие между  $T_{\text{av}}$  и  $T_0$  проявляется лишь в членах, пропорциональных квадрату глубины модуляции  $m$ .

Бесконечный рост амплитуды при параметрическом возбуждении возможен не только в случаях точной настройки на какой-либо из резонансов, но и в некоторых интервалах значений периода модуляции. Эти *интервалы параметрического резонанса* содержат в себе значения  $T = T_{\text{av}}/2, T = T_{\text{av}}, T = 3T_{\text{av}}/2, \dots$ , соответствующие точной настройке на резонансы. Ширина интервалов возрастает с увеличением глубины модуляции  $m$ .<sup>1</sup> Вне этих интервалов положение

<sup>1</sup>Строго говоря, для резонансов высоких порядков ( $n > 2$ ) последнее утверждение справедливо только при малых и умеренных значениях глубины модуляции (см. рис. 6.11 на стр. 124, на котором изображена диаграмма интервалов параметрического резонанса).

равновесия торсионного осциллятора устойчиво, т. е. при модуляции момента инерции амплитуда колебаний не нарастает.

Чтобы определить границы частотных интервалов параметрической неустойчивости, можно рассмотреть стационарные колебания неизменной амплитуды, которые могут происходить, когда период модуляции  $T$  совпадает с одной из этих границ. Такие стационарные колебания можно представить как чередование свободных (собственных) колебаний с периодами  $T_1$  и  $T_2$ . В отсутствие трения графики таких колебаний образованы сегментами незатухающих синусоидальных кривых соответствующих периодов.

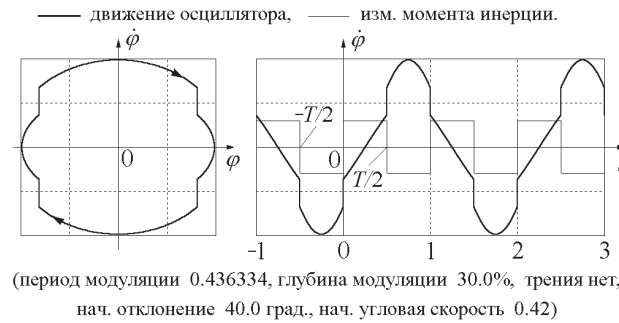


Рис. 6.5: Стационарные параметрические колебания на нижней границе основного интервала неустойчивости (вблизи  $T = T_{av}/2$ ).

Рассмотрим сначала окрестность основного резонанса с  $T = T_{av}/2$ . Предположим, что период  $T$  модуляции параметра немного короче резонансного значения  $T = T_{av}/2$ , так что он соответствует левой границе основного интервала неустойчивости. В этом случае промежуток постоянства момента инерции длится менее четверти среднего периода  $T_{av}$  собственных колебаний, и поэтому чуть меньше четверти собственного колебания успевает совершиться за это время. Фазовая траектория и график угловой скорости такого периодического процесса имеют характерный вид, показанный на рис. 6.5. Участки графика скорости на интервалах постоянства момента инерции представляют собой чередующиеся отрезки синусоидальных кривых с периодами  $T_1$  и  $T_2$ . Эти отрезки синусоид симметрично усечены с двух сторон на краях интервалов.

Чтобы найти условия, при которых возможны такие стационарные колебания, можно написать выражения для  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  на соседних интервалах, и затем потребовать, чтобы эти выражения должным образом сшивались на границах интервалов.

Примем для простоты за начало отсчета времени  $t = 0$  момент, когда грузы скачкообразно раздвигаются в стороны от оси. В этот момент угловая скорость ротора скачком уменьшается по модулю (см. рис. 6.5). Затем в течение промежутка времени  $(0, T/2)$  момент инерции постоянен и график соответствует собственному колебанию с частотой  $\omega_1 = \omega_0/\sqrt{1+m}$ . Это движение удобно представить как суперпозицию синусоидальной и косинусоидальной функций с постоянными амплитудами  $A_1$  и  $B_1$ :

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t, \\ \dot{\varphi}_1(t) &= A_1 \omega_1 \cos \omega_1 t - B_1 \omega_1 \sin \omega_1 t.\end{aligned}\tag{6.12}$$

Аналогично, в течение промежутка  $(-T/2, 0)$  график на рис. 6.5 представляет собой отрезок синусоидального колебания с частотой  $\omega_2 = \omega_0/\sqrt{1-m}$ :

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t, \\ \dot{\varphi}_2(t) &= A_2 \omega_2 \cos \omega_2 t - B_2 \omega_2 \sin \omega_2 t.\end{aligned}\quad (6.13)$$

Для определения значений постоянных  $A_1$ ,  $B_1$  и  $A_2$ ,  $B_2$  можно воспользоваться условиями, которые должны выполняться при «сшивании» графиков для получения периодического процесса.

При  $t = 0$  угол отклонения одинаков как для  $\varphi_1$ , так и для  $\varphi_2$ :  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ . Из этого условия находим, что  $B_1 = B_2$ . Будем в дальнейшем обозначать эти совпадающие постоянные просто как  $B$ . Угловая скорость в момент  $t = 0$  изменяется скачком:

$$(1 + m)\dot{\varphi}_1(0) = (1 - m)\dot{\varphi}_2(0).$$

Это условие дает следующее соотношение между  $A_2$  и  $A_1$ :  $A_2 = kA_1 = kA$ , где введена безразмерная величина  $k$ , следующим образом зависящая от глубины модуляции  $m$ :

$$k = \sqrt{\frac{1 + m}{1 - m}}.$$

Уравнения для нахождения постоянных  $A$  и  $B$  получаются из условий сшивания в моменты  $-T/2$  и  $T/2$ . В случае стационарных периодических колебаний, соответствующих основному резонансу (и всем резонансам нечетных порядков  $n = 1, 3, \dots$  в выражении (6.11)), эти условия таковы:

$$\varphi_1(T/2) = -\varphi_2(-T/2), \quad (1 + m)\dot{\varphi}_1(T/2) = -(1 - m)\dot{\varphi}_2(-T/2). \quad (6.14)$$

Подставляя  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  из выражения (6.13) в (6.14), получаем систему двух однородных уравнений для неизвестных  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned}(S_1 - kS_2)A + (C_1 + C_2)B &= 0, \\ k(C_1 + C_2)A - (kS_1 - S_2)B &= 0.\end{aligned}\quad (6.15)$$

В уравнениях (6.15) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}C_1 &= \cos(\omega_1 T/2), & C_2 &= \cos(\omega_2 T/2), \\ S_1 &= \sin(\omega_1 T/2), & S_2 &= \sin(\omega_2 T/2).\end{aligned}\quad (6.16)$$

Система (6.15) однородных уравнений для  $A$  и  $B$  имеет нетривиальное (ненулевое) решение только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$2kC_1C_2 - (1 + k^2)S_1S_2 + 2k = 0. \quad (6.17)$$

Это условие существования ненулевого решения системы (6.15) дает уравнение для нахождения неизвестной переменной  $T$ , входящей в (6.17) через аргументы синусоидальных и косинусоидальных функций в  $S_1$ ,  $S_2$  и  $C_1$ ,  $C_2$ . Это уравнение и определяет искомые границы интервала неустойчивости. Нижняя и верхняя границы интервала  $T_-$  и  $T_+$  даются корнями этого уравнения.

Чтобы найти приближенное решение этого трансцендентного уравнения (6.17), преобразуем его к более удобной форме. Сначала представим входящие в него произведения косинусов и синусов  $C_1C_2$  и  $S_1S_2$  следующим образом:

$$C_1 C_2 = \frac{1}{2}(\cos \frac{\Delta\omega T}{2} + \cos \omega_{av} T), \quad S_1 S_2 = \frac{1}{2}(\cos \frac{\Delta\omega T}{2} - \cos \omega_{av} T),$$

где  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ . Затем, используя тождество  $\cos \alpha = 2 \cos^2(\alpha/2) - 1$ , приведем (6.17) к следующему виду:

$$(1 + k) \cos \frac{\omega_{av} T}{2} = \pm |1 - k| \cos \frac{\Delta\omega T}{4}. \quad (6.18)$$

Для границ интервала неустойчивости, содержащего основной резонанс, нужно искать решение уравнения (6.18) для неизвестного  $T$  в окрестности  $T = T_0/2$ . При заданном значении глубины модуляции  $m$  уравнение (6.18) имеет два решения в окрестности  $T_0/2 \approx T_{av}/2$ , которые соответствуют нижней (см. рис. 6.5) и верхней границам  $T_-$  и  $T_+$  интервала неустойчивости. Фазовая диаграмма и график угловой скорости для стационарных колебаний на верхней границе интервала показаны на рис. 6.6.



Рис. 6.6: Стационарные параметрические колебания на верхней границе основного интервала неустойчивости (вблизи  $T = T_{av}/2$ ).

Чтобы найти границы  $T_-$  и  $T_+$  интервала неустойчивости, представим искомый период  $T$  в аргументе косинуса в левой части уравнения (6.18) в виде  $T_{av}/2 + \Delta T$ , где  $\Delta T \ll T_0$ . Поскольку  $\omega_{av} T_{av} = 2\pi$ , можно переписать этот косинус как  $-\sin(\omega_{av} \Delta T/2)$ . Тогда уравнение (6.18) для неизвестного  $\Delta T$  принимает вид:

$$\sin \frac{\omega_{av} \Delta T}{2} = \mp \frac{|1 - k|}{1 + k} \cos \frac{\Delta\omega (T_{av}/2 + \Delta T)}{4}. \quad (6.19)$$

В компьютерной программе это уравнение для  $\Delta T$  решается численно методом итераций. Мы начинаем с  $\Delta T = 0$  в качестве приближения нулевого порядка, подставляя это значение в правую часть (6.19), взятую, скажем, с верхним знаком. Тогда левая часть (6.19) дает нам значение  $\Delta T$  в первом приближении. Подставляя это значение первого приближения в правую часть (6.19), в левой части получаем значение  $\Delta T$  во втором приближении. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет получено самосогласованное значение  $\Delta T$  для левой границы искомого интервала. Чтобы получить значение  $\Delta T$  для его правой границы, используется та же процедура итераций для уравнения (6.19) с нижним знаком в его правой части. Полученные таким образом значения периода модуляции, соответствующие границам интервала неустойчивости при заданном значении глубины модуляции  $m$ , выводятся на экран, когда открыта панель «Ввод данных». Если Вы изменили  $m$ , для получения новых значений границ интервала неустойчивости достаточно нажать кнопку «Обновить информацию».



После подстановки одного из корней  $T_-$  или  $T_+$  уравнения (6.19) в систему (6.15) оба ее уравнения для нахождения  $A$  и  $B$  становятся эквивалентными и позволяют найти только отношение  $A/B$ . Это означает, что амплитуда стационарных колебаний на границе интервала неустойчивости может иметь любое значение. Это значение зависит от начальных условий. Но форма колебаний на границах интервала однозначно определяется отношением амплитуд  $A$  и  $B$  синусоидальной и косинусоидальной функций, чередующиеся отрезки графиков которых образуют характерный профиль стационарных параметрических колебаний (см. рисунки 6.5 и 6.6).

Чтобы получить приближенное аналитическое решение уравнения (6.19), справедливое для малых значений глубины модуляции  $m$ , можно упростить выражение в его правой части, полагая  $k \approx 1 + m$ ,  $|1 - k| \approx m$ . Можно также значение косинуса принять равным 1. В левой части уравнения (6.19), где  $\omega_{av} = 2\pi/T_{av}$ , можно заменить синус его малым аргументом. В результате получается следующее приближенное выражение, справедливое с точностью до членов второго порядка по малому параметру  $m$ :

$$T_{\mp} = \frac{1}{2} \left( 1 \mp \frac{m}{\pi} \right) T_{av}. \quad (6.20)$$

Поскольку в компьютерной программе в качестве естественной единицы времени для ввода периода модуляции  $T$  используется период собственных колебаний  $T_0 = 2\pi\sqrt{D/J_0}$  (соответствующий среднему значению момента инерции  $J_0$ ), удобно выразить эти приближенные значения  $T_{\mp}$  для границ интервала неустойчивости через  $T_0$ :

$$T_{\mp} = \frac{1}{2} \left( 1 \mp \frac{m}{\pi} - \frac{3m^2}{8} \right) T_0. \quad (6.21)$$



Рис. 6.7: Стационарные параметрические колебания на границе интервала неустойчивости вблизи  $T = 3T_{av}/2$ .

Аналогично можно рассчитать границы интервала неустойчивости в окрестности резонанса третьего порядка  $n = 3$ , когда два полных цикла модуляции параметра совершаются на протяжении трех периодов собственных колебаний ( $T = 3T_{av}/2$ ). Рассматривая стационарные колебания на границах этого интервала (рис. 6.7), мы приходим к тем же уравнениям (6.15) для  $A$  и  $B$ , и к уравнению (6.18) для значений периода модуляции, соответствующих границам интервала. Однако теперь нужно искать решение (6.15) в окрестности  $T = 3T_{av}/2$ . Границы этого интервала, полученные численным решением уравнения (6.18) для заданного значения  $m$ , также выводятся на экран, когда открыта панель «Ввод данных». При малых значениях глубины модуляции  $m$  можно получить приближенные выражения для нижней и верхней границ этого интервала, справедливые с точностью до квадратичных по  $m$  членов:

$$T_{\mp} = \left( \frac{3}{2} \mp \frac{m}{2\pi} \right) T_{av}. \quad (6.22)$$

Через период собственных колебаний  $T_0$  (при  $J = J_0$ ) эти границы выражаются следующим образом:

$$T_{\mp} = \left( \frac{3}{2} \mp \frac{m}{2\pi} - \frac{9m^2}{16} \right) T_0. \quad (6.23)$$

В данном приближении интервал неустойчивости вблизи резонанса третьего порядка имеет такую же ширину  $(m/\pi)T_0$ , что и интервал в окрестности основного резонанса. Однако третий интервал характеризуется большей асимметрией: его середина смещена в сторону меньших значений от  $T = 3T_0/2$  на  $(9/16)m^2T_0$ .

При умеренных значениях глубины модуляции по прямоугольному кусочно-постоянному закону параметрический резонанс второго порядка  $n = 2$  (один цикл модуляции на протяжении одного периода собственных колебаний) оказывается сравнительно слабым по сравнению с рассмотренными выше резонансами с  $n = 1$  и  $n = 3$ . Дело в том, что в случае  $n = 2$  скачкообразные изменения момента инерции вызывают одно увеличение и одно уменьшение энергии осциллятора за период. Рост амплитуды колебаний возможен лишь тогда, когда прирост энергии, происходящий при сближении грузов, превосходит убыль энергии при обратном раздвижении грузов. Это может быть только при условии, что грузы сдвигаются к оси в моменты времени, когда угловая скорость ротора больше, чем когда грузы раздвигаются в стороны. При  $T \approx T_{av}$  выполнение такого условия может обеспечиваться лишь за счет малого различия в периодах  $T_1$  и  $T_2$  собственных колебаний ротора при раздвинутых и сдвинутых к оси грузах. Это различие периодов  $T_1$  и  $T_2$  само пропорционально малой величине  $m$ .



Рис. 6.8: Фазовая траектория колебаний и график угловой скорости при резонансе второго порядка ( $T = T_{av}$ ).

Рост амплитуды колебаний в условиях параметрического резонанса второго порядка показан на рис. 6.8. В этом случае вложение энергии за период пропорционально *квадрату* глубины модуляции  $m$ , в то время как при резонансах с  $n = 1$  и  $n = 3$  вложение энергии пропорционально первой степени  $m$ . Поэтому при том же значении постоянной затухания  $\gamma$  (при той же добротности  $Q$ ) требуется значительно большая глубина модуляции параметра, чтобы превзойти порог параметрического резонанса второго порядка.

Интервал параметрической неустойчивости в окрестности резонанса второго порядка значительно уже по сравнению с интервалами, соответствующими  $n = 1$  и  $n = 3$ : его ширина также пропорциональна лишь квадрату  $m$  (для малых  $m$ ). Для нахождения границ этого интервала

можно рассмотреть, как это было сделано выше для других резонансов, стационарные колебания при  $T \approx T_0$ , образованные чередующимися участками свободных синусоидальных колебаний с периодами  $T_1$  и  $T_2$ . Фазовая траектория и график угловой скорости для таких периодических колебаний на одной из границ показан на рис. 6.2.3. В случае стационарных колебаний на границе в отсутствие трения скачкообразные увеличения и уменьшения угловой скорости в точности компенсируются.

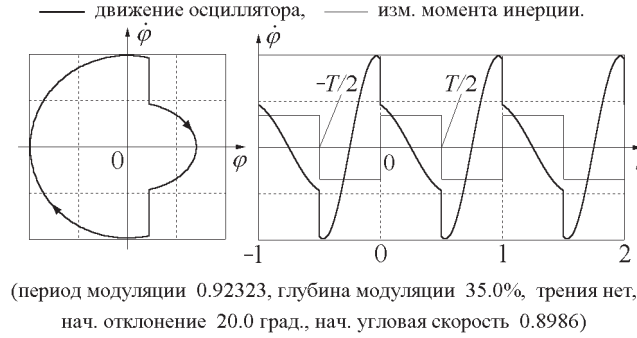


Рис. 6.9: Стационарные параметрические колебания на нижней границе интервала неустойчивости второго порядка (вблизи  $T = T_{av}$ ).

Для описания этих стационарных колебаний можно воспользоваться прежними выражениями (6.12)–(6.13) для  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$ . Условия сшивания графиков при  $t = 0$  также остаются прежними. Различия появляются лишь в уравнениях для постоянных  $A$  и  $B$ . Эти уравнения определяются из требований периодичности в моменты  $-T/2$  и  $T/2$ . В случае стационарных периодических колебаний, соответствующих резонансу с  $n = 2$  (и всем резонансам четных порядков  $n = 2, 4, \dots$  в (6.11)), эти условия имеют вид:

$$\varphi_1(T/2) = \varphi_2(-T/2), \quad (1 + m)\dot{\varphi}_1(T/2) = (1 - m)\dot{\varphi}_2(-T/2), \quad (6.24)$$

и мы получаем следующую систему уравнений для амплитуд  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} (S_1 + kS_2)A + (C_1 - C_2)B &= 0, \\ k(C_1 - C_2)A - (kS_1 + S_2)B &= 0, \end{aligned} \quad (6.25)$$

где  $S_1, C_1$  и  $S_2, C_2$  по-прежнему определяются соотношениями (6.16). Однородная система уравнений (6.25) для  $A$  и  $B$  имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю ее определителя:

$$2kC_1C_2 - (1 + k^2)S_1S_2 - 2k = 0. \quad (6.26)$$

Для нахождения значений  $T_{\mp} = T_{av} + \Delta T$  для границ интервала неустойчивости с  $n = 2$  преобразуем произведения  $C_1C_2$  и  $S_1S_2$  в уравнении (6.26) с помощью тождества  $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$ :

$$(1 + k) \sin \frac{\omega_{av}T}{2} = \pm |1 - k| \sin \frac{\Delta\omega T}{4}. \quad (6.27)$$

Затем заменим искомое значение периода  $T$  в аргументе синуса в левой части уравнения (6.27) на  $T_{av} + \Delta T$ , где  $\Delta T \ll T_0$ . Поскольку  $\omega_{av}T_{av} = 2\pi$ , этот синус в (6.27) иначе можно записать как  $-\sin(\omega_{av}\Delta T/2)$ , после чего уравнение (6.18) принимает вид:

$$\sin \frac{\omega_{av} \Delta T}{2} = \mp \frac{|1-k|}{1+k} \sin \frac{\Delta \omega (T_{av} + \Delta T)}{4}. \quad (6.28)$$

Это уравнение определяет левую границу  $T_-$  интервала неустойчивости, когда берется верхний знак в его правой части, и правую границу  $T_+$  в противоположном случае. Стационарные колебания для правой границы интервала показаны на рис. 6.10.

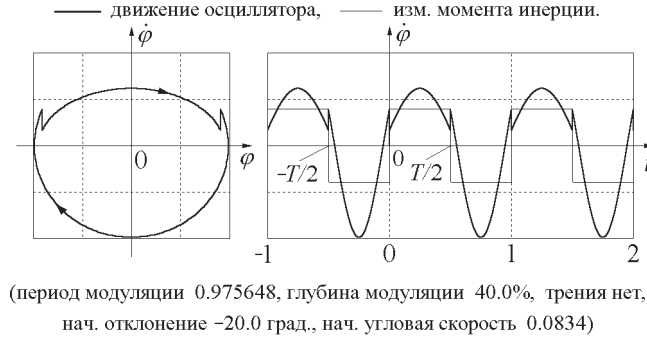


Рис. 6.10: Стационарные параметрические колебания на правой границе второго интервала неустойчивости (вблизи  $T = T_{av} \approx T_0$ ).

В компьютерной программе уравнение (6.28) для  $\Delta T$  также решается численно методом итераций. Подставляя  $T_-$  или  $T_+$ , найденные из (6.28), в одно из уравнений (6.15), мы получаем отношение амплитуд  $A$  и  $B$ , которым определяется профиль стационарных колебаний на соответствующей границе интервала неустойчивости.

Для умеренных значений глубины модуляции можно найти приближенное аналитическое решение уравнения (6.28):

$$T_{\mp} = \left(1 \mp \frac{1}{4}m^2\right) T_{av}. \quad (6.29)$$

Через  $T_0$  эти границы второго интервала выражаются следующим образом:

$$T_{\mp} = T_0 + \left(\mp \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\right) m^2 T_0, \quad (6.30)$$

т. е.  $T_- = T_0 - (5/8)m^2 T_0$ ,  $T_+ = T_0 - (1/8)m^2 T_0$ . Как уже отмечалось выше, ширина  $T_+ - T_- = (m^2/2)T_0$  этого интервала неустойчивости пропорциональна квадрату глубины модуляции.

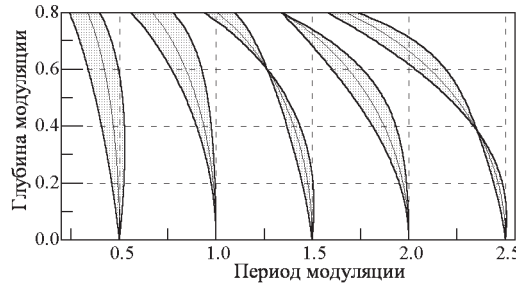


Рис. 6.11: Интервалы параметрического возбуждения при прямоугольной модуляции момента инерции в отсутствие трения.

Интервалы неустойчивости для первых пяти параметрических резонансов показаны на диаграмме рис. 6.11 для разных значений глубины модуляции  $m$ . Диаграмма получена численным решением обсуждавшихся выше уравнений. Отметим, насколько узки интервалы для резонансов четных порядков ( $n = 2, 4$ ) при малых значениях  $m$ . С ростом  $m$  эти интервалы расширяются и становятся сравнимыми с интервалами нечетных порядков.

Из диаграммы на рис. 6.11 видно, что для некоторых значений глубины модуляции  $m$  обе границы интервалов с  $n > 2$  совпадают (можно считать, что при таких  $m$  они *пересекаются*). Это значит, что при таких значениях глубины модуляции соответствующие интервалы параметрического возбуждения исчезают. Этому исчезновению интервалов параметрического возбуждения можно дать простое физическое объяснение, если обратить внимание на соотношение периодов собственных колебаний  $T_1$  и  $T_2$  (при раздвинутых и сдвинутых грузах) для соответствующих значений  $m$ . Оказывается, что  $T_1$  и  $T_2$  относятся как 2:1, 3:1, и 3:2. В случае первого пересечения (с отношением собственных периодов 2:1) за первую половину цикла модуляции происходит ровно половина собственного колебания ротора с периодом  $T_1$ , а за вторую — целое колебание с периодом  $T_2$  (три полных собственных колебания за один цикл модуляции). Ясно, что в таких условиях модуляции процесс колебаний будет периодическим всегда, при любых начальных условиях. Следовательно, для соответствующих значений глубины модуляции  $m$  и периода модуляции  $T$  не будет ни роста, ни убывания амплитуды: при любых начальных условиях происходят стационарные колебания.

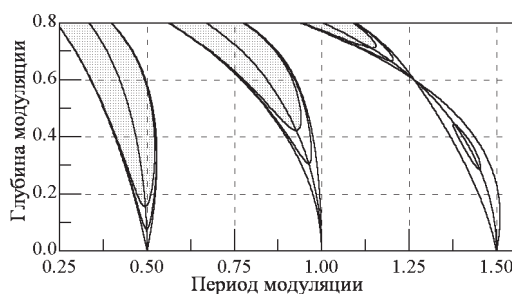


Рис. 6.12: Интервалы параметрического возбуждения для первых трех резонансов при прямоугольной модуляции момента инерции (в отсутствие трения, для  $Q = 20$  и для  $Q = 10$ ).

При наличии трения в системе интервалы параметрического резонанса становятся уже и при достаточно сильном трении исчезают совсем. Когда глубина модуляции превышает пороговое значение, приближенные значения для границ первого интервала даются выражениями (6.20) или (6.21), если подставить в них вместо  $m$  величину  $\sqrt{m^2 - m_{\min}^2}$ , в которой пороговое значение глубины модуляции  $m_{\min} = \pi/(2Q)$  определяется выражением (6.6). Доказать это утверждение предлагается самостоятельно в качестве упражнения (задача 1.9). Для третьего интервала можно воспользоваться выражением (6.22) или (6.23), подставляя туда вместо  $m$  величину  $\sqrt{m^2 - m_{\min}^2}$ , в которой  $m_{\min} = 3\pi/(2Q)$ . Когда глубина модуляции  $m$  равна пороговому значению  $m_{\min}$ , соответствующий интервал параметрического возбуждения исчезает.

Границы второго интервала параметрического резонанса при наличии трения даются выражениями (6.29) или (6.30), если подставить в них вместо  $m^2$  выражение  $\sqrt{m^4 - m_{\min}^4}$  с пороговым значением  $m_{\min} = \sqrt{2/Q}$ , соответствующим резонансу второго порядка (см. задачи 3.2 и 3.3).

Диаграмма на рис. 6.12 показывает границы первых трех интервалов параметрического резонанса в отсутствие трения, для  $Q = 20$ , и для  $Q = 10$ . Обратите внимание на «островок» параметрического резонанса для  $n = 3$  и  $Q = 20$ . Этот резонанс пропадает, когда глубина модуляции

достигает значения 45% и появляется снова, когда  $m$  превышает примерно 66%.

Для каждого данного значения глубины модуляции  $m$  могут существовать лишь несколько первых интервалов параметрического возбуждения, для которых  $m$  превышает пороговое значение.

Диаграмму интервалов для произвольного значения добротности  $Q$  можно получить в компьютерной программе, выбрав раздел «Теоретический обзор», «Условия параметрического резонанса».

Подчеркнем еще раз, что даже в том случае, когда положение равновесия системы неустойчиво вследствие периодической модуляции параметра (т. е. когда выполняются необходимые условия для возбуждения параметрического резонанса), осциллятор будет оставаться в покое в положении равновесия, если заданы нулевые начальные условия, т. е.  $\varphi(0)$  и  $\dot{\varphi}(0)$  в точности равны нулю. В этом заключается одно из отличий параметрического резонанса от обычного резонанса при вынужденных колебаниях, для которого амплитуда растет даже при нулевых начальных условиях. Для возбуждения параметрического резонанса, кроме выполнения условия превышения порога, в системе должны обязательно существовать хотя бы слабые собственные колебания. В реальных системах такие колебания всегда существуют из-за флуктуаций.

В линейной системе при превышении порога параметрического возбуждения амплитуда колебаний неограниченно растет со временем по экспоненциальному закону. В противоположность случаю вынужденных колебаний, вязкое трение не в состоянии ограничить рост амплитуды колебаний при параметрическом резонансе. В реальных системах рост амплитуды ограничивается нелинейными явлениями, приводящими к зависимости периода собственных колебаний от амплитуды. По мере роста амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний изменяется собственный период колебаний и поэтому нарушаются условия резонанса. Рост амплитуды сменяется ее уменьшением. При малых амплитудах условия резонанса восстанавливаются, и амплитуда снова начинает расти. При наличии трения такие переходные биения в нелинейной системе постепенно затухают, и устанавливается стационарный режим колебаний с конечной амплитудой.

#### 6.2.4 Спектр стационарных колебаний

Для периодических колебаний, происходящих на границах интервалов параметрического возбуждения (как и для стационарных колебаний в условиях параметрической регенерации), компьютерная программа позволяет исследовать спектральный состав, т. е. выделить из сложного периодического колебания гармонику на основной частоте и высшие гармоники (входящие в состав сложного колебания синусоидальные составляющие с частотами, кратными основной частоте). Для этого следует открыть окно «Фазовая траектория» и получить при моделировании периодическое колебание. Заметим, что для получения при моделировании стационарных колебаний с периодической зависимостью от времени (как для границ интервалов параметрической неустойчивости, так и для параметрической регенерации) для каждого набора параметров системы необходимо задать совершенно определенные начальные условия. Когда Вам удастся получить периодическое колебание, пункт меню «Спектр» становится активным, и с его помощью можно открыть окно, в котором производится разложение данного процесса в спектр. В этом окне можно построить как отдельные гармоники сложного колебания, так и суммы любого их числа (до 32). Затем можно сопоставить график такой суммы гармоник с графиком колебания, получаемым численным интегрированием дифференциального уравнения системы (для этого нужно в этом окне «Спектр» нажать кнопку «Пуск»).

Если у Вас возникнут трудности с определением начальных условий, обеспечивающих получение стационарных периодических колебаний в моделирующем эксперименте, выберите пункт

меню «Примеры». Там Вы сможете найти примеры стационарных колебаний, для которых необходимые параметры системы и начальные условия уже заданы. Кроме того, окно «Спектр» можно открыть из главного меню программы. Тогда некоторые виды стационарных колебаний и их спектры будут доступны через пункт меню «Примеры» непосредственно в окне «Спектр».

## 6.3 Контрольные вопросы и задачи

### 6.3.1 Основной параметрический резонанс

**1.1\* Основной резонанс ( $n = 1$ ) в отсутствие трения.** Задайте умеренное значение глубины  $m$  модуляции момента инерции (около 10 – 15%). Пусть период модуляции  $T$  равен половине периода  $T_0$  собственных колебаний осциллятора. Чтобы принудительная модуляция параметра вызвала резонанс, осциллятор с самого начала должен совершать хотя бы небольшие собственные колебания, т. е. должны быть заданы ненулевые начальные условия.

(а) Какого вида начальные условия следует задать, чтобы сразу после включения модуляции момента инерции начался быструй резонансный рост амплитуды колебаний? Напомним, что в принятой модели в начальный момент времени  $t = 0$  грузы скачкообразно раздвигаются в стороны от оси вращения, так что момент инерции ротора возрастает.

(б) Какого вида начальные условия приведут сначала к постепенному затуханию уже существующих колебаний? Проверьте свой ответ в моделирующем эксперименте. Используя полученные графики колебаний, объясните физическую причину первоначального уменьшения амплитуды колебаний. Примите во внимание фазовые соотношения между собственными колебаниями ротора и принудительными периодическими изменениями его момента инерции. Почему через некоторое время убывание амплитуды колебаний сменяется ее возрастанием?

(в)\*\*\* Попытайтесь выяснить, какими факторами определяется промежуток времени, по истечении которого первоначальное затухание колебаний сменяется их неограниченным ростом.

**1.2\* Рост амплитуды в условиях основного резонанса в отсутствие трения.** Пусть принудительная модуляция момента инерции происходит с периодом  $T$ , равным половине периода  $T_0$  собственных колебаний осциллятора ( $T = T_0/2$ ).

(а) По какому закону растет со временем амплитуда колебаний в условиях основного резонанса, если задано некоторое начальное отклонение  $\varphi(0) = \varphi_0$  и нулевая начальная скорость  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ? При каком значении глубины модуляции  $m$  (в отсутствие трения) начальная амплитуда колебаний удвоится за 10 циклов модуляции момента инерции? Проверьте свой результат в моделирующем эксперименте.

(б) Чем будет отличаться процесс резонансной раскачки от случая, рассмотренного в пункте (а), если задать такое же по величине начальное отклонение в противоположную сторону?

#### 1.3\* Порог возбуждения для основного резонанса.

(а) Выбрав умеренное значение глубины модуляции момента инерции (скажем,  $m = 15\%$ ), оцените пороговое (минимальное) значение добротности  $Q_{\min}$  в условиях настройки периода модуляции на основной резонанс ( $T = T_0/2$ ). Напомним, что пороговый режим соответствует стационарным колебаниям неизменной амплитуды (параметрическая регенерация). При каких начальных условиях колебания осциллятора с пороговым значением добротности  $Q = Q_{\min}$  сразу будут стационарными?

(б) Уточните Вашу теоретическую оценку порогового значения добротности  $Q_{\min}$  с помощью моделирующего эксперимента на компьютере (методом проб и ошибок). В чем заключается причина расхождений теоретического и экспериментального значений?

(в) Исследуйте устойчивость режима параметрической регенерации, т. е. режима стационарных колебаний в условиях порога возбуждения (для  $Q = Q_{\min}$ ). Устойчив ли этот режим по отношению к малым изменениям параметров системы (периода и глубины модуляции, добротности)? Устойчив ли режим регенерации по отношению к малым изменениям начальных условий?

(г)\*\* Пороговое значение добротности, обеспечивающее стационарные колебания при заданной глубине модуляции  $m$ , будет абсолютно минимальным при *точной* настройке периода модуляции на резонанс. При малых значениях  $m$  основной резонанс имеет место при  $T = T_0/2$ . Однако с ростом  $m$  резонансное значение периода модуляции начинает отклоняться от  $T_0/2$ . Получите выражение для резонансного значения периода модуляции при произвольно большой глубине модуляции  $m$  и сделайте численные оценки  $T$  для  $m = 15\%$  и  $m = 40\%$ .

#### 1.4\* Рост амплитуды параметрических колебаний при превышении порога возбуждения.

(а) Для периода модуляции  $T = T_0/2$  и глубины модуляции  $m = 15\%$ , во сколько раз возрастает амплитуда колебаний за 10 циклов модуляции параметра, если добротность вдвое больше своего порогового значения, т. е.  $Q = 2Q_{\min}$ ? Зависит ли ответ на этот вопрос от начальных условий? Проверьте свой ответ в эксперименте.

(б) Какой будет амплитуда колебаний спустя еще 10 периодов модуляции? Почему при превышении порога возбуждения трение не в состоянии ограничить роста амплитуды колебаний, возбуждаемых параметрически?

#### 1.5\*\* Основной интервал параметрического резонанса в отсутствие трения.

(а) Выполните теоретический расчет значений периода модуляции  $T$ , соответствующих границам основного интервала параметрической неустойчивости, для заданного значения глубины модуляции  $m$  (в приближении  $m \ll 1$ ) для случая, когда трение отсутствует.

(б) Как ширина интервала неустойчивости зависит от глубины модуляции? Влияют ли члены второго порядка малости (по параметру  $m \ll 1$ ) на ширину интервала?

#### 1.6\*\* Колебания на границах основного интервала параметрической неустойчивости.

Введите значение периода модуляции  $T$ , соответствующее одной из границ основного интервала параметрической неустойчивости при заданной глубине модуляции (в отсутствие трения). Эти границы замечательны тем, что для них возможны стационарные периодические колебания неизменной амплитуды. Однако при произвольных начальных условиях форма колебаний будет постепенно изменяться, т. е. периодического процесса не будет. Амплитуда колебаний будет сначала увеличиваться, а через некоторое время уменьшаться и потом снова возрастать, либо наоборот, сначала уменьшаться, а затем увеличиваться. Почему?

#### 1.7\*\* Начальные условия для периодических колебаний на границах интервала.

(а) Введите значение периода модуляции, соответствующее нижней границе основного интервала параметрической неустойчивости при заданном значении глубины модуляции  $m$  (в отсутствие трения). Задайте произвольно некоторое начальное отклонение ротора. Какую начальную скорость необходимо задать для того, чтобы получить в моделирующем эксперименте стационарные периодические колебания неизменной амплитуды? Сделайте соответствующие расчеты и эксперименты также и для верхней границы интервала неустойчивости.

(б) Объясните характерные особенности наблюдаемых графиков и фазовой траектории для стационарных колебаний на каждой из границ основного интервала параметрической неустойчивости.

(в) Для выбранного значения начального угла отклонения  $\varphi_0$  и рассчитанного значения начальной угловой скорости  $\dot{\varphi}(0)$ , обеспечивающей стационарные колебания на границе интервала, рассчитайте амплитуду колебаний (для каждой из границ интервала). Проверьте свои теоретические значения в эксперименте.



**1.8\*\* Порог параметрического возбуждения в пределах резонансного интервала.** Режим параметрической генерации при точной настройке на основной резонанс был рассмотрен в задаче 1.3, где требовалось найти минимальное значение добротности  $Q = Q_{\min}$ , обеспечивающее стационарные колебания. Но стационарные колебания возможны и при некоторой расстройке периода модуляции относительно его резонансного значения.

(а) Выберите некоторое значение периода модуляции  $T$  где-либо в пределах интервала параметрического резонанса (для заданной глубины модуляции  $m$ ), например, посередине между резонансным значением и одной из границ. Оцените наблюдаемый в эксперименте рост амплитуды колебаний в отсутствие трения, и затем на основе этих наблюдений рассчитайте то минимальное (пороговое) значение добротности  $Q = Q_{\min}$ , которое может обеспечить стационарные колебания при данных значениях глубины и периода модуляции.

(б) Проверьте свою оценку  $Q = Q_{\min}$  в эксперименте и уточните ее методом проб и ошибок. Сравните наблюдаемые графики (и фазовые траектории) стационарных колебаний с соответствующими графиками стационарного процесса параметрической регенерации в условиях точной настройки периода модуляции на основной резонанс, а также с графиками стационарных колебаний на границах интервала в отсутствие трения. Чем объясняются наблюдаемые отличия?

(в)\*\*\* Для малых значений глубины модуляции  $m \ll 1$  рассчитайте с точностью до членов второго порядка по  $m$  пороговое значение добротности  $Q = Q_{\min}$  для значения периода модуляции, лежащего в произвольной точке внутри интервала параметрического резонанса. Сравните свой теоретический результат с оценкой, полученной экспериментально в пунктах (а) и (б).

**1.9\*\*\* Основной интервал параметрического резонанса при наличии трения.**

(а) Для некоторого фиксированного значения глубины модуляции  $m$  частотный интервал параметрического резонанса сужается с увеличением трения и исчезает совсем, когда добротность уменьшается до порогового значения. Допустим, что добротность  $Q$  больше своего порогового значения  $Q_{\min}$ . Рассчитайте значения  $T_-$  и  $T_+$  периода модуляции  $T$ , соответствующие границам интервала параметрического резонанса для заданных  $m$  и  $Q$  (в приближении  $m \ll 1$ ). Выразите  $T_-$  и  $T_+$  через  $m$  и  $m_{\min}$ , где  $m_{\min} = \pi/(2Q)$  — приближенное значение пороговой глубины модуляции  $m$  для данной добротности  $Q$  (в условиях точной настройки на основной резонанс).

(б) Чтобы в моделирующем эксперименте наблюдать стационарные колебания, соответствующие этим границам, необходимо задать начальные условия должным образом. Какую начальную скорость нужно ввести при заданном начальном отклонении  $\varphi_0$ , чтобы получить стационарные колебания (для каждой из границ интервала)? Проверьте свои расчеты в эксперименте.

**1.10 Колебания за пределами интервалов параметрического резонанса.** Для некоторого произвольного значения  $m$  введите период модуляции  $T$ , находящийся вне пределов интервалов параметрического резонанса. Убедитесь, что какими бы ни были начальные условия, колебания рано или поздно затухнут даже при очень слабом трении, и осциллятор будет покоиться в положении равновесия, несмотря на периодические изменения момента инерции.

## 6.3.2 Ручное управление параметром

Моделирующая программа допускает, наряду с автоматическим программным режимом принудительной модуляции момента инерции с заданным периодом (это режим по умолчанию), возможность включения режима ручного управления моментом инерции ротора. Для перехода на ручное управление нужно отметить контрольный бокс «Ручное управление» («Manual Control») в любом из рабочих экранов программы. Глубина модуляции (как и добротность осциллятора) и в этом случае определяется значением, введенным в панели «Ввод параметров», но автоматическая модуляция момента инерции подавляется, и моменты перемещений грузов Вы выбираете

самостоятельно, щелкая мышью по соответствующей кнопке или нажимая клавишу «Пробел» на клавиатуре. Если грузы находились в придвинутом к оси положении, то при первом щелчке (или нажатии пробела) они смещаются в сторону от оси (и наоборот), а при следующем щелчке возвращаются в прежние положения. Пытаясь раскачать осциллятор таким способом, Вы не только придете к более глубокому пониманию механизма параметрического возбуждения колебаний, но сможете выработать у себя чувственное ощущение физических причин параметрического резонанса.

### 2.1 Возбуждение колебаний ручным управлением изменениями момента инерции.

(а) Включите режим ручного управления моментом инерции. Введите некоторое значение  $m$  глубины модуляции (около 15 – 30%) и выберите значение добротности, превышающее пороговое (для данного  $m$ ) значение. Задав подходящие начальные условия, возбудите собственные колебания небольшой амплитуды (10 – 20 градусов). Попробуйте увеличить размах колебаний, щелкая мышью по кнопке ручного управления в подходящие моменты времени (либо нажимая клавишу «Пробел» на клавиатуре). В какие моменты времени следует смещать грузы в сторону оси и в какие моменты раздвигать их в прежние положения, чтобы размах колебаний увеличивался как можно быстрее?

(б) Возможно ли с помощью ручного управления добиться увеличения размаха колебаний ротора до заданной величины (скажем, до  $180^\circ$ ) за меньшее число циклов изменения момента инерции, чем в автоматическом режиме в условиях точной настройки периода прямоугольной модуляции на основной резонанс? Подразумевается, что все параметры системы (глубина модуляции, добротность, начальная амплитуда) одинаковы для режимов ручной и автоматической модуляции момента инерции. Приведите достаточно убедительные аргументы для обоснования своего ответа.

**2.2 Гашение колебаний ручным управлением.** После того, как Вы возбуждали достаточно сильные колебания осциллятора с помощью подходящего манипулирования моментом инерции ротора, попробуйте вручную как можно быстрее погасить колебания ротора с помощью принудительных изменений его момента инерции. Для перехода от раскачки к гашению колебаний придется должным образом изменить фазу принудительных изменений момента инерции. В какие моменты времени следует сдвигать грузы к оси ротора, и в какие моменты раздвигать их обратно, чтобы как можно быстрее погасить колебания ротора?

## 6.3.3 Параметрические резонансы и интервалы неустойчивости высоких порядков ( $n > 1$ )

### 3.1\* Параметрический резонанс третьего порядка ( $n = 3$ ) в отсутствие трения.

(а) Исследуйте экспериментально параметрическое возбуждение ротора при скачкообразных изменениях момента инерции ротора с периодом  $T \approx 3T_0/2$  (приблизительно полтора периода собственных колебаний, или три цикла изменения параметра на протяжении двух собственных колебаний). Какие начальные условия обеспечат рост колебаний с самого начала модуляции параметра?

(б) Какое значение  $m$  глубины модуляции момента инерции необходимо задать, чтобы в отсутствие трения начальная амплитуда колебаний удвоилась за 15 циклов модуляции при настройке на резонанс третьего порядка? Сколько циклов модуляции необходимо для того, чтобы амплитуда удвоилась еще раз?

(в) При каких начальных условиях амплитуда колебаний сначала будет убывать? Почему это затухание колебаний через некоторое время неизбежно сменится их ростом?

**3.2\* Порог возбуждения для параметрического резонанса третьего порядка.**

(а) Выполните теоретическую оценку порогового (минимального) значения добротности осциллятора  $Q_{\min}$  при малом значении глубины модуляции  $m \ll 1$  с точностью до членов первого порядка по  $m$ . Сравните полученное значение с пороговой добротностью для основного резонанса (задача 1.3) и для резонанса второго порядка  $n = 2$  (см. задачу 3.4). Как можно объяснить это различие пороговых значений добротности для резонансов разных порядков?

(б) Для глубины модуляции  $m = 30\%$  рассчитайте минимальное значение добротности  $Q_{\min}$ , при котором возможно параметрическое возбуждение колебаний (на основе теоретической оценки, полученной при ответе на предыдущий вопрос данной задачи). Улучшите теоретическую оценку методом проб и ошибок. Объясните наблюдаемую форму графиков и фазовой траектории стационарных колебаний при  $Q_{\min}$ . Какие факторы определяют амплитуду таких колебаний?

**3.3\*\* Третий интервал параметрического возбуждения.**

(а) Рассчитайте приближенно значения периода модуляции  $T$ , которые соответствуют границам третьего интервала параметрической неустойчивости в отсутствие трения при заданной глубине модуляции момента инерции (в приближении  $m \ll 1$ ) с точностью до членов первого порядка по  $m$ . Как ширина третьего интервала зависит от глубины модуляции? Влияют ли члены второго порядка на ширину интервала?

(б) Какую начальную угловую скорость следует ввести при выбранном начальном отклонении  $\varphi_0$  для того, чтобы получить стационарные периодические колебания неизменной амплитуды (для каждой из границ третьего интервала параметрического резонанса)? Проверьте свой ответ в эксперименте. Чем отличаются фазовые траектории, соответствующие стационарным колебаниям на нижней и верхней границах этого интервала?

(в) Исследуйте ширину третьего интервала параметрического возбуждения в отсутствие трения при произвольно больших амплитудах модуляции  $m$ , воспользовавшись для этого соответствующим разделом «Теоретического обзора» компьютерной программы (см. также рис. 6.11 на стр. 124). Обратите внимание, как ведет себя третий интервал при увеличении глубины модуляции. Какими физическими причинами можно объяснить постепенное смещение интервала в сторону более коротких периодов модуляции?

(г) При  $m = 60\%$  обе границы третьего интервала параметрического резонанса совпадают (можно сказать, что они пересекаются при  $m = 60\%$ ). Какими физическими причинами объясняется это исчезновение третьего интервала при такой глубине модуляции момента инерции?

**3.4\*\* Третий интервал параметрического резонанса при наличии трения.**

(а) При малых  $m$  параметрический резонанс третьего порядка имеет место при  $T = 3T_0/2$ . Однако по мере увеличения глубины модуляции  $m$  резонансное значение периода модуляции все сильнее отклоняется от  $3T_0/2$ . Получите аналитическое выражение для периода модуляции, соответствующее точной настройке на третий резонанс для произвольных (в том числе приближающихся к 100%) значений глубины модуляции. Каковы резонансные значения периода для  $m = 15\%$ ,  $m = 40\%$  и  $m = 60\%$ ?

(б) Как влияет трение на ширину третьего интервала параметрического резонанса? Для малых глубин модуляции  $m \ll 1$  рассчитайте приближенно значения периода модуляции  $T$ , соответствующие границам интервала при заданной добротности  $Q$ . Ответ выразите через  $m$  и пороговое значение  $m_{\min} = 3\pi/(2Q)$  (см. задачу 3.2).

**3.5\*\* Параметрический резонанс второго порядка.**

(а) При небольших значениях глубины модуляции ( $m < 20\%$ ) резонанс второго порядка оказывается слабее не только резонанса первого порядка, но и резонанса третьего порядка: при настройке периода модуляции на резонанс второго порядка амплитуда колебаний растет значительно медленнее, чем при настройке на резонансы  $n = 1$  и  $n = 3$  (для той же глубины мо-

дуляции). Какие физические причины можете Вы привести для объяснения того, что резонанс с  $n = 2$  (как и другие резонансы четных порядков) при небольших значениях  $m$  выражен значительно слабее, чем резонансы нечетных порядков? Объясните наблюдаемую форму фазовой траектории при резонансе второго порядка.

(б) Какие начальные условия нужно задать для получения наиболее быстрого роста амплитуды колебаний при резонансе второго порядка? Попробуйте определить экспериментально пороговое значение глубины модуляции для этого резонанса при заданной добротности (например, при  $Q = 15$ ).

(в)\*\* Для малых значений глубины модуляции  $m \ll 1$  рассчитайте теоретически пороговое значение добротности  $Q_{\min}$ . (Для этого придется при расчете удерживать члены второго порядка малости по параметру  $m$ ). Как пороговое значение добротности  $Q_{\min}$  зависит от  $m$ ? Сравните полученное теоретическое значение с порогом для основного резонанса и для резонанса третьего порядка. Объясните качественно эти различия, привлекая соображения физического характера. Сравните также теоретическое значение пороговой добротности с найденным экспериментально в пункте (б).

### 3.6\*\* Второй интервал параметрического резонанса.

(а) Для малых значений глубины модуляции  $m \ll 1$  рассчитайте теоретически ширину интервала параметрической неустойчивости, окружающего резонанс второго порядка. (В этом расчете необходимо учитывать члены второго порядка малости по параметру  $m$ .) Как ширина второго интервала зависит от  $m$ ? Сравните полученный результат для  $n = 2$  с соответствующими величинами для основного интервала и для интервала порядка  $n = 3$ . Почему второй интервал при малых  $m$  значительно уже, чем интервал более высокого третьего порядка?

(б) Почему каждой из границ интервала неустойчивости с  $n = 2$  соответствуют две различные фазовые траектории? Чем различаются стационарные колебания, соответствующие различным фазовым траекториям для одной и той же границы? Как возбудить каждое из этих колебаний? Какие начальные условия приводят к стационарным колебаниям, если задан период модуляции, соответствующий одной из границ второго интервала параметрического резонанса?

3.7\*\*\* Второй интервал параметрического резонанса при наличии трения. Как влияет трение на ширину второго интервала параметрического возбуждения? Рассчитайте теоретически приближенные значения (для  $m \ll 1$ ) периода модуляции  $T_{\pm}$ , соответствующие границам этого интервала при заданном значении добротности  $Q$ , превосходящем пороговое значение  $Q_{\min}$ , отвечающее точной настройке периода модуляции на резонанс второго порядка (см. задачу 3.5). Выразите результат расчета границ интервала для заданного  $Q$  через  $m$  и  $Q_{\min}$ .

## Глава 7

# Параметрические колебания при плавной модуляции параметра линейного осциллятора

Общие характеристики параметрического возбуждения колебаний в линейной системе, а также условия возникновения и отличительные особенности параметрического резонанса рассмотрены в предыдущей главе при изучении случая прямоугольной кусочно-постоянной модуляции параметра. В этой главе на примере той же механической модели линейного торсионного осциллятора с модулируемым моментом инерции рассматривается возбуждение параметрических колебаний при плавной модуляции момента инерции. Такая модуляция осуществляется в изучаемой модели при синусоидальном принудительном перемещении грузов в радиальном направлении вдоль стержня ротора.

Чтобы обеспечить рост энергии осциллятора и возбуждение колебаний при плавной модуляции момента инерции, движение грузов в направлении оси ротора должно в целом происходить при большей угловой скорости ротора, чем обратное движение грузов к концам стержня от оси вращения. В сравнении с прямоугольной кусочно-постоянной модуляцией, плавная модуляция менее эффективна для передачи энергии осциллятору, так как радиальные перемещения грузов здесь растянуты во времени, в то время как при прямоугольном законе модуляции эти перемещения могут происходить в оптимальные (с точки зрения обмена энергией) моменты времени. Случай плавной модуляции момента инерции более важен с точки зрения практических приложений.

## 7.1 Теоретические сведения

### 7.1.1 Физические причины параметрического резонанса и оценка порога возбуждения

Для изучения параметрического резонанса при плавной модуляции параметра в компьютерной программе используется модель той же самой механической системы, что и в предыдущей главе. Маховик в виде уравновешенного стержня с двумя одинаковыми грузами может поворачиваться вокруг оси, проходящей через его середину (см. рис. 6.1 на стр. 110). В положении равновесия один из концов стержня указывает на нулевое деление шкалы. При повороте стержня спиральная пружина создает пропорциональный углу отклонения восстанавливающий момент, стремящийся вернуть ротор в положение равновесия. Принудительная модуляция момента инерции

ротора осуществляется одновременным радиальным синусоидальным движением грузов вдоль стержня в противоположных направлениях, так что центр масс ротора остается на оси вращения.

Чтобы понять, каким образом и при каких условиях плавное периодическое движение грузов вдоль стержня может возбудить крутильные колебания ротора, ниже используются соображения, основанные на законе сохранения энергии. При параметрическом возбуждении колебаний ротор должен получать энергию от источника, который сообщает грузам принудительные радиальные перемещения. Поэтому необходимо рассчитать работу, совершаемую этим источником на протяжении периода колебаний, и найти условия, при которых эта работа положительна и превышает потери энергии из-за трения.

Для параметрического возбуждения колебаний осциллятора должны выполняться определенные фазовые соотношения между изменениями угловой скорости ротора при крутильных колебаниях и модуляцией его момента инерции, т. е. принудительным радиальным движением грузов. А именно, грузы нужно перемещать в направлении оси ротора в целом при большей угловой скорости ротора, чем смещать их обратно от оси вращения к концам стержня. В противном случае модуляция момента инерции лишь ускорит затухание собственных колебаний.

В принятой математической модели системы принудительное радиальное движение грузов вдоль стержня предполагается в точности синусоидальным, т. е. их расстояние  $l$  от оси вращения изменяется в соответствии с выражением:

$$l(t) = l_0(1 + \tilde{m} \sin \omega t). \quad (7.1)$$

Здесь  $l_0$  — среднее расстояние грузов от оси вращения, а  $\tilde{m}$  — безразмерная амплитуда их гармонического движения вдоль стержня ( $\tilde{m} < 1$ ). Из (7.1) следует, что грузы движутся относительно стержня со скоростью, изменяющейся со временем как  $\cos \omega t$ :

$$v(t) = dl/dt = \omega l_0 \tilde{m} \cos \omega t. \quad (7.2)$$

Ускорение грузов в их движении относительно стержня равно

$$a_r(t) = dv/dt = -\omega^2 l_0 \tilde{m} \sin \omega t. \quad (7.3)$$

Чтобы найти силу  $F$ , которая должна быть приложена к грузу источником, обеспечивающим грузу заданное радиальное принудительное движение, мы воспользуемся неинерциальной системой отсчета, вращающейся вместе с ротором. Применяя второй закон Ньютона к движению грузов в этой неинерциальной вращающейся системе отсчета, необходимо учитывать действующую на грузы центробежную силу инерции  $M\dot{\varphi}^2(t)l(t)$ , где  $M$  — масса груза, а  $\dot{\varphi}(t)$  — угловая скорость ротора:

$$Ma_r(t) = F(t) + M\dot{\varphi}^2(t)l(t). \quad (7.4)$$

Нас интересует работа, совершаемая этой силой  $F(t)$  в течение одного периода крутильных колебаний ротора. Эта работа (для двух грузов) равна изменению энергии колебаний за период. Элементарная работа  $dW$ , совершаемая за интервал времени  $dt$ , на протяжении которого грузы смещаются вдоль стержня на расстояние  $dl = v(t)dt$ , может быть записана следующим образом:

$$dW = F(t)dl = F(t)v(t)dt = [Ma_r(t) - M\dot{\varphi}^2(t)l(t)]v(t)dt. \quad (7.5)$$

Как видно из выражения (7.2), радиальная скорость груза  $v(t)$  в (7.5) пропорциональна безразмерной амплитуде  $\tilde{m}$  его принудительного движения вдоль стержня. Если ограничиться в

расчетах первым порядком по малому параметру  $\tilde{m}$ , в квадратных скобках в выражении (7.5) достаточно сохранить лишь второй член, а вместо  $l(t)$  можно подставить его среднее значение  $l_0$ :

$$dW \approx -M\dot{\varphi}^2(t)l_0v(t)dt = -M\dot{\varphi}^2(t)l_0^2\omega\tilde{m}\cos\omega t. \quad (7.6)$$

Наиболее благоприятные условия для параметрического возбуждения колебаний складываются, когда грузы совершают два полных цикла принудительного радиального перемещения на протяжении одного периода собственных крутильных колебаний ротора. Другими словами, частота  $\omega$  синусоидального движения грузов в выражениях (7.1) и (7.6) должна быть примерно вдвое больше средней частоты собственных колебаний ротора  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ . (Здесь  $\omega_0$  — это частота колебаний ротора при условии, что грузы закреплены на нем на среднем расстоянии  $l_0$  от оси вращения.) Частота модуляции  $\omega$  в (7.1), равная удвоенному значению средней частоты собственных колебаний ( $\omega = 2\omega_0$ ), соответствует точной настройке на основной резонанс ( $n = 1$ ) при малых значениях безразмерной амплитуды  $\tilde{m}$ . Графики колебаний ротора при выполнении условий, оптимальных для вложения энергии, приведены на рис. 7.1.

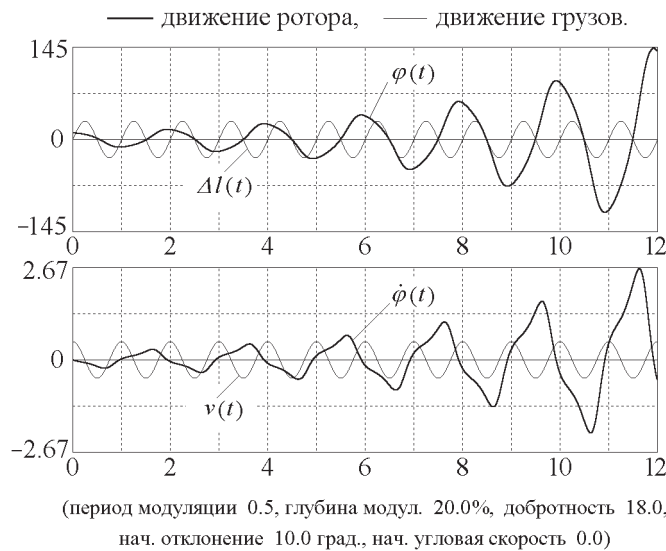


Рис. 7.1: Графики угла отклонения и угловой скорости ротора при крутильных колебаниях, вызванных радиальным синусоидальным движением грузов с частотой  $\omega = 2\omega_0$  (основной параметрический резонанс).

Помимо определенного соотношения между частотой модуляции и собственной частотой, для параметрического возбуждения осциллятора необходимо, чтобы между крутильными колебаниями ротора и принудительными движениями грузов выполнялись определенные фазовые соотношения: грузы должны двигаться в направлении оси вращения с максимальной скоростью в те моменты, когда максимальна величина угловой скорости ротора, совершающего крутильные колебания (т. е. когда ротор проходит вблизи своего положения равновесия). Такие фазовые соотношения будут выполняться для движения грузов, описываемого выражениями (7.1) — (7.2), при условии, что крутильные колебания ротора характеризуются следующей зависимостью от времени:

$$\varphi(t) = \varphi_m \cos \omega_0 t; \quad \dot{\varphi}(t) = -\varphi_m \omega_0 \sin \omega_0 t. \quad (7.7)$$

Это, разумеется, только приближенные выражения, поскольку крутильные колебания ротора,

строого говоря, не являются гармоническими. Отклонения колебаний ротора от синусоидальной формы вызваны принудительным радиальным движением грузов, которое изменяет момент инерции ротора.

После подстановки  $\omega = 2\omega_0$  и  $\dot{\varphi}(t)$  из (7.7) в (7.6) можно проинтегрировать  $dW$  (7.6) по периоду колебаний  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Принимая во внимание, что

$$\int_0^{T_0} \cos^2 2\omega_0 t dt = T_0/2,$$

в результате интегрирования получаем (с точностью до членов первого порядка по малой величине  $\tilde{m}$ ), что работа  $W$  силы  $F(t)$ , совершаемая за период  $T_0$ , дается следующим выражением:

$$W = \frac{1}{2} M \varphi_m^2 \omega_0^2 l_0^2 \cdot 2\pi \tilde{m}. \quad (7.8)$$

Таким же выражением дается работа, совершаемая источником при перемещении второго груза. Таким образом, силы, приложенные к грузам со стороны источника, вынуждающего их совершать заданное синусоидальное движение вдоль стержня, совершают в целом на протяжении периода положительную работу и увеличивают энергию осциллятора на величину

$$\Delta E = 2W = M \varphi_m^2 \omega_0^2 l_0^2 \cdot 2\pi \tilde{m}. \quad (7.9)$$

Будем для простоты считать стержень очень легким в сравнении с массивными грузами, так что вся кинетическая энергия ротора складывается только из кинетической энергии грузов. Полная энергия осциллятора  $E$  равна максимальному значению его кинетической энергии, которое достигается в те моменты, когда совершающий крутильные колебания ротор проходит вблизи своего положения равновесия и имеет максимальную угловую скорость  $\omega_0 \varphi_m$ :

$$E = M \varphi_m^2 \omega_0^2 l_0^2.$$

Сравнивая это выражение с правой частью (7.9), мы приходим к наиболее существенной особенности параметрического резонанса, а именно, к выводу о том, что вложение энергии  $\Delta E$  вследствие модуляции параметра пропорционально полной энергии  $E$ , запасенной осциллятором:

$$\Delta E = 2\pi \tilde{m} E. \quad (7.10)$$

Уравнение (7.10) означает, что при параметрическом резонансе полная энергия колебаний  $E$ , усредненная за период колебаний  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , растет экспоненциально со временем:

$$\frac{dE}{dt} = \tilde{m} \omega_0 E, \quad E(t) = E_0 \exp(2st), \quad \text{где} \quad 2s = \tilde{m} \omega_0. \quad (7.11)$$

Этот результат справедлив в отсутствие трения. Рассеяние механической энергии  $E$  из-за трения (за целое число периодов) также описывается экспоненциальной функцией:

$$\frac{dE}{dt} = -2\gamma E, \quad E(t) = E_0 \exp(-2\gamma t). \quad (7.12)$$

Порогу параметрического резонанса соответствует случай, когда эти потери энергии из-за трения как раз компенсируются вложением энергии, обусловленным принудительным периодическим движением грузов вдоль стержня. В условиях порога  $\gamma = s$ . Таким образом, для минимального значения амплитуды модуляции  $\tilde{m}$  (при заданном значении постоянной затухания  $\gamma$  или добротности  $Q$ ), которое делает возможным параметрическое возбуждение колебаний, получаем:



$$\tilde{m}_{\min} = \frac{2\gamma}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \quad (7.13)$$

Условие порога возбуждения можно выразить также как максимальное значение постоянной затухания  $\gamma$  (или как минимальное значение добротности  $Q$ ) для заданного значения безразмерной амплитуды принудительного радиального движения грузов  $\tilde{m}$  (7.1):

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2}\tilde{m}\omega_0, \quad Q_{\min} = \frac{\omega_0}{2\gamma_{\max}} = \frac{1}{\tilde{m}}. \quad (7.14)$$

Подчеркнем, что полученные выше результаты, относящиеся к порогу параметрического возбуждения, приближенны. Они справедливы только для достаточно малых значений безразмерной амплитуды  $\tilde{m}$  принудительного радиального движения грузов вдоль стержня ротора. Но в компьютерной программе, моделирующей параметрические колебания при плавной модуляции момента инерции, выполняется численное интегрирование дифференциального уравнения, описывающего движение рассматриваемой системы. Это интегрирование не ограничено приближением малых значений  $\tilde{m}$ . Поэтому с помощью моделирования порог параметрического возбуждения можно определить с большей точностью, особенно для значительных амплитуд модуляции.

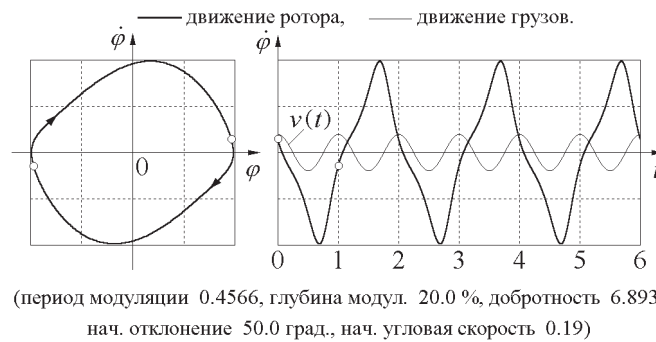


Рис. 7.2: Графики угла отклонения и угловой скорости стационарных колебаний при выполнении пороговых условий возбуждения  $\tilde{m} \approx 1/Q$  для основного параметрического резонанса.

Стационарные параметрические колебания в условиях порога показаны на рис. 7.2. Этот рисунок можно сравнить с рис. 7.1 (стр. 135), где показаны графики колебаний в условиях резонанса при превышении порога параметрического возбуждения, когда амплитуда растет экспоненциально, несмотря на наличие трения в системе.

Теперь можно сравнить пороговые значения глубины модуляции для рассмотренных случаев кусочно-постоянной модуляции по прямоугольному закону и синусоидальной модуляции. Когда  $\tilde{m} \ll 1$ , при синусоидальном движении грузов момент инерции ротора модулируется, как будет показано ниже в (7.17), почти по синусоидальному закону с глубиной  $m \approx 2\tilde{m}$ . (Глубина модуляции момента инерции примерно вдвое больше глубины модуляции расстояния  $l$  от оси вращения до грузов, потому что момент инерции пропорционален квадрату расстояния  $l$ .) таким образом, для синусоидальной модуляции выражение (7.13) дает следующее значение пороговой глубины модуляции момента инерции:  $m = 2/Q$ . Это значение несколько больше, чем величина  $m = \pi/(2Q)$  для случая прямоугольной модуляции, определяемая формулой (6.6) на стр. 114. Как уже отмечалось, прямоугольная модуляция обеспечивает более благоприятные условия для передачи энергии осциллятору от источника модуляции, приводящего грузы в периодическое движение вдоль стержня ротора.

### 7.1.2 Дифференциальное уравнение колебаний осциллятора для случая синусоидального движения грузов

Для простоты мы считаем сам стержень очень легким, так что момент инерции ротора обусловлен только перемещаемыми вдоль него массивными грузами:  $J = 2Ml^2(t)$ . Изменение момента импульса  $J\dot{\varphi}(t)$  со временем описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{d}{dt}(J\dot{\varphi}) = -D\varphi, \quad (7.15)$$

где  $-D\varphi$  — приложенный к ротору восстанавливающий момент силы упругости. Подставляя в (7.15)  $l(t)$  из (7.1) и принимая во внимание выражение для частоты собственных колебаний через параметры осциллятора  $\omega_0^2 = D/J_0$  (здесь  $J_0 = 2Ml_0^2$  — момент инерции ротора при грузах в средних положениях), получаем окончательно:

$$\frac{d}{dt}[(1 + \tilde{m} \sin \omega t)^2 \dot{\varphi}] = -\omega_0^2 \varphi - 2\gamma \dot{\varphi}. \quad (7.16)$$

В правую часть уравнения (7.16) добавлен момент силы вязкого трения, пропорциональный угловой скорости ротора. Это уравнение численно интегрируется в компьютерной программе в реальном времени при моделировании параметрических колебаний, возбуждаемых синусоидальным радиальным движением грузов ротора.

Отметим, что синусоидальное движение грузов вдоль стержня ротора, описываемое выражением (7.1), вообще говоря не обеспечивает синусоидальной модуляции момента инерции. Действительно, момент инерции  $J$  пропорционален квадрату расстояния  $l(t)$  грузов от оси вращения. Поэтому зависимость момента инерции  $J(t)$  от времени содержит вторую гармонику основной частоты  $\omega$  движения грузов. Только при малых значениях амплитуды  $\tilde{m}$  (когда  $\tilde{m} \ll 1$ ) модуляцию момента инерции ротора можно приближенно считать синусоидальной:

$$\begin{aligned} J(t) &= 2Ml^2(t) = 2Ml_0^2(1 + \tilde{m} \sin \omega t)^2 \approx \\ &2Ml_0^2(1 + 2\tilde{m} \sin \omega t) = J_0(1 + m \sin \omega t), \end{aligned} \quad (7.17)$$

где  $J_0 = 2Ml_0^2$  — среднее значение момента инерции, а  $m = 2\tilde{m}$  — глубина модуляции. Таким образом, при  $\tilde{m} \ll 1$  модуляция момента инерции почти синусоидальна, а ее глубина  $m$  вдвое больше безразмерной амплитуды  $\tilde{m}$  синусоидального движения грузов вдоль стержня ротора.

Если интересоваться только приближенным решением, справедливым в первом порядке по малому параметру  $\tilde{m}$ , то вместо точного дифференциального уравнения движения (7.16) можно решать следующее приближенное уравнение:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2(1 - 2\tilde{m} \sin \omega t)\varphi = 0. \quad (7.18)$$

Мы здесь пренебрегаем модуляцией коэффициента при  $\dot{\varphi}$ , поскольку для возбуждения параметрического резонанса существенны изменения во времени только энергоемких параметров (в механическом осцилляторе это момент инерции ротора и коэффициент жесткости пружины). Модуляция постоянной затухания  $\gamma$  не может привести к возбуждению колебаний.

Уравнение (7.18) при  $\gamma = 0$  представляет собой частный случай уравнения Хилла (6.1) (см. стр. 108) с синусоидальной зависимостью параметра  $k$  от времени. Оно называется уравнением Матье. Теория уравнения Матье подробно разработана, и все наиболее существенные свойства его решений хорошо известны. Полный анализ решений математически довольно сложен, и обычно ограничиваются нахождением областей значений частоты  $\omega$  и глубины модуляции  $\tilde{m}$ , в

которых состояние покоя осциллятора в положении равновесия становится неустойчивым: достаточно сколь угодно малого отклонения от этого состояния, чтобы амплитуда появившихся малых колебаний стала прогрессивно нарастать со временем. Иначе говоря, для каждого значения глубины модуляции  $\tilde{m}$  из условия существования нарастающих во времени решений уравнения (7.18) определяют интервалы частоты модуляции (в окрестностях значений  $\omega_n = 2\omega_0/n$ ), в которых возможен параметрический резонанс, т. е. нарастающие колебания. Такая задача для линеаризованной системы с затуханием, описываемой уравнением (7.18), была решена еще в 1927 году А.А. Андроновым и М.А. Леонтовичем.

Отметим, что даже в случае неустойчивости состояния покоя в положении равновесия (т. е. при выполнении условий параметрического возбуждения), при строго равных нулю начальных значениях  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  они оставались бы равными нулю и в дальнейшем. Этим, в частности, параметрический резонанс отличается от обычного резонанса в вынужденных колебаниях, где возрастание амплитуды колебаний со временем происходит и при нулевых начальных условиях (из состояния покоя в положении равновесия).

Подчеркнем, что применимость теории уравнения Матье к моделируемой системе ограничивается лишь первым порядком по глубине модуляции  $\tilde{m}$ . Для конечных значений  $\tilde{m}$  резонансные частоты и границы интервалов параметрической неустойчивости для моделируемой системы отличаются от предсказываемых уравнением Матье. Мы столкнемся с этими отличиями ниже, развивая теорию моделируемой системы во втором порядке по  $\tilde{m}$ .

### 7.1.3 Интервалы параметрического резонанса

Для теоретического определения интервалов частоты  $\omega$  принудительного синусоидального движения грузов вдоль стержня, в которых состояние покоя ротора в положении равновесия становится неустойчивым, воспользуемся дифференциальным уравнением (7.16). Попытаемся найти его приближенное решение в окрестности основного резонанса, когда частота модуляции примерно вдвое превышает частоту собственных колебаний ( $\omega \approx 2\omega_0$ ). В этом случае можно записать  $\omega$  в виде  $\omega = 2\omega_0 + \varepsilon$ , где  $|\varepsilon| \ll \omega_0$ . Предположим, что приближенное решение уравнения (7.16) имеет вид почти гармонического колебания с частотой  $\tilde{\omega} = \omega/2 = \omega_0 + \varepsilon/2$ . Пусть амплитуда и фаза  $\varphi(t)$  медленно изменяются со временем:

$$\varphi(t) = p(t) \cos \tilde{\omega}t + q(t) \sin \tilde{\omega}t. \quad (7.19)$$

Здесь  $p(t)$  и  $q(t)$  — функции времени, изменяющиеся медленно по сравнению с осциллирующими сомножителями  $\cos \tilde{\omega}t$  и  $\sin \tilde{\omega}t$ . Точное решение уравнения (7.16) содержит также высшие гармоники с частотами  $3\tilde{\omega}$ ,  $5\tilde{\omega}$ , ..., но их вклад пропорционален более высоким степеням малого параметра  $\tilde{m} \ll 1$ . Мы не учитываем эти гармоники в приближенном решении (7.19).

Изменение амплитуд  $p(t)$  и  $q(t)$  со временем вызвано модуляцией параметра, и поэтому их производные также пропорциональны малой величине  $\tilde{m}$ . Подставляя  $\varphi$  из выражения (7.19) в дифференциальное уравнение (7.16), мы можем представить произведения тригонометрических функций следующим образом:

$$\begin{aligned} \sin 2\tilde{\omega}t \cos \tilde{\omega}t &= (\sin \tilde{\omega}t + \sin 3\tilde{\omega}t)/2, \\ \sin 2\tilde{\omega}t \sin \tilde{\omega}t &= (\cos \tilde{\omega}t - \cos 3\tilde{\omega}t)/2, \end{aligned}$$

опуская при этом высшие гармоники с частотой  $3\tilde{\omega}$ . В результате для функций  $p(t)$  и  $q(t)$  получим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} 2\tilde{\omega} \dot{q} - (\tilde{\omega}^2 - \omega_0^2) p + (2\gamma\tilde{\omega} - \tilde{m}\omega_0^2) q &= 0, \\ -2\tilde{\omega} \dot{p} - (2\gamma\tilde{\omega} + \tilde{m}\omega_0^2) p - (\tilde{\omega}^2 - \omega_0^2) q &= 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Здесь опущены члены  $2\gamma\dot{p}$  и  $2\gamma\dot{q}$ , поскольку параметрическое возбуждение возможно лишь при достаточно слабом трении: для возбуждения колебаний глубина модуляции должна превышать пороговое значение. Из уравнения (7.14) следует, что это возможно только при  $2\gamma < \tilde{m}\omega_0$ , т. е. вклад опущенных членов в (7.20) имеет порядок  $\tilde{m}^2$ .

В соответствии с общими правилами, решение этой системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно искать в виде экспоненциальных функций времени  $\exp \alpha t$ . Условие существования нетривиального (ненулевого) решения получающейся при этом системы однородных алгебраических уравнений приводит к следующему выражению для  $\alpha$ :

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \sqrt{(\tilde{m}\omega_0)^2 - \varepsilon^2} - \gamma. \quad (7.21)$$

Здесь принято во внимание, что  $\tilde{\omega}^2 \approx \omega_0^2 + \omega_0 \varepsilon$ . В условиях точной настройки на резонанс отклонение частоты  $\varepsilon$  обращается в нуль ( $\varepsilon = 0$ ), и уравнение (7.21) дает следующее значение показателя  $\alpha$ , определяющего экспоненциальное нарастание амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний:

$$\alpha \approx \tilde{m}\omega_0/2 - \gamma. \quad (7.22)$$

Амплитуда колебаний возрастает, если  $\alpha > 0$ . Поэтому пороговым условиям параметрического резонанса соответствует глубина модуляции  $\tilde{m} = 2\gamma/\omega_0 = 1/Q$ . Такое же значение для порога возбуждения при точной настройке в резонанс было получено выше на основе закона сохранения энергии (см. (7.13)). В отсутствие трения показатель экспоненциального роста амплитуды колебаний при резонансе пропорционален глубине модуляции:  $\alpha = \tilde{m}\omega_0/2$ .

Из (7.21) следует, что в отсутствие трения (при  $\gamma = 0$ ) нарастающие со временем решения линеаризованного дифференциального уравнения (7.16) при заданном значении глубины модуляции  $\tilde{m}$  существуют в некотором интервале частот, простирающемся на  $\Delta\omega$  в обе стороны от резонансного значения  $\omega_{\text{res}} = 2\omega_0$ . Полуширина этого интервала  $\Delta\omega$  дается выражением:

$$\Delta\omega = \tilde{m}\omega_0. \quad (7.23)$$

В отсутствие трения ширина  $2\Delta\omega$  интервала частот модуляции, в котором возможен основной параметрический резонанс с  $\omega \approx 2\omega_0$ , пропорциональна амплитуде  $\tilde{m}$  принудительных синусоидальных перемещений грузов. Для какой-либо частоты модуляции  $\omega$  из этого интервала амплитуда параметрически возбуждаемых колебаний растет со временем экспоненциально как  $\exp(\alpha t)$ , где показатель роста  $\alpha$  дается выражением (7.21) с  $\gamma = 0$ :

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{(\tilde{m}\omega_0)^2 - (\omega - \omega_{\text{res}})^2} \quad (7.24)$$

(для  $|\omega - \omega_{\text{res}}| \leq \tilde{m}\omega_0$ ). Показатель роста  $\alpha$  обращается в нуль на границах  $\omega_{\pm}$  интервала неустойчивости:  $\omega_{\pm} = \omega_{\text{res}} \pm \tilde{m}\omega_0$ . На этих границах возможны стационарные колебания постоянной амплитуды. Пример таких колебаний, полученных в моделирующем эксперименте, показан на рис. 7.3. Из симметричного вида кривой  $\dot{\varphi}(t)$  и взаимного расположения кривых  $\dot{\varphi}(t)$  и  $v(t)$  ясно,

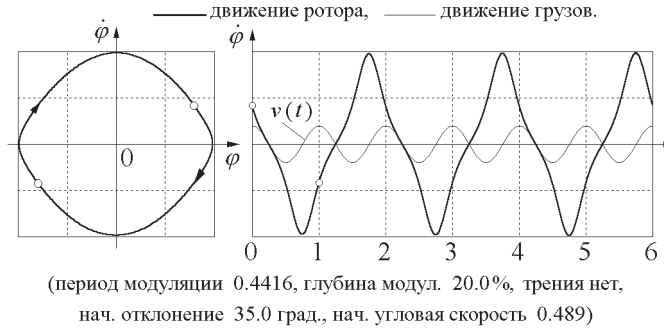


Рис. 7.3: Фазовая диаграмма и графики угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}(t)$  и радиальной скорости грузов  $v(t)$  для стационарных колебаний на левой границе основного интервала параметрической неустойчивости в отсутствие трения.

что энергия, получаемая осциллятором за период колебаний от источника модуляции (положительная работа сил, перемещающих грузы вдоль стержня), в точности равна энергии, отдаваемой источнику (т. е. отрицательной работе этих сил) за то же время.

Для нахождения более точных значений частоты модуляции  $\omega_{\pm}$ , соответствующих границам интервала параметрической неустойчивости, необходимо включить в приближенное решение уравнения (7.16) высшие гармоники. Их частоты  $3\tilde{\omega}$ ,  $5\tilde{\omega}$ , ... равны нечетным кратным основной частоты  $\tilde{\omega} \approx \omega_0/2$ . Во втором порядке по  $\tilde{m}$  можно искать решение в следующем виде:

$$\varphi(t) = p_0 \cos \tilde{\omega}t + q_0 \sin \tilde{\omega}t + p_1 \cos 3\tilde{\omega}t + q_1 \sin 3\tilde{\omega}t. \quad (7.25)$$

Если интересоваться только границами  $\omega_{\pm}$  интервала неустойчивости, где колебания стационарны и их амплитуда со временем не изменяется, можно считать, что коэффициенты  $p_0$ ,  $q_0$ ,  $p_1$ , и  $q_1$  не зависят от времени.

При подстановке (7.25) в уравнение (7.16) можно опустить члены с частотой  $5\tilde{\omega}$ . В членах с частотой  $\tilde{\omega}$  нужно удерживать величины первого и второго порядка по  $\tilde{m}$ , в то время как в членах с частотой  $3\tilde{\omega}$  необходимо удерживать величины только первого порядка. В конце концов мы приходим к системе однородных алгебраических уравнений для  $p_0$ ,  $q_0$ , и  $p_1$ ,  $q_1$ . Искомые границы интервала получаются из условия существования нетривиального решения этой системы. Эти границы (при  $\gamma = 0$ ) даются следующими частотами  $\omega_{\pm}$ :

$$\omega_{\pm} = 2\omega_0 \pm \tilde{m}\omega_0 + \frac{11}{8}\tilde{m}^2\omega_0. \quad (7.26)$$

Член второго порядка по  $\tilde{m}$  одинаков для обеих границ интервала. Он не сказывается на ширине интервала, а лишь сдвигает весь интервал на величину, пропорциональную  $\tilde{m}^2$ .

В моделирующей компьютерной программе нужно вводить не частоту модуляции  $\omega$ , а период  $T = 2\pi/\omega$ . Поэтому приведем здесь также приближенные выражения для границ основного интервала параметрического резонанса в единицах  $T_0$ :

$$T = \frac{T_0}{2} \left( 1 \mp \frac{1}{2}\tilde{m} - \frac{7}{16}\tilde{m}^2 \right). \quad (7.27)$$

Стационарные колебания на левой границе были показаны на рис. 7.3 (см. стр. 141). На рис. 7.4 показаны колебания на правой границе этого интервала. Следует обратить внимание на отклонение формы графиков стационарных колебаний от синусоидальной кривой. Это отклонение вызвано вкладом высших гармоник (главным образом третьей гармоникой с частотой

$3\omega/2$ ). Отношение амплитуды третьей гармоники к амплитуде фундаментальной гармоники одно и то же для колебаний на обеих границах (при одинаковой глубине модуляции). Различие в форме колебаний на правой и левой границах объясняется разницей в сдвиге фаз третьей гармоники по отношению к основной в этих случаях.

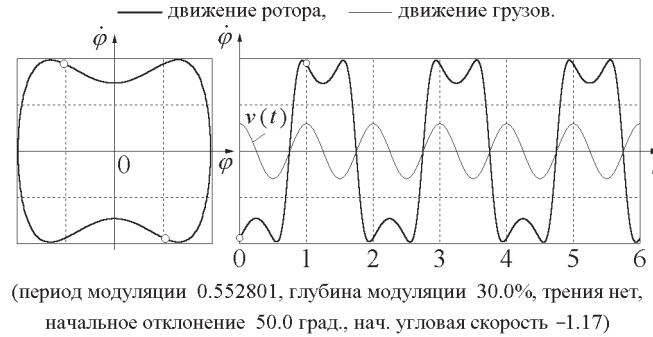


Рис. 7.4: Фазовая диаграмма и графики угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}(t)$  и радиальной скорости грузов  $v(t)$  для стационарных колебаний на правой границе основного интервала параметрической неустойчивости в отсутствие трения.

При наличии трения интервалы параметрического резонанса сужаются. Из уравнения (7.21) (с  $\alpha = 0$ ) следует, что при превышении порога, когда  $\tilde{m} > 1/Q$ , границам интервала соответствуют следующие отклонения  $\Delta\omega$  частоты модуляции  $\omega$  в обе стороны от резонансного значения  $\omega_{\text{res}}$ :

$$\Delta\omega = \sqrt{(\tilde{m}\omega_0)^2 - 4\gamma^2} = \sqrt{\tilde{m}^2 - (1/Q)^2} \omega_0. \quad (7.28)$$

Из этого выражения видно, что в условиях порога (когда  $Q = 1/\tilde{m}$ ) обе границы интервала сливаются, т. е. интервал неустойчивости исчезает. За пределами интервала неустойчивости модуляция момента инерции вызывает лишь некоторые изменения формы затухающих собственных колебаний, если таковые были возбуждены.

### 7.1.4 Резонансы высших порядков

Колебательная система с гармонической зависимостью модулируемого параметра от времени, описываемая уравнением Матье (7.18), имеет также параметрические резонансы высших порядков ( $n > 1$ ), расположенные вблизи значений частоты модуляции  $\omega = 2\omega_0/n$ . Ширина  $\Delta\omega$  частотных интервалов, соответствующих неустойчивости состояния  $\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$ , быстро уменьшается при увеличении порядкового номера  $n$  параметрического резонанса — как  $\tilde{m}^n$ . Показатель  $s$  скорости роста амплитуды при параметрическом резонансе уменьшается при переходе к более высоким порядкам  $n$  столь же быстро, как и ширина  $\Delta\omega$  частотного интервала неустойчивости. Оба эти обстоятельства затрудняют экспериментальное наблюдение параметрических резонансов высоких порядков  $n > 1$  при умеренных значениях глубины модуляции  $\tilde{m}$ .

Для физической системы, моделируемой в компьютерной программе, параметрический резонанс второго порядка  $n = 2$  (при  $\omega \approx \omega_0$  или  $T \approx T_0$ ) в случае малой амплитуды синусоидального движения грузов чрезвычайно слаб и узок. Графики колебаний в случае резонанса второго порядка при плавной модуляции момента инерции торсионного осциллятора показаны на рис. 7.5.

Чтобы найти частотные границы второго интервала параметрической неустойчивости, мы ищем для уравнения (7.16) решение, описывающее стационарные колебания с частотой  $\omega$ , близкой к частоте собственных колебаний  $\omega_0$ . При учете членов вплоть до второго порядка по глубине

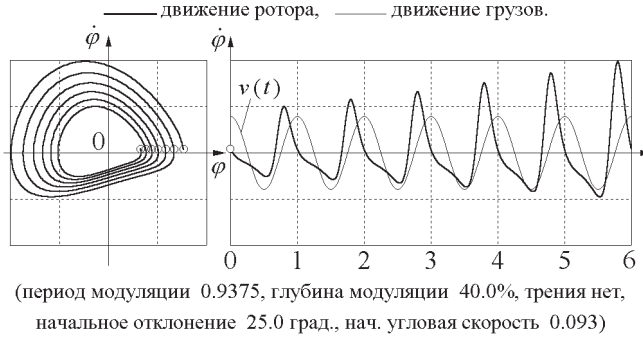


Рис. 7.5: Параметрический резонанс второго порядка ( $n = 2$ ): фазовая траектория и графики угловой скорости ротора и скорости радиального принудительного движения грузов.

модуляции  $\tilde{m}$ , мы должны включить в это приближенное решение синусоидальные колебания на основной частоте<sup>1</sup>  $\omega = \omega_0 + \varepsilon$  (частоте модуляции) и следующую гармонику с частотой  $2\omega$ :

$$\varphi(t) = a_0 \cos \omega t + b_0 \sin \omega t + a_1 \cos 2\omega t + b_1 \sin 2\omega t. \quad (7.29)$$

Пример таких стационарных колебаний показан на рис. 7.6.

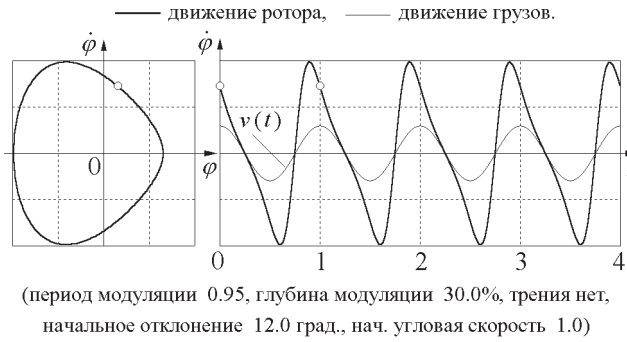


Рис. 7.6: Фазовая траектория и график угловой скорости стационарных колебаний на границе интервала параметрического резонанса второго порядка ( $n = 2$ ).

Подставляя  $\varphi(t)$  в (7.18), преобразуем встречающиеся произведения синусов и косинусов в суммы с помощью известных тригонометрических тождеств, сохраняя лишь члены с частотами  $\omega$  и  $2\omega$ . В результате получаем следующую систему однородных алгебраических уравнений для коэффициентов  $a_0$ ,  $b_0$ , и  $a_1$ ,  $b_1$ :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) a_0 + \frac{3}{4} \tilde{m}^2 a_0 + 2\tilde{m} b_1 - \frac{2\gamma}{\omega_0} b_0 &= 0, \\ \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) b_0 + \frac{1}{4} \tilde{m}^2 b_0 + 2\tilde{m} a_1 + \frac{2\gamma}{\omega_0} a_0 &= 0, \\ 3a_1 - 2\tilde{m} b_0 &= 0, \quad 3b_1 + 2\tilde{m} a_0 = 0. \end{aligned} \quad (7.30)$$

<sup>1</sup> Отметим, что может оказаться удобным считать фундаментальной частотой стационарных параметрически возбуждаемых колебаний во всех случаях частоту  $\omega/2$ , т. е. половину частоты модуляции параметра. При таком соглашении спектр колебаний в случае резонансов нечетных порядков содержит только нечетные гармоники, а спектр стационарных колебаний при резонансах четных порядков содержит только четные гармоники, причем амплитуда фундаментального колебания с частотой  $\omega/2$  равна нулю.

Из двух последних уравнений этой системы находим следующие выражения для амплитуд  $a_1$  и  $b_1$  второй гармоники в сложном колебании  $\varphi(t)$  через глубину модуляции  $\tilde{m}$  и амплитуды  $a_0$  и  $b_0$  основного гармонического колебания:

$$a_1 = (2/3)\tilde{m} b_0, \quad b_1 = -(2/3)\tilde{m} a_0. \quad (7.31)$$

По существу эти соотношения означают, что амплитуда второй гармоники в стационарных колебаниях равна  $(2/3)\tilde{m}$  от амплитуды колебания на основной частоте. Это отношение амплитуд гармонических составляющих одинаково для колебаний на обеих границах интервала неустойчивости. Однако для левой и правой границ высшие гармоники добавляются к основному колебанию в противоположных относительных фазах, что приводит к разной форме результирующих стационарных колебаний. Графики стационарных колебаний на правой границе интервала показаны на рис. 7.7.

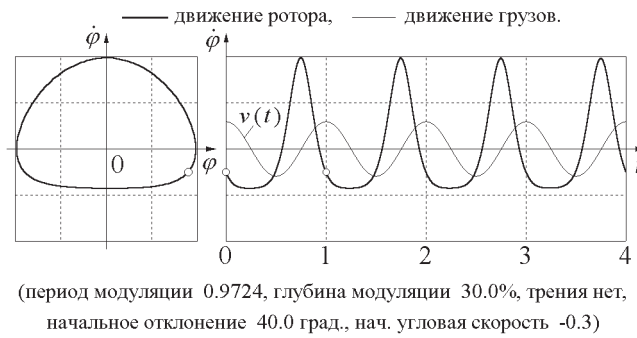


Рис. 7.7: Фазовая траектория и график угловой скорости стационарных колебаний на правой границе интервала параметрического резонанса второго порядка ( $n = 2$ ).

Подставляя  $a_1$  и  $b_1$  из (7.31) в первые два уравнения системы (7.30) и принимая во внимание, что  $\omega^2 = (\omega_0 + \varepsilon)^2 \approx \omega_0^2 + 2\omega_0\varepsilon$ , получаем систему двух однородных уравнений для  $a_0$  и  $b_0$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{2\varepsilon}{\omega_0} - \frac{7}{12}\tilde{m}^2 \right) a_0 - \frac{2\gamma}{\omega_0} b_0 &= 0, \\ \frac{2\gamma}{\omega_0} a_0 + \left( \frac{2\varepsilon}{\omega_0} - \frac{13}{12}\tilde{m}^2 \right) b_0 &= 0. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Нетривиальное решение этой системы существует, если ее определитель равен нулю. Из этого условия находятся значения  $\varepsilon = \omega - \omega_0$ , соответствующие границам  $\omega_{\pm}$  второго интервала параметрической неустойчивости:

$$\omega_{\pm} = \left( 1 + \frac{5}{12}\tilde{m}^2 \pm \frac{1}{8}\sqrt{\tilde{m}^4 - (4/Q)^2} \right) \omega_0. \quad (7.33)$$

Отметим, что даже нижняя граница этого интервала смещена от  $\omega_0$  в сторону более высоких частот. Границы интервала сливаются на пороге возбуждения. Из (7.33) находим следующие условия для порога второго параметрического резонанса:

$$\tilde{m}_{\min} = \frac{2}{\sqrt{Q}}, \quad Q_{\min} = \frac{4}{\tilde{m}^2}, \quad \omega_{\text{res}} = \left( 1 + \frac{5}{12}\tilde{m}^2 \right) \omega_0. \quad (7.34)$$



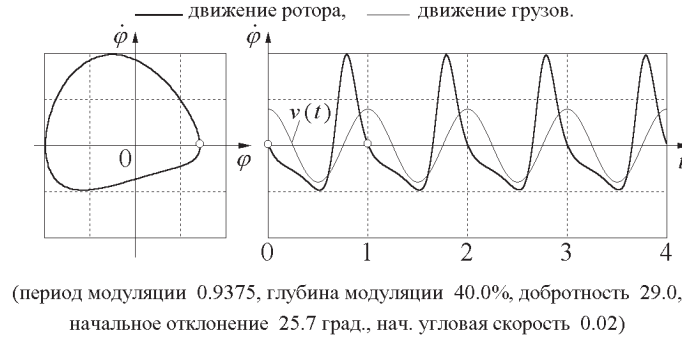


Рис. 7.8: Фазовая траектория и график угловой скорости стационарных колебаний в условиях порога параметрического резонанса второго порядка ( $n = 2$ ).

Стационарные колебания в условиях порога второго параметрического резонанса показаны на рис. 7.8.

В отсутствие трения ширина второго интервала неустойчивости пропорциональна квадрату глубины модуляции:  $\omega_+ - \omega_- = \tilde{m}^2 \omega_0 / 4$ . Уравнение (7.33) дает следующие значения для границ интервала при нулевом трении:

$$\omega_+ = \left(1 + \frac{13}{24} \tilde{m}^2\right) \omega_0, \quad \omega_- = \left(1 + \frac{7}{24} \tilde{m}^2\right) \omega_0. \quad (7.35)$$

Чтобы в моделирующем эксперименте наблюдать стационарные колебания в отсутствие трения, нужно выбрать период модуляции, соответствующий одной из этих границ, и должным образом задать начальные условия. Для  $\omega = \omega_+$  и  $\gamma = 0$  уравнение (7.32) дает  $a_0 = 0$  (и  $b_1 = 0$ ). С другой стороны, для  $\omega = \omega_-$  получаем  $b_0 = 0$  (и  $a_1 = 0$ ). Чтобы связать эти значения с начальными условиями, воспользуемся выражением (7.29), которое дает зависимость  $\varphi$  от времени через  $a_0$ ,  $b_0$ , и  $a_1$ ,  $b_1$ . Для начального момента времени  $t = 0$  (7.29) дает:

$$\varphi(0) = a_0 + a_1, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega(b_0 + 2b_1) \approx \omega_0(b_0 + 2b_1). \quad (7.36)$$

Стационарные колебания на частоте  $\omega = \omega_-$  при  $t = 0$  характеризуются угловым смещением  $\varphi(0) = a_0$  и сравнительно малой угловой скоростью:  $\dot{\varphi}(0) = 2b_1\omega_0 = -(4/3)\tilde{m}a_0\omega_0$  (здесь мы воспользовались уравнением (7.31), чтобы выразить  $b_1$  через  $a_0$ ). Таким образом, для получения стационарных колебаний можно выбрать произвольное начальное отклонение  $\varphi(0)$  и ввести начальную угловую скорость  $\dot{\varphi}(0) = -(4/3)\tilde{m}\varphi(0)\omega_0$ .

Для другой границы частотного интервала ( $\omega = \omega_+$ ) стационарные колебания при  $t = 0$  характеризуются угловой скоростью  $\dot{\varphi}(0) = \omega_0 b_0$  и сравнительно малым угловым отклонением:  $\varphi(0) = a_1 = (2/3)\tilde{m}b_0$ . Следовательно, для получения стационарных колебаний в моделирующем эксперименте удобно выбрать произвольно некоторую начальную угловую скорость  $\dot{\varphi}(0)$  и ввести начальное угловое отклонение  $\varphi(0) = (2/3)\tilde{m}\dot{\varphi}(0)/\omega_0$ .

Для стационарных колебаний в условиях порога возбуждения уравнения (7.32) дают  $b_0 = a_0$ . Поэтому

$$\varphi(0) = a_0(1 + \frac{2}{3}\tilde{m}), \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0 a_0(1 - \frac{4}{3}\tilde{m}). \quad (7.37)$$

Чтобы получить стационарные колебания на пороге второго параметрического резонанса, можно произвольно выбрать начальное угловое отклонение  $\varphi(0)$  и ввести начальную угловую

скорость  $\dot{\varphi}(0) = \omega_0 \varphi(0)(1 - 2\tilde{m})$ , как это следует из (7.37). Или в равной мере можно произвольно задать некоторую начальную скорость  $\dot{\varphi}(0)$  и ввести начальное отклонение  $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0)(1 + 2\tilde{m})/\omega_0$ . Разумеется, для заданной глубины модуляции  $\tilde{m}$  период модуляции должен при этом иметь резонансное значение, а добротность — пороговое значение, определяемое выражением (7.34).

Отметим, что все полученные выше соотношения имеют приближенный характер. Они справедливы для малых значений  $\tilde{m}$ , так как в расчетах учитывалась лишь одна из высших гармоник.

В рассматриваемом здесь случае плавной модуляции момента инерции параметрический резонанс третьего порядка слабее и уже резонанса второго порядка, в противоположность случаю прямоугольной модуляции со скачкообразными изменениями параметра. Третий интервал исчезает даже при наличии очень слабого трения. Стационарные колебания в условиях порога возбуждения резонанса третьего порядка показаны на рис. 7.9.



Рис. 7.9: Фазовая траектория и график угловой скорости стационарных колебаний в условиях порога параметрического резонанса третьего порядка ( $n = 3$ ).

## 7.2 Контрольные вопросы и задачи

### 7.2.1 Основной параметрический резонанс

#### 1.1\* Основной резонанс ( $n = 1$ ) в отсутствие трения.

(а) Пусть период  $T$  принудительного синусоидального движения грузов соответствует основному параметрическому резонансу  $n = 1$  ( $T = T_0/2$ ). По какому закону происходит рост амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний в отсутствие трения? Как скорость роста амплитуды зависит от глубины модуляции  $\tilde{m}$  расстояния грузов от оси вращения?

(б) Начальные условия какого типа приводят к росту амплитуды с самого начала модуляции момента инерции, если принудительное радиальное движение грузов описывается выражением (7.1)?

(в) Для найденных в пункте (б) начальных условий, благоприятствующих росту амплитуды с самого начала, сколько циклов модуляции пройдет, пока амплитуда вырастет в 5 раз по сравнению со своим начальным значением, если трения нет, а глубина модуляции расстояния грузов от оси ротора  $\tilde{m} = 10\%$ ?

(г) Как изменится ответ на поставленный вопрос в случае начального отклонения ротора в противоположную сторону от положения равновесия?

**1.2\* Рост амплитуды колебаний при настройке на основной резонанс в условиях отсутствия трения.**

(а) При точной настройке частоты модуляции на основной параметрический резонанс ( $n = 1$ ), какова должна быть фаза начальных собственных колебаний, чтобы амплитуда с самого начала возрастала наискорейшим образом? Какое значение глубины модуляции  $\tilde{m}$  приведет к росту амплитуды колебаний от  $20^\circ$  до  $80^\circ$  на протяжении 12 средних периодов собственных колебаний  $T_0$ ? Проверьте Ваш ответ в эксперименте.

(б) При каких начальных условиях амплитуда существующих колебаний будет убывать на ранней стадии модуляции момента инерции? Воспроизведите такой случай в моделирующем эксперименте. Почему через некоторое время убывание амплитуды замедляется и сменяется ростом амплитуды? Используя наблюдаемые графики колебаний, объясните физические причины роста или убывания амплитуды в зависимости от соотношения фаз между собственными крутильными колебаниями ротора и принудительным синусоидальным движением грузов. Сколько времени пройдет, пока начальное убывание амплитуды не сменится ее неограниченным ростом? Какими факторами определяется это время? (Последние два вопроса весьма сложны, и для получения правильного ответа необходимо серьезное и глубокое исследование.)

**1.3\* Порог основного параметрического резонанса.**

(а) Оцените численно пороговое (минимальное) значение глубины модуляции  $\tilde{m}$ , которое приводит к росту амплитуды в основном параметрическом резонансе ( $T = T_0/2$ ) для заданного значения добротности осциллятора  $Q$  (скажем, для  $Q = 15$ ). Проверьте свой ответ экспериментально. Приведите физическое объяснение формы графиков колебаний и их фазовой траектории, наблюдаемых в условиях параметрической регенерации.

(б) При начальных условиях какого типа колебания в условиях порога возбуждения будут стационарными?

(в) Полагая частоту модуляции точно настроенной на основной параметрический резонанс  $n = 1$ , оцените пороговое (минимальное) значение добротности  $Q$ , соответствующее стационарным колебаниям неизменной амплитуды (т. е. режиму параметрической регенерации) при некотором умеренном значении (10 – 15%) глубины модуляции  $\tilde{m}$  расстояния грузов от оси вращения.

(г) Уточните теоретическую оценку пороговой добротности с помощью моделирующего эксперимента. Чем объясняются наблюдаемые расхождения экспериментальных результатов с теоретическими предсказаниями?

(д) Устойчив ли режим стационарных колебаний в условиях порога возбуждения (режим параметрической регенерации) по отношению к малым изменениям параметров системы? По отношению к малым изменениям начальных условий?

(е) В случае стационарных колебаний на пороге основного параметрического резонанса, чему равно отношение амплитуды третьей гармоники к амплитуде гармонической составляющей на основной частоте? (Фундаментальная частота в данном случае равна половине частоты модуляции.)

**1.4\* Рост амплитуды параметрических колебаний осциллятора при превышении порога возбуждения.**

(а) Для заданного значения  $\tilde{m}$  (скажем, для  $\tilde{m} = 0.15$ ) рассчитайте минимальную добротность  $Q_{\min}$ , соответствующую порогу возбуждения параметрического резонанса. Допустим, что в эксперименте введено вдвое большее значение добротности  $Q = 2Q_{\min}$ . Во сколько раз возрастет амплитуда колебаний за первые 10 циклов модуляции в условиях точной настройки на основной резонанс? Зависит ли ответ от начальных условий? Проверьте свой результат в моделирующем эксперименте.

(б) Какой будет амплитуда колебаний еще через 10 циклов модуляции? Почему трение не в состоянии ограничить рост амплитуды колебаний при параметрическом резонансе?

## 7.2.2 Основной частотный интервал параметрического резонанса

### 2.1\*\* Основной интервал параметрического возбуждения в отсутствие трения.

(а) Рассчитайте значения периода модуляции  $T_{\pm}$ , соответствующие границам частотного интервала неустойчивости при заданной глубине модуляции  $\tilde{m}$  и  $\gamma = 0$  (в приближении  $\tilde{m} \ll 1$ , скажем, для  $\tilde{m} = 10\%$ ). Как ширина интервала зависит от глубины модуляции?

(б) Найдите границы основного интервала параметрической неустойчивости с точностью до членов второго порядка по глубине модуляции  $\tilde{m}$ . Влияют ли члены второго порядка на ширину этого интервала неустойчивости?

(в) Проверьте в эксперименте рассчитанные значения  $T_{\pm}$  и начальной угловой скорости для каждой из границ интервала параметрической неустойчивости, и попытайтесь найти экспериментально более точные значения этих величин.

### 2.2\*\* Колебания на границах основного интервала параметрической неустойчивости.

(а) Какие начальные условия следует задавать для того, чтобы наблюдать стационарные колебания неизменной амплитуды, соответствующие каждой из границ основного интервала параметрического резонанса? Допустим, что задано некоторое начальное отклонение  $\varphi(0) = \varphi_0$ . Какую начальную скорость  $\Omega = \dot{\varphi}(0)$  следует затем ввести для получения стационарных колебаний?

(б) На основе графиков стационарных колебаний в условиях границ интервала неустойчивости, наблюдаемых при моделировании, объясните физические причины постоянства амплитуды (т. е. причины, по которым не происходит систематического подвода или отвода энергии) для каждой из границ интервала.

(в) Для стационарных колебаний на границах интервала неустойчивости, чему равно отношение амплитуды третьей гармоники к амплитуде гармонической составляющей на фундаментальной частоте? Какими параметрами системы определяется вклад третьей гармоники? Чем различаются вклады третьей гармоники для колебаний в условиях левой и правой границ интервала?

### 2.3\*\* Порог параметрического резонанса в пределах интервала неустойчивости.

(а) Допустим, что значение периода модуляции  $T$  лежит где-либо внутри интервала параметрического возбуждения, например, посередине между резонансным значением периода модуляции и одной из границ интервала. Оцените экспериментально показатель роста амплитуды колебаний в отсутствие трения, и рассчитайте на основе этой оценки пороговое значение добротности  $Q_{\min}$  параметрического возбуждения колебаний для данных значений периода модуляции  $T$  и глубины модуляции  $\tilde{m}$ .

(б) Проверьте полученное значение  $Q_{\min}$  в эксперименте, и методом проб и ошибок получите уточненное значение. Сравните наблюдаемые графики (и фазовые траектории) таких стационарных колебаний (пример можно видеть на рис. 7.10) с соответствующими графиками стационарных колебаний на ближней границе интервала в отсутствие трения (см. рис. 7.4 на стр. 142), а также с графиками стационарных колебаний при точной настройке на резонанс с пороговым трением (см. рис. 7.2 на стр. 137). В чем сходство и различия в этих графиках, и как это можно объяснить физически?

(в) Как влияет трение на ширину основного интервала параметрического резонанса? Приведите теоретическую оценку значений периода модуляции, соответствующих границам интервала при заданных значениях  $\tilde{m}$  и  $Q$ .

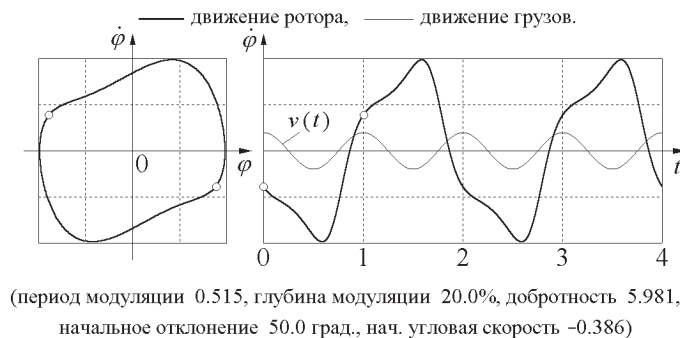


Рис. 7.10: Фазовая траектория и график угловой скорости стационарных колебаний в условиях порога для внутренней точки основного интервала параметрического резонанса ( $n = 1$ ).

(г) Для случая малой глубины модуляции  $\tilde{m} \ll 1$  рассчитайте пороговую добротность при некотором значении периода модуляции  $T$  из внутренней точки интервала параметрического резонанса (выполните расчет с точностью до членов второго порядка по  $\tilde{m}$ ). Сравните результат расчета с экспериментальным значением пороговой добротности, полученным при ответе на вопрос пункта (б).

**2.4 Колебания за пределами интервалов параметрического резонанса.** Введите некоторое значение периода модуляции  $T$ , лежащее за пределами интервала параметрического резонанса для заданного значения глубины модуляции  $\tilde{m}$ . Убедитесь с помощью моделирующего эксперимента, что при любых начальных условиях колебания в конце концов затухают (даже при сколь угодно слабом трении), и осциллятор приходит в состояние покоя в положении равновесия, несмотря на принудительные изменения момента инерции.

## 7.2.3 Параметрический резонанс второго порядка

### 3.1\*\* Второй параметрический резонанс ( $n = 2$ ) в отсутствие трения.

(а) Рассчитайте частотные границы второго интервала параметрической неустойчивости (когда период модуляции  $T$  близок к частоте собственных колебаний  $T_0$ ) в отсутствие трения для малых значений глубины модуляции  $\tilde{m} \ll 1$ . Как ширина интервала зависит от глубины модуляции  $\tilde{m}$ ?

(б) Какие начальные условия нужно задавать, чтобы в эксперименте воспроизвести стационарные колебания для каждой из границ второго интервала? Почему каждой из границ второго интервала соответствуют две различные фазовые траектории? Для данной границы (скажем, верхней), в чем заключается отличие одной из возможных траекторий от другой?

(в) Чему равно отношение амплитуды второй гармоники к амплитуде фундаментальной синусоидальной составляющей стационарных колебаний на каждой из границ второго интервала? (Мы здесь понимаем под фундаментальной частотой частоту модуляции.)

### 3.2\*\* Порог второго параметрического резонанса.

(а) Допустим, что период модуляции соответствует точной настройке на параметрический резонанс второго порядка. Как нужно задать при этом начальные условия, чтобы получить наиболее быстрый рост амплитуды колебаний?

Обратите внимание на характерную для этого резонанса форму фазовой траектории. Используя экспериментальные графики колебаний, объясните качественно физические причины наблюдаемого роста амплитуды. Сравните эти кривые (и фазовую диаграмму) для плавной си-

нусоидальной модуляции с соответствующими кривыми в случае скачкообразной прямоугольной модуляции, изучавшейся в предыдущей главе.

(б) При заданной глубине модуляции  $\tilde{m}$ , чему равно пороговое (минимальное) значение  $Q_{\min}$  добротности для возбуждения параметрического резонанса второго порядка? Какой период модуляции соответствует этому порогу возбуждения?

(в) При каких начальных условиях будут наблюдаться стационарные колебания неизменной амплитуды, соответствующие порогу возбуждения резонанса второго порядка?

(г) Чему равно отношение амплитуды второй гармоники к амплитуде фундаментальной синусоидальной составляющей стационарных колебаний в условиях порога резонанса второго порядка?